書泉グランデ 高校生もわかる新しい数論研究 第3期 予稿4; $a = mp$ 問題と超完全数 HP :iitakashigeru.web.fc2.com

飯高 茂

2017 年 7 月 14 日

1 宣伝

高校生もわかる新しい数論研究の連続講義新規まき直しではじめる

10 月 11 月の第 2, 第 4 金曜日 6:30-8:30 神田にある、書泉グランデ 7 階

完全数の一般化が 1 つのテーマ究極の完全数, 劣完全数, 超完全数, フェルマ完全数, 乗数つき完全数, オイラーの完全数など新しい完全数がたくさん登場し詳しい研究がなされ受講者も研究に参加します予備知識は高校 1 年生の数学

これまで、小学生、高校生、大学生、サラリーマン、熟年世代の男女など多様な人々の支えがり続けられてきましたいよいよ 4 年目に突入します詳しい内容は次を見てください. 飯高 茂 HP:iitakashigeru.web.fc2.com

2 3 点セット

$\sigma(a) = 2a1$ を満たす自然数 a は完全数と呼ばれる.

$q = 2^{e+1} - 1$ が素数のとき $2^e q$ は完全数になる. このように書ける完全数は偶数になるがこれをユークリッドの完全数という.

偶数完全数はユークリッドの完全数になることはオイラーが証明した.

奇数完全数は存在するかという問題は 2000 年以上考え荒れているが依然として解けない難問である.

$a = 2^e$ とし, 等比数列の和の公式を用いると

$$\sigma(a) = \sigma(2^e) = 2^{e+1} - 1 = 2a - 1.$$

と書けるから $a = 2^e$ なら $\sigma(a) = 2a - 1$ を満たす.

これはごく初等的なことであるが, 等比数列の和の公式が用いられている.

そこで数学の世界によくあることだが, この逆を問題として考える.

$\sigma(a) = 2a - 1$ を満たす自然数 a は $a = 2^e$ に限るか?

ごく自然な発想で生まれた問題である. 一般に $\sigma(a) - 2a = -1$ を満たす自然数を概完全数 (almost perfect number) と呼ぶそうだ.

さらに一般の場合を考え $a = p^e(e:$ 任意の数$)$, と書ける解を C 型の解という.

$\sigma(a) - 2a = 1$ を満たす自然数は pseudo perfect number (疑似完全数) と呼ばれることがある. これは果たして存在するかどうかが問われている.

$\sigma(a) - 2a = -1, 0, 1$ を満たす自然数 a を求める問題 (3 点セット問題) はどれも未解決の難問である.

私が意図していることは 3 点セット問題を解くことでは無い. 3 点セット問題をさらに一般にして考えてみることである.

完全数の平行移動とは次の意味である.

別のパラメータ m に対して $q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $a = 2^e q$ を m だけ平行移動した狭義の完全数という.

これは, 方程式 $\sigma(a) - 2a = -m$ を満たす. 今度はこの方程式の解を m だけ平行移動した広義の完全数という.

$m = 0, 1, 2$ のときを除くと, 狭義の完全数にならない広義の完全数はたくさんある.

3 A 型

$a = 2^e q, (2 < q)$: 素数となるとき正規形の解, または A 型の解という.

表 1: $P = 2, m = 0$; 元祖完全数, 正規形 (A 型解)

e	a	factor
2	28	$2^2 * 7$
4	496	$2^4 * 31$
6	8128	$2^6 * 127$
12	33550336	$2^{12} * 8191$
16	8589869056	$2^{16} * 131071$
18	137438691328	$2^{18} * 524287$
30	2305843008139952128	$2^{30} * 2147483647$

8 番目の例はオイラーによる.

広義の完全数は 正規形の解になるという形に, 完全数の基本問題は言い換えられる.

$m = 1, 2$ のときも広義の完全数は正規形の解になると予想してもいい.

3.1 フェルマ完全数

表 2: $P = 2, m = 2$; フェルマ完全数

a	factor
10	$2 * 5$
136	$2^3 * 17$
32896	$2^7 * 257$
2147516416	$2^{15} * 65537$

A 型
解はこれしかないという予想がある.

3.2 $P = 2, m = 4$

表 3: $P = 2, m = 4$;

a	factor
5	5
14	$2 * 7$
44	$2^2 * 11$
110	$2 * 5 * 11$
152	$2^3 * 19$
884	$2^2 * 13 * 17$
2144	$2^5 * 67$
8384	$2^6 * 131$
18632	$2^3 * 17 * 137$

A,D,G(5) 型
$a = 2^e rq, (2 < r < q)$: 素数となるとき第二正規形の解, または D 型の解という.
$a = p^e$ が $\sigma(a) - 2a = -m$ の解のとき G(p^e) 型の解という.
このとき, $N = p^{e+1} - 1$ とおけば $\overline{p}\sigma(a) = 2p^e - m$. $N = (p-1)m + 2(p^e - 1)$.
$e = 1$ のとき, $p = m + 1$.
6 は完全数. $-m = 2 * 6 = 12$ なので $\sigma(a) - 2a = 12$ の解を調べる.

```
24,factor(24)=2^3*3
30,factor(30)=2*3*5
42,factor(42)=2*3*7
54,factor(54)=2*3^3
66,factor(66)=2*3*11
78,factor(78)=2*3*13
102,factor(102)=2*3*17
```

このように無数の解が出てくる. よく見ると $a = 6p$ の形をしているので, これらを通常解というが, B 型解ともいう.

