曲線は見える図形として研究されたが，数学では目には見えない曲線の本質を究明する．

1．楕円，放物線，双曲線

曲線の理論は実に古く，古代ヘレニズムの頃にその淵源が認められる．

楕円，放物線，双曲線が円錐の切断として表れるというアポロニウスの理論．

円錐は，2次式 $x^2+y^2=z^2$ でかける．

これを平面で切断したときの図形を式で表すため $ax+by+cz=d$ と連立させて解き．z を消去すると x,y について2次の方程式をえる．

$$ax^2+2hxy+by^2+2ex+2fy+c=0$$

これが2次曲線 (conic)

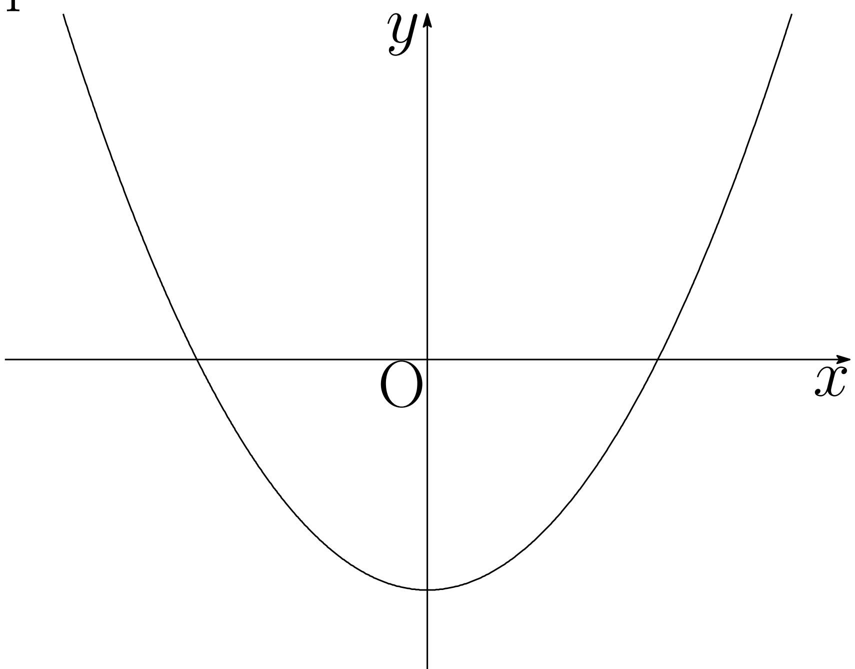
固有2次曲線を合同変換で標準化すると楕円，放物線，双曲線になる.

合同変換の式による定義

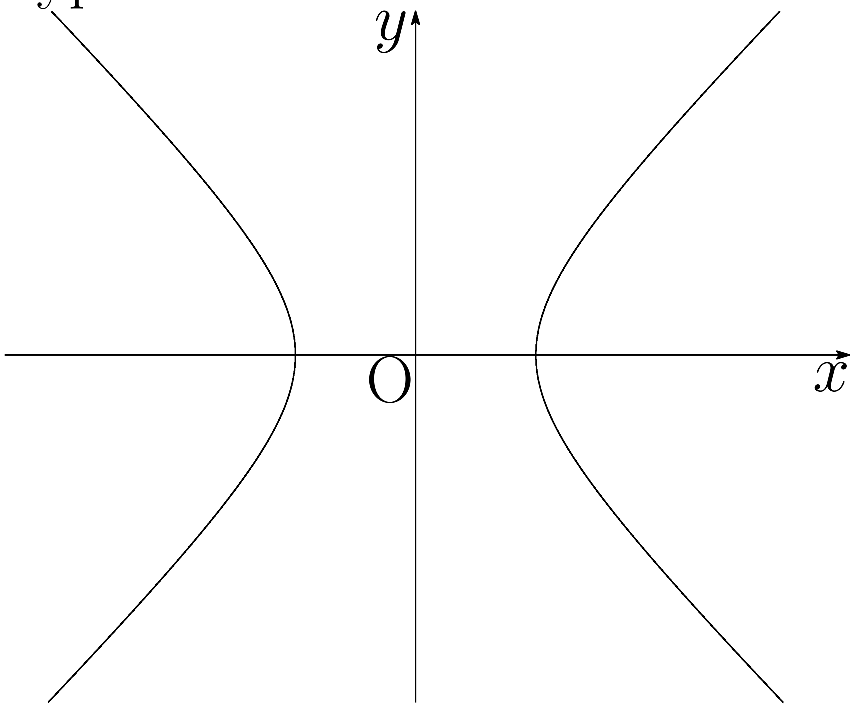
- $x' = ax + by + p$,
- $y' = cx + dy + q$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, A :直交行列.