$a = 6p$ の形をしていない解もある. $a = 24 = 2^3 * 3, a = 54 = 2 * 3^3$ も解であり, これらは擬素数解と呼ばれる. その心は

$24 = 2^3 * 3 = 6X$, $X = 4$ と書ける. 通常解 $6p$ の形が少し, 崩れて $X = 4$ とおくとき $6X$ であり, $4 = 2^2$ が素数ではないのが残念なので, 4 を擬素数と考えて,$6X$ を擬素数解という.

$54 = 2 * 3^3$ も $54 = 6Y$, $Y = 9$ と書けるので擬素数解という. $\sigma(a) - 2a = 12$ の解として出てくる擬素数解はこれらの 24,54 だけである.

次に 6 で割れない場合の解を探して列挙した結果は驚くべきものであった.

```
304,factor(304)=2^4*19
127744,factor(127744)=2^8*499
```

3.2.1 第 2 完全数 28

第 2 完全数 28 の場合,
$\sigma(a)-2a=56$ の解を調べる.

```
224,factor(224)=2^5*7
308,factor(308)=2^2*7*11
364,factor(364)=2^2*7*13
476,factor(476)=2^2*7*17
532,factor(532)=2^2*7*19
644,factor(644)=2^2*7*23
812,factor(812)=2^2*7*29
868,factor(868)=2^2*7*31
1036,factor(1036)=2^2*7*37
1148,factor(1148)=2^2*7*41
1204,factor(1204)=2^2*7*43
1316,factor(1316)=2^2*7*47
1372,factor(1372)=2^2*7^3
```

$a=28p$ が通常解,(B 型解という). $a=224=2^5*7, a=1372=2^2*7^3$ は擬素数解.

28 で割れない場合の解を列挙した.

```
4544,factor(4544)=2^6*71
9272,factor(9272)=2^3*19*61
14552,factor(14552)=2^3*17*107
25472,factor(25472)=2^7*199
74992,factor(74992)=2^4*43*109
495104,factor(495104)=2^9*967
```

$a = P^e rs$ の形の解を第二正規形の解, または D 型の解という.
$\sigma(a) - 2a = 56$ の解を調べる. 解の種類で分類する.

1. A 型解 $4544 = 2^6 * 71$,$25472 = 2^7 * 199$,$495104 = 2^9 * 967$

2. D 型解 $9272 = 2^3 * 19 * 61$, $14552 = 2^3 * 17 * 107$, $74992 = 2^4 * 43 * 109$

平行移動 m の広義の完全数において B 型の解が出てくるのはいつか?
一般には平行移動 m の広義の完全数では A,B,C,D 型の解 (主系列) がある.
これ以外に 例外的な解があり便宜上 E,G,G 型の解と分類するのだがこのような解の研究は未熟な段階である.

3.3 究極の完全数

奇数の素数 P を固定して考える.(P を底 (base) とも言う)
m だけ平行した究極の (狭義の) 完全数とは $q = \sigma(P^e) + m$:) 素数のとき $a = P^e q$ であり,

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)\mathrm{Maxp}(a) - m\overline{P}$$

を満たす. これを満たす a を広義の完全数という.
底 P をいろいろ動かして研究することを, 完全数の垂直的展開という.
平行移動 m を動かして研究することを, 完全数の水平的展開という.
完全数の平行移動で出てきた解は, 主系列と例外系列に大別できることは $P = 2$ の場合の研究の要点になるが, 底 P をいろいろ動かし完全数の垂直的展開をしてもその主系列と例外系列に大別されると総括したい.

4　$a = mp$ 問題

著者による最近の一連の研究の起点は 素数の 2 倍の特徴付けにあった.

$\sigma(a) - a = 1$ が a が素数 p になる必要十分な条件を与える.

そこで 素数の 2 倍 $2p$ になる必要十分な条件を探すことを試みた.

$a = 2p, p > 2$: 素数, のとき $\sigma(a) = 3(p+1)$ なので, これを 2 倍し $2\sigma(a) = 3(2p+2) = 3a+6$.

ここで中を抜いて, $2\sigma(a) = 3a + 6$ をえる.

素数の p が抜けてできた式を満たす a は何かを問うのである.

計算は容易であり, a は $2p$ または 8 となることが証明される.

$a = 2p$ は自然な解であるが, さらに 8 が解として出てきたのは不可解である.

そこで $8 = 2 * 4$ とみるとき 4 を素数に準じるものと見て擬素数と呼ぶことにする.

こう見ることによりこの方程式の解を $a = 2P$ と書くとき $P > 2$ は素数または擬素数としての 4 と考える.

次により一般に考える.

p を m の素因子でない素数とすると $\sigma(a) = \sigma(m)(p+1)$.

ここから p を消すために式を m 倍すると

$$m\sigma(a) = \sigma(m)(mp+m) = \sigma(m)a + m\sigma(m).$$

中抜きにより

$$m\sigma(a) = \sigma(m)a + m\sigma(m).$$

そこでこの逆がどの程度成立するかを問題とする.

言い換えれば, 上の式を方程式とみると mp (p は m の素因子ではない素数) は明らかに解なのだが, 別の解が出て来る方が興味深いのでありがたい. mp は通常解と呼ばれる.

一般に, $a = mp$ を上記のような方程式で特徴付けることを, $a = mp$ 問題という.

5　数値例

$a = 2p$ 以外に $8 = 2^3 = 2 * 4$ が解として出てきた.

$a = 4p$ 以外に $32 = 2^5 = 4 * 8$ が解として出てきた.

表 4: $m = 2$;

a	factor
6	$2 * 3$
8	2^3
10	$2 * 5$
14	$2 * 7$
22	$2 * 11$
26	$2 * 13$

表 5: $m = 4$;

a	factor
12	$2^2 * 3$
20	$2^2 * 5$
28	$2^2 * 7$
32	2^5
44	$2^2 * 11$
52	$2^2 * 13$

6 オイラーの既約分数原理

補題 1 自然数 a, b, c, d について, $\dfrac{a}{b}$ は既約とし

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

が成り立つなら ある k があり, $c = ka, d = kb$.

Proof.

c, d についての最大公約数 k で分母, 分子を除すると既約分数になる. それは 既約分数 $\dfrac{a}{b}$ に等しい.

7 素数べきの場合

$m = q^{\varepsilon}$ (素数べき) のときは次の結果が成り立つ.

定理 1 $m = q^{\varepsilon}$ について, $m\sigma(a) = \sigma(m)a + m\sigma(m)$ が成り立つとする.
すると, $a = q^{\varepsilon}p(q \neq p:$ 素数) または $a = q^{2\varepsilon+1}$.

とくに, $m=q$ なら $a=qp$ または $a=q^3$ となる. ここで q^2 を擬素数と呼んでよい.

Proof.

$m=q^\varepsilon$ のとき $m\sigma(a)=\sigma(m)a+m\sigma(m)$ を変形して $m\sigma(a)=\sigma(m)(a+m)$.

これを分数で書く.

$$\frac{\sigma(a)}{a+m}=\frac{\sigma(m)}{m}.$$

さて $m=q^\varepsilon$ のとき $\sigma(m)=1+q+\cdots+q^\varepsilon$ なので, $\dfrac{\sigma(m)}{m}$ は既約分数.

そこである自然数 k によって,

$$\sigma(a)=k\sigma(m), a+m=km$$

と書くことができる.

$k_1=k-1$ とおくとき $a=k_1m, \sigma(a)=\sigma(m)+k_1\sigma(m)$.

1) k_1 が q で割れないなら

$1, q, \cdots, q^\varepsilon, k_1, k_1q, \cdots, k_1q^\varepsilon$ らは a の相異なる約数で $1+q+\cdots+q^\varepsilon)=\sigma(m)$.

$(1+k_1)(1+q+\cdots+q^\varepsilon)$ は a の約数の和の一部なので,

$$\sigma(a)=\sigma(k_1)\sigma(m)\geq(1+k_1)(1+q+\cdots+q^\varepsilon)=k\sigma(m).$$

$\sigma(a)=k\sigma(m)$ なので, 上の式で等号が成り立ち, $\sigma(k_1)=k=1+k_1$. ゆえに k_1 は q で割れない素数 p であって. $a=pm=q^\varepsilon p$.

これは通常解.

2) $k_1=q^\delta\alpha$. ここで α が q で割れないとする.

$a=mk_1=q^{\delta+\varepsilon}\alpha$ なので $\sigma(a)$ と $k\sigma(m)$ を計算する.

$\sigma(a)=\sigma(q^{\delta+\varepsilon})\sigma(\alpha)=\dfrac{\sigma(\alpha)(q^{\delta+\varepsilon+1}-1)}{\overline{q}}, k\sigma(m)=k\dfrac{(q^{\varepsilon+1}-1)}{\overline{q}}$ によって,

$\sigma(a)=k\sigma(m), k=k_1+1=q^\delta\alpha+1$ を使って

$$\frac{\sigma(\alpha)(q^{\delta+\varepsilon+1}-1)}{\overline{q}}=\frac{(q^\delta\alpha+1)(q^{\varepsilon+1}-1)}{\overline{q}}$$

分母を払って

$$\sigma(\alpha)(q^{\delta+\varepsilon+1}-1)=(q^\delta\alpha+1)(q^{\varepsilon+1}-1)$$

i) $\alpha=1$

$q^{\delta+\varepsilon+1}-1=(q^\delta+1)(q^{\varepsilon+1}-1)$ になるので展開して

$$q^\delta = q^{\varepsilon+1}$$

よって, $\delta = \varepsilon + 1$.

$k_1 = q^\delta = q^{\varepsilon+1}$ となりこれを擬素数, さらに $a = q^{2\varepsilon+1}$ を擬素数解という.

ii) $\alpha > 1$

$\sigma(\alpha) \geq \alpha + 1$ なので

$$\sigma(\alpha)(q^{\delta+\varepsilon+1} - 1) = (q^\delta\alpha + 1)(q^{\varepsilon+1} - 1) \geq (\alpha + 1)(q^{\delta+\varepsilon+1} - 1).$$

α についてまとめると

$$q^\delta(q^{\varepsilon+1} - 1)\alpha + q^{\varepsilon+1} - 1 \geq \alpha(q^{\delta+\varepsilon+1} - 1) + q^{\delta+\varepsilon+1} - 1.$$

$$(q^\delta(q^{\varepsilon+1} - 1) - q^{\delta+\varepsilon+1} + 1)\alpha \geq -q^{\varepsilon+1} + 1 + q^{\delta+\varepsilon+1} - 1.$$

これより $(-q^\delta + 1)\alpha \geq q^{\varepsilon+1}(q^\delta - 1) > q^\delta - 1 > 0$. 矛盾.

8　$m = rq$ の場合

m が素数べきの場合はできたから, 異なる素数の積　$m = rq$ の場合を考えた. $m = 6$, $m = 10$ 等である

表 6: $m = 6$;

a	factor
24	$2^3 * 3$
30	$2 * 3 * 5$
42	$2 * 3 * 7$
54	$2 * 3^3$
66	$2 * 3 * 11$
78	$2 * 3 * 13$
102	$2 * 3 * 17$

$a = 6p$ 以外に $a = 24 = 2^3 * 3 = 6 * 2^2$, $a = 54 = 2 * 3^3 = 6 * 3^2$ が解として出てきた.

$a = 10p$ 以外に $a = 40 = 2^3 * 5 = 10 * 2^2$, $a = 250 = 2 * 5^3 = 10 * 5^2$ が解として出てきた.

表 7: $m = 10$;

a	factor
30	$2*3*5$
40	2^3*5
70	$2*5*7$
110	$2*5*11$
130	$2*5*13$
170	$2*5*17$
190	$2*5*19$
230	$2*5*23$
250	$2*5^3$
290	$2*5*29$

9 $m = rq$ のときは未完成

$r < q$: 素数 とする.
$m = rq, A = (r+1)(q+1), \Delta = r + q$ とおくと, $A = m + \Delta + 1, \sigma(m) = A$.
$m\sigma(a) = \sigma(m)(a+m)$ により $m\sigma(a) = A(a+m)$.
$m(\sigma(a) - A) = Aa$ により

$$\frac{\sigma(a) - A}{a} = \frac{A}{m} = 1 + \frac{\Delta + 1}{m}$$

$r = 2$ のとき, $\frac{\Delta+1}{m} = \frac{3+q}{2q}$. $q = 1 + 2s$ と書くとき, $3 + q = 4 + 2s$. $\frac{3+q}{2q} = \frac{2+s}{1+2s}$.
$s = 1$ のとき, $q = 3, \frac{3+q}{2q} = 1$.
$s \geq 2$, すなわち, $q \geq 5$ なら, $\frac{3+q}{2q} = \frac{2+s}{1+2s}$ の右辺は既約分数.
よって, 自然数 k があって,

$$\sigma(a) - A = k(2+s), a = k(1+2s) = kq$$

$A = m + \Delta + 1 = 2q + 3 + q = 3(q+1)$.
$2k(2+s) = k(4+2s) = k(q+1)$ なので $2\sigma(a) = 2A + 2k(2+s) = 6(q+1) + k(q+1)$
ここで中断

9.1 $m = 6$

$m\sigma(a) = \sigma(m)(a+m)$ により $6\sigma(a) = 12(a+6)$ により
$\sigma(a) = 2(a+6)$ から分数すらでてこない.

表 8: $m = 15$;

a	factor
30	$2 * 3 * 5$
105	$3 * 5 * 7$
135	$3^3 * 5$
165	$3 * 5 * 11$
195	$3 * 5 * 13$
255	$3 * 5 * 17$
285	$3 * 5 * 19$
345	$3 * 5 * 23$
375	$3 * 5^3$

$a = 15p$ 以外に $a = 135 = 3^3 * 5$, $a = 375 = 3 * 5^3$ が解として出てきた.

表 9: $m = 30$;

a	factor
120	$2^3 * 3 * 5$
210	$2 * 3 * 5 * 7$
270	$2 * 3^3 * 5$
330	$2 * 3 * 5 * 11$
390	$2 * 3 * 5 * 13$
510	$2 * 3 * 5 * 17$
570	$2 * 3 * 5 * 19$
690	$2 * 3 * 5 * 23$
750	$2 * 3 * 5^3$
870	$2 * 3 * 5 * 29$
930	$2 * 3 * 5 * 31$
1110	$2 * 3 * 5 * 37$
1230	$2 * 3 * 5 * 41$

$a = 30p$ 以外に
$a = 120 = 2^3 * 3 * 5 = 30 * 2^2$, $a = 270 = 2 * 3^3 * 5$, $a = 750 = 2 * 3 * 5^3$
が解として出てきた.

表 10: $m = 105$;

a	factor
210	$2 * 3 * 5 * 7$
945	$3^3 * 5 * 7$
1155	$3 * 5 * 7 * 11$
1365	$3 * 5 * 7 * 13$
1785	$3 * 5 * 7 * 17$
1995	$3 * 5 * 7 * 19$
2415	$3 * 5 * 7 * 23$
2625	$3 * 5^3 * 7$
3045	$3 * 5 * 7 * 29$
3255	$3 * 5 * 7 * 31$
3885	$3 * 5 * 7 * 37$
4305	$3 * 5 * 7 * 41$
4515	$3 * 5 * 7 * 43$
4935	$3 * 5 * 7 * 47$
5145	$3 * 5 * 7^3$
5565	$3 * 5 * 7 * 53$

$a = 105p$ 以外の解を探してみよう.

表 11: $m = 56 = 2^3 * 7$;

a	factor
168	$2^3 * 3 * 7$
280	$2^3 * 5 * 7$
616	$2^3 * 7 * 11$
728	$2^3 * 7 * 13$
896	$2^7 * 7$
952	$2^3 * 7 * 17$
1064	$2^3 * 7 * 19$
1288	$2^3 * 7 * 23$
1624	$2^3 * 7 * 29$
1736	$2^3 * 7 * 31$
2072	$2^3 * 7 * 37$
2296	$2^3 * 7 * 41$
2408	$2^3 * 7 * 43$
2632	$2^3 * 7 * 47$
2744	$2^3 * 7^3$
2968	$2^3 * 7 * 53$

$a = 56p$ 以外の解を探してみよう.

10 擬素数

擬素数について一般論が少しある.

定理 2 m を素因数分解し $m = \prod_{j=1}^{s} p_j^{e_j}$, $m' = \prod_{j=2}^{s} p_j^{e_j}$ とおくとき $m = p_1^{e_1} m'$.
$A = m \cdot p_1^{e_1+1}$ は $m\sigma(a) = \sigma(m)a + m\sigma(m)$ の解.

Proof.
$A = m' \cdot p_1^{2e_1+1}$ と書き換えて $\sigma(A) = \dfrac{p_1^{2e_1+2} - 1}{\overline{p_1}}\sigma(m')$, $\sigma(m) = \dfrac{p_1^{e_1+1} - 1}{\overline{p_1}}\sigma(m')$
A が $m\sigma(A) = \sigma(m)A + m\sigma(m)$ を満たすことを確認する.

$$m\sigma(A) = \frac{p_1^{2e_1+2} - 1}{\overline{p_1}} m\sigma(m'), \sigma(m)A = \frac{p_1^{e_1+1} - 1}{\overline{p_1}} \cdot p_1^{e_1+1}\sigma(m')m$$

を用いて

$$
\begin{aligned}
& m\sigma(A) - \sigma(m)A \\
& = \frac{p_1^{2e_1+2}-1}{\overline{p_1}} m\sigma(m') - \frac{p_1^{e_1+1}-1}{\overline{p_1}}\sigma(m')m \cdot p_1^{e_1+1} \\
& = \frac{m\sigma(m')}{\overline{p_1}}((p_1^{2e_1+2}-1) - (p_1^{e_1+1}-1)p_1^{e_1+1}) \\
& = \frac{\sigma(m')m}{\overline{p_1}}(p_1^{e_1+1}-1) \\
& = \sigma(m')m\sigma(p_1^{e_1}) \\
& = m\sigma(m).
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$m\sigma(A) - \sigma(m)A = m\sigma(m)$$

擬素数解でなく, 通常解でもない解も出てくることがある. これをエイリアンの呼ぶこともある. $m = 6$ のとき, $a = 6p$ 問題の方程式は $\sigma(a) = 2a + 12$ であるがこの解をすべて求めることは極めて難しい.

表 12: $m = 6$; 6 で割れない解

a	factor
304	$2^4 * 19$
127744	$2^8 * 499$

表 13: $m = 30$; 30 で割れない解

a	factor
1520	$2^4 * 5 * 19$
638720	$2^8 * 5 * 499$

11　完全数との関係

$a = mp$ 問題の方程式 $m\sigma(a) = \sigma(m)a + m\sigma(m)$ の解は $6p$ がみな解なので平行移動:μ の完全数の理論での B 型解の発見と関連させることができる.

平行移動:μ の完全数の方程式 $\sigma(a) = 2a - \mu$ を m 倍してみる.

$$m\sigma(a) = 2ma - m\mu$$

$m\sigma(a) = \sigma(m)a + m\sigma(m)$ と各項が等しいとおく (なんと高校生のやる未定係数法).

$2m = \sigma(m), m\sigma(m) = -m\mu$ なので実際は $\sigma(m) = \mu = -\sigma(m)$.

$2m = \sigma(m)$ により m は完全数,

$\mu = -\sigma(m) = -2m$ によって次の結果をえる.

定理 3 m は完全数のとき $\sigma(a) = 2a + 2m$ は B 型解をもつ.

12 超完全数との関係

P を底の素数とし, 平行移動 μ の究極の完全数の方程式は

$$\overline{P}\sigma(a) = Pa + (P-2)q - \mu\overline{P}.$$

$q = Maxpp(a)$ とおいた.

$a = mp$ から得られた $\sigma(a) = \sigma(m)p + \sigma(m)$ を $\overline{P}$ 倍して

$$\overline{P}\sigma(a) = \overline{P}\sigma(m)p + \overline{P}\sigma(m)$$

と

$$\overline{P}\sigma(a) = Pa + (P-2)q - \mu\overline{P}.$$

を未定係数法で揃える. $a = mp, p = q$ となるので

$$\overline{P}\sigma(m)p + \overline{P}\sigma(m) = Pmp + (P-2)p - \mu\overline{P}.$$

$$p(\overline{P}\sigma(m) - (Pm + (P-2)) = -\overline{P}\sigma(m) = -\mu\overline{P}.$$

p は無数にあるので未定係数法で

$$\overline{P}\sigma(m) - Pm = (P-2), \mu = -\sigma(m).$$

$\overline{P}\sigma(m) - Pm = (P-2)$ は m が超完全数になることを意味する.

表 14: $P = 5, m = 0;$

a	factor	$\sigma(a)$
1950625	$5^4 * 3121$	2438282

表 15: $P = 7, m = 0;$

a	factor	$\sigma(a)$
301	$7 * 43$	352
16513	$7^2 * 337$	19266

表 16: $P = 11, m = 0;$

a	factor	$\sigma(a)$
159841	$11^2 * 1321$	175826

12.1 超完全数の計算

12.2 逆行, その 2

ここで話を逆行させる.

$\alpha = P^f r$ を超完全数とする.

$W = P^{f+1} - 1$ とおくと $r = W - P + 2$ は素数である. $\overline{P}\sigma(\alpha) = W(r+1)$ になる.

$m = -\sigma(\alpha)$ と m を定める.

$a = \alpha q, (q$ は α と互いに素な素数,$\alpha < q)$ に対して, $\overline{P}\sigma(a) = W(r+1)(q+1), Pa = (W+1)rq$ を使って

$$\begin{aligned}
\overline{P}\sigma(a) - Pa - (P-2)q &= W(r+1)(q+1) - (W+1)rq - (P-2)q \\
&= W(r+q+1) - rq - (P-2)q \\
&= q(W - r - P + 2) + W(r+1)
\end{aligned}$$

$W - r - P + 2 = 0$ によって,

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa - (P-2)q = W(r+1).$$

$-\overline{P}m = \overline{P}\sigma(\alpha) = W(r+1)$ なので

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa - (P-2)q = -m\overline{P}.$$

$m = -\sigma(\alpha)$ について方程式 $\overline{P}\sigma(a) - Pa - (P-2)q = -m\overline{P}$ の解 $a = \alpha q, (q$ は α と互いに素な素数) が得られた. これは B 型解である.

13　A 型解の探求

B 型解が出るように作った方程式

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}$$

についてその A 型解 a を探そう.

$m = -\sigma(\alpha)$ と m を定めていることを想い出し, 問題を整理しよう.

α を超完全数とするとき方程式

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa - (P-2)q = \sigma(\alpha)\overline{P}$$

の A 型解 a を探すのが目的である.

A 型解 $a = P^f Q$,$P < Q$: 素数, とする. $W = Q^{f+1} - 1$ と記号を使う.

$\overline{P}\sigma(a) - Pa = W(Q+1) - (W+1)Q = W - Q$ なので

$$W - Q - (P-2)Q = \sigma(\alpha)\overline{P}$$

によって,

$W - (P-1)Q = \sigma(\alpha)\overline{P}$ に注意し

$$Q = \frac{W}{\overline{P}} - \sigma(\alpha)$$

をえる.

超完全数 α に対して, f を動かして,$\frac{W}{\overline{P}} - \sigma(\alpha)$ が素数となる場合を探す. これを満たす 素数 Q があるなら $a = P^f Q$ が解となる.

13.1　計算の実行

wxmaxima のプログラムは次の通り.

```
ultimate_perfect_exp(P,m,aa,bb):= for e:aa thru bb
do(P1:P-1,q:(P^(e+1)-1)/P1+m,
if primep(q) then (a:P^e*q, print(e),display(factor(a))) else 1=1);
```

次に超完全数について得られた B 型解を与える方程式の A 型解 (正規形解)

1) $P = 3, a = 21 = 3*, \sigma(a) = 32$

表 17: $P = 3, m = 32;$

e	a	$\sigma(a)$
4	7209	$3^4 * 89$
6	773469	$3^6 * 1061$
32	X	$3^{32} * 2779530283277729$

$X = 5150525730438708503830635949089$

2) $a = 2133 = 3^3 * 79, \sigma(a) = 3200$

表 18: $P = 3, m = 3200;$

e	a	$\sigma(a)$
26	9691622825704768364831397	$3^{26} * 3812798739293$
34	Y	$3^{34} * 25015772549496653$

$Y = 417192584165486891565898881493557$

3)

表 19: $P = 7, m = 352;$

e	a	$\sigma(a)$
8	38769722160449	$7^8 * 6725249$
20	7427940054393837883188559853401649	$7^{20} * 93090977347213649$
28	Z	$7^{28} * 536650959302196621139249$

$Z = 246852216102829623577188930160338616415479562449$

14 超完全数, 正規形

表 20: $P = 3, m = 0; a = 3^e q$: 正規形

e	a	q
1	21	7
3	2133	79
4	19521	241
5	176661	727
8	129127041	19681
21	3282569673736163731221	31381059607
36	A	B
40	C	D

$A = 675851986348175229353311730303196 81$
$B = 450283905890997361$
$C = 44342648824303776992393429970103603520 1$
$D = 36472996377170786401$

14.1 平行移動した超完全数

定義 1 $r = P^{f+1} - P + 1 + m$ が素数のとき,$\alpha = P^f r$ を底が素数 P , 平行移動 : m の狭義の超完全数という.

次にこの方程式を求める. $W = P^{f+1} - 1$ とおく. 定義により $r = P^{f+1} - P + 1 + m = W - P + m + 2$.

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = \overline{P}\sigma(P^f r) = W(r+1) = Wr + W.$$

$Wr = (P^{f+1} - 1)r = P\alpha - r$ により

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = Wr + W = P\alpha - r + W.$$

$r = W - P + m + 2$ により $W - r = P - 2 - m$ なので次の方程式をえる:

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + P - 2 - m.$$

定義 2 $\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + P - 2 - m$ の解を底が素数 P , 平行移動 m の広義の超完全数という.

究極の完全数の場合と異なり $\mathrm{Maxp}(\alpha)$ が消えている点に注意したい.

15 超完全数の計算

15.0.1 $P=3, m=2$ のとき

表 21: $P=3, m=2$;

a	factor
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7
6561	3^8
19683	3^9
59049	3^{10}
177147	3^{11}

このとき方程式は $2\sigma(a)=3-1$ であり, 解は概完全数. C 型解ともいう.

$\overline{P}\sigma(a)=Pa-1$ の解は $a=P^e$ があり, この形でない解もあるがまとめて 概完全数という.

$P-2-m=-1$ のとき, $m=P-1$ ならば概完全数.

表 22: $P=5, m=4$;

a	factor	$\sigma(a)$
5	5	6
25	5^2	31
77	$7*11$	96
125	5^3	156
625	5^4	781
3125	5^5	3906

$a=77=7*11$ は素べきではない. これは珍獣と言ってよい.

表 23: $P = 3, m = 4;$

a	factor
5	5
33	$3 * 11$
261	$3^2 * 29$
385	$5 * 7 * 11$
897	$3 * 13 * 23$
2241	$3^3 * 83$
26937	$3^2 * 41 * 73$
46593	$3^2 * 31 * 167$

15.0.2 $P = 3, m = 4$ のとき

$a = 5$ (G 型解という) 以外は正規形 (A 型解), 第二正規形 (D 型解), オビ (E 型解) しかでてこない.

表 24: $P = 3, m = 4;$ 第二正規形

a	factor
897	$3 * 13 * 23$
46593	$3^2 * 31 * 167$
26937	$3^2 * 41 * 73$
19035755649	$3^5 * 733 * 106871$
6519443841	$3^5 * 743 * 36109$
43076441601	$3^6 * 2399 * 24631$

15.0.3 G 型解

p^e と書ける解を G 型解 という.

$e = 1$ のとき $m + 1$ が素数なら $p = m + 1$ は G 型解 の例になる.

15.0.4 $P=3, m=6$ のとき

表 25: $P=3, m=6$;

a	factor
7	7
39	$3*13$
279	3^2*31
178119	3^5*733

$p=m+1=7$ は素数.

表 26: $P=3, m=6$; 正規解

e	a	factor
1	39	$3*13$
2	279	3^2*31
5	178119	3^5*733
8	129166407	$3^8*19687$
9	1162340199	$3^9*59053$
21	328256967436378490439	$3^{21}*31381059613$
29	14130386091739009026274270599	$3^{29}*205891132094653$

15.0.5 $P=3, m=10$ のとき

第 2 正規形, すなわち D 型解がでてきた.

表 27: $P = 3, m = 10;$

a	factor
11	11
35	$5 * 7$
51	$3 * 17$
2403	$3^3 * 89$
20331	$3^4 * 251$
54723	$3 * 17 * 29 * 37$
68643	$3^2 * 29 * 263$
103683	$3 * 17 * 19 * 107$
5026563	$3^3 * 83 * 2243$
1060803	$3^3 * 101 * 389$

表 28: $P = 3, m = 10;$ 第二正規形

a	factor
867	$3 * 17 * 17$
68643	$3^2 * 29 * 263$
5026563	$3^3 * 83 * 2243$
1060803	$3^3 * 101 * 389$
193109562812680803	$3^9 * 59069 * 166093589$

15.0.6 $P = 3, m = 12$ のとき

表 29: $P = 3, m = 12;$

a	factor
13	13
57	$3 * 19$
333	$3^2 * 37$
15609	$3 * 11^2 * 43$
179577	$3^5 * 739$

表 30: $P = 3, m = 14;$

a	factor
25	5^2
20877183	$3^4 * 373 * 691$

表 31: $P = 3, m = 16;$

a	factor
17	17
69	$3 * 23$
369	$3^2 * 41$
1221	$3 * 11 * 37$
20817	$3^4 * 257$
149765	$5 * 7 * 11 * 389$
180549	$3^5 * 743$

表 32: $P = 3, m = 16;$ 第二正規形

a	factor
1221	$3 * 11 * 37$
133736311074501	$3^8 * 20071 * 1015571$
15634813920164915589	$3^{10} * 177167 * 1494504883$

表 33: $P = 3, m = 18;$

a	factor
19	19
387	$3^2 * 43$
2619	$3^3 * 97$

16　超完全数の正規形解

表 34: $P = 3, m = 0$; 正規形

e	a	factor
1	21	$3 * 7$
3	2133	$3^3 * 79$
4	19521	$3^4 * 241$
5	176661	$3^5 * 727$
8	129127041	$3^8 * 19681$
21	328256967373616371221	$3^{21} * 31381059607$
36	C	D
40	X	Y

C= 67585198634817522935331173030319681
$D = 3^{36} * 450283905890997361$
$X = 443426488243037769923934299701036035201$
$Y = 3^{40} * 36472996377170786401$

表 35: $P = 5, m = 0$; 正規形

e	a	factor
4	1950625	$5^4 * 3121$
6	1220640625	$5^6 * 78121$
14	186264514898681640625	$5^{14} * 30517578121$
46	A	B

$A = 100974195868289511092701256356196068963981815613806247711181640625$
$B = 5^{46} * 710542735760100185871124267578121$

$A = 256923577521058878087461989835952222835201$
$B = 7^{24} * 1341068619663964900801$
$C = 8538323413450849900970017031314236699825783181086873601$
$D = 7^{32} * 7730993719707444524137094401$

表 36: $P = 7, m = 0$; 正規形

e	a	factor
1	301	$7 * 43$
2	16513	$7^2 * 337$
5	1977225901	$7^5 * 117643$
8	232630479398401	$7^8 * 40353601$
20	445676403263631954214364481888960001	$7^{20} * 558545864083284001$
24	A	B
32	C	D

16.1 D 型解の式

超完全数の方程式 $\overline{P}\sigma(\alpha) = Pa = \alpha + P - 2 - m$ において D 型解の式を求める.

$\alpha P^e rq$, $(r+1)(q+1), B = rq, N = P^{e+1} - 1, \Delta = r + q$ とおくとき $\overline{P}\sigma(\alpha) = NA, P\alpha(N+1)B$ により

$$\overline{P}\sigma(\alpha) - Pa = \alpha - (P - 2 - m) = N(\Delta + 1) - B - (P - 2 - m) = 0.$$

したがって

$$B - N\Delta = N - (P - 2 - m).$$

$r_0 = r - N, q_0 = q - N, B_0 = r_0 q_0$ とおくとき $B_0 = r_0 q_0 = B - N\Delta + N^2$.

$B - N\Delta = B_0 - N^2$ を上の式に代入すると

$$B_0 - N^2 = N - (P - 2 - m).$$

$D = N(N+1) - (P - 2 - m)$ とおけば, $B_0 = D$.

ここで話が逆になり, 与えられた P, m, e について,$N = P^{e+1}, D = N(N+1) - (P - 2 - m)$ をまず求める.

16.2 例

$P = 3, e = 1, m = 0$ とおけば, $N = 3^2 - 1 = 8$.

$D = 72 + m + 2 - P = 72 - 1 = 71$

```
60 ?- hyper1(3,4,1,1).
w=8      75    [3,5^2] x*y=1*75          9=[3^2],83=[83]
61 ?- hyper1(3,4,1,3).
```

```
w=8       75    [3,5^2] x*y=3*25        11=[11],33=[3,11]
62 ?- hyper1(3,4,1,5).
w=8       75    [3,5^2] x*y=5*15        13=[13],23=[23]
63 ?- hyper1(3,4,1,15).
w=8       75    [3,5^2] x*y=15*5        23=[23],13=[13]
64 ?- hyper1(3,8,1,1).
w=8       79    [79]    x*y=1*79        9=[3^2],87=[3,29]
65 ?- hyper1(3,8,2,1).
w=26      709   [709]   x*y=1*709       27=[3^3],735=[3,5,7^2]
66 ?- hyper1(3,8,3,1).
w=80      6487  [13,499]        x*y=1*6487      81=[3^4],6567=[3,11,199]
```

17　D 型解がない証明

命題 1 $P = 3, m = 0$ のとき D 型解はない

Proof. $P = 3, m = 0$ のとき $N = 3^{e+1} - 1 \equiv -1 \bmod 3$ により $D = N(N+1) - 1 \equiv -1 \bmod 3$.

$B_0 = r_0 q_0 = D \equiv -1 \bmod 3$ なので $r_0 \equiv -1, q_0 \equiv 1 \bmod 3$ としてよい.

$$q = q_0 + N \equiv 1 - 1 = 0 \bmod 3$$

なので, $q = 3$. これは矛盾.

17.1　例

表 37: $P = 5, m = 4$; 第二正規形

a	factor
323673570678125	$5^5 * 15661 * 6613597$
5954678078370011328125	$5^8 * 1953613 * 7802966033$

表 38: $P = 5, m = 8$; 第二正規形

a	factor
7660225	$5^2 * 131 * 2339$
498498625	$5^3 * 701 * 5689$
206466625	$5^3 * 1009 * 1637$
236617620625	$5^4 * 3209 * 117977$
1082900677701787890625	$5^8 * 1955819 * 1417424483$

18　半素べき

C 型の解 (指数 e に関係なく素数べき P^e がすべて解になる場合) のあるときを考える. 究極の完全数の方程式

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}$$

の解に素べきの解 P^e があるとし, e は任意とする.

P^e を代入し, $N = P^{e+1} - 1$

$\overline{P}\sigma(a) - Pa = \overline{P}\sigma(P^e) - P^{e+1} = N - (N+1) = -1$ によれば $-1 = (P-2)P - m\overline{P}$.

これより

$$m\overline{P} = (P-2)P + 1 = \overline{P}^2.$$

よって, $m = \overline{P} = P - 1$.

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - \overline{P}^2.$$

この方程式は案外複雑だが P^e が解になる. 　P^e 　を素数のべき, 略して 素べきという.

この方程式で素べきにならない解を半素べきという. またこの方程式を半素べきの方程式という.

半素べきの方程式は $P = 2$ なら, $\sigma(a) - 2 - 1$ になる. この解は 2 べきになるという予想がある. しかし証明できていないので取りあえず, この解を概完全数 (almost perfect number) と呼ぶことがある.

18.1　半素べきの諸例

表 39: $P = 3, m = 2$; 半素べき

a	factor
19683	3^9
59049	3^{10}
99807	$3 * 17 * 19 * 103$
177147	3^{11}
531441	3^{12}
603681	$3 * 13 * 23 * 673$

$P = 3, m = 2$ の場合を wxmaxima で計算すると, 3^e が出るのは予想通りだが, 意外にも見慣れないメンツが 2 個出た.

$99807 = 3 * 17 * 19 * 103$, $603681 = 3 * 13 * 23 * 673$
これらは 3 のべきの仲間なので半素べき (semi prime power) というのである.
$a < 10^6$ の範囲では $P = 5, 7, 13, 19, 23$ のときは素べきの解しかでて来ない.

表 40: $P = 11, m = 10$; 半素べき

a	factor
1331	11^3
8303	$19^2 * 23$
14641	11^4
161051	11^5

しかし $P = 11$ のとき半素べきの解 $8303 = 19^2 * 23$ がでてきた.
半素べきの解はどの程度あるか. これは難しい問題であろう.