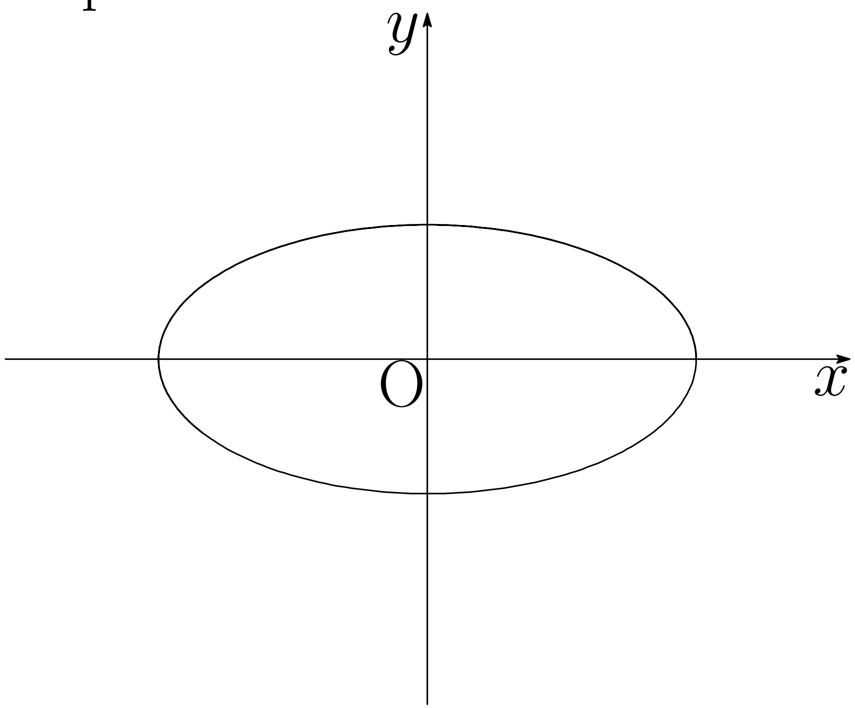
parabola



hyperbola



ellipse



1.1. **虚円.** 定義からすれば $x^2+y^2=-1$ なども2次曲線として考えることになる.

これを図でかけば何も見えない. しかし, 式はあるからこれを虚円ということがある.

虚円を避けるために,実数だけでなく虚数をもいれて複素数の対を点の座標と考える.

すると、円ですら 4次元の中の2次の連立方程式で定義された曲面になり一見してわけがわからなくなるが,代数的取り扱いはやりやすくなる.

2. 射影曲線

円錐曲線は3種類に分類されるが，実は1つのものが見かけ上3種類に分かれて見えるだけだという説がある．

これが射影幾何学の立場である（ポンスレ）．

射影幾何では平行線が存在しないなどのことがあり直観的な理解は難しい．

射影座標をいれて計算した方が誤りが無く分かりやすい．平面座標 (x, y) に対して射影（同次ともいう）座標 x_0, x_1, x_2 を 次の関係式で

$$x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0},$$

を導入する．

放物線 $y=x^2$ は射影座標に移ると $x_2x_0=x_1^2$ となる.
これは放物線を射影曲線とみた形である.
適切に射影座標変換すると
${x_0}^2=x_1^2+x_2^2$ となり，これは円を射影化してみたもの.
射影座標での1次変換を射影（1次）変換という.
射影変換を普通の座標で書くと分母が共通.

- $x'=\frac{ax+by+p}{a''x+b''y+p''}$,
- $y'=\frac{a'x+b'y+p'}{a''x+b''y+p''}$

$$A=\begin{pmatrix} a & b & p \\ a' & b' & p' \\ a'' & b'' & p'' \end{pmatrix}$$

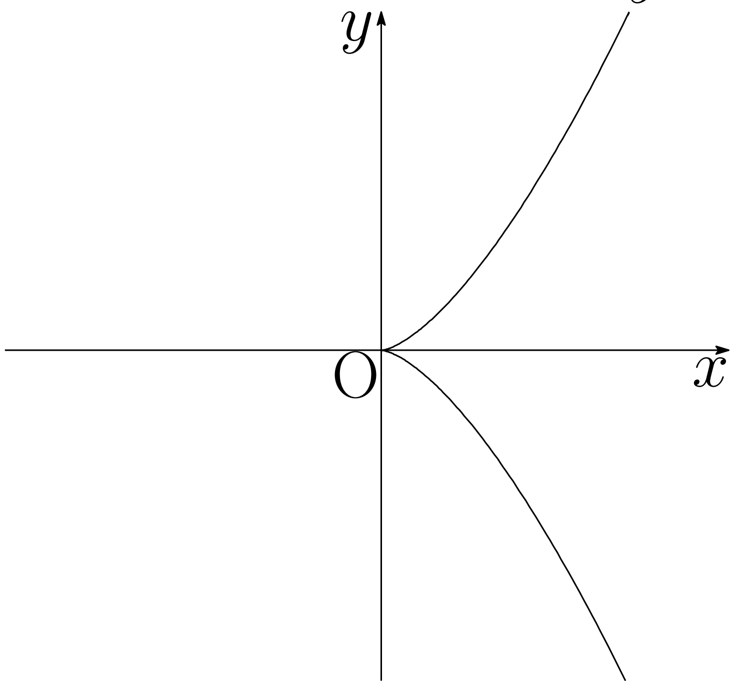
, A :複素正則行列.

3. 3次曲線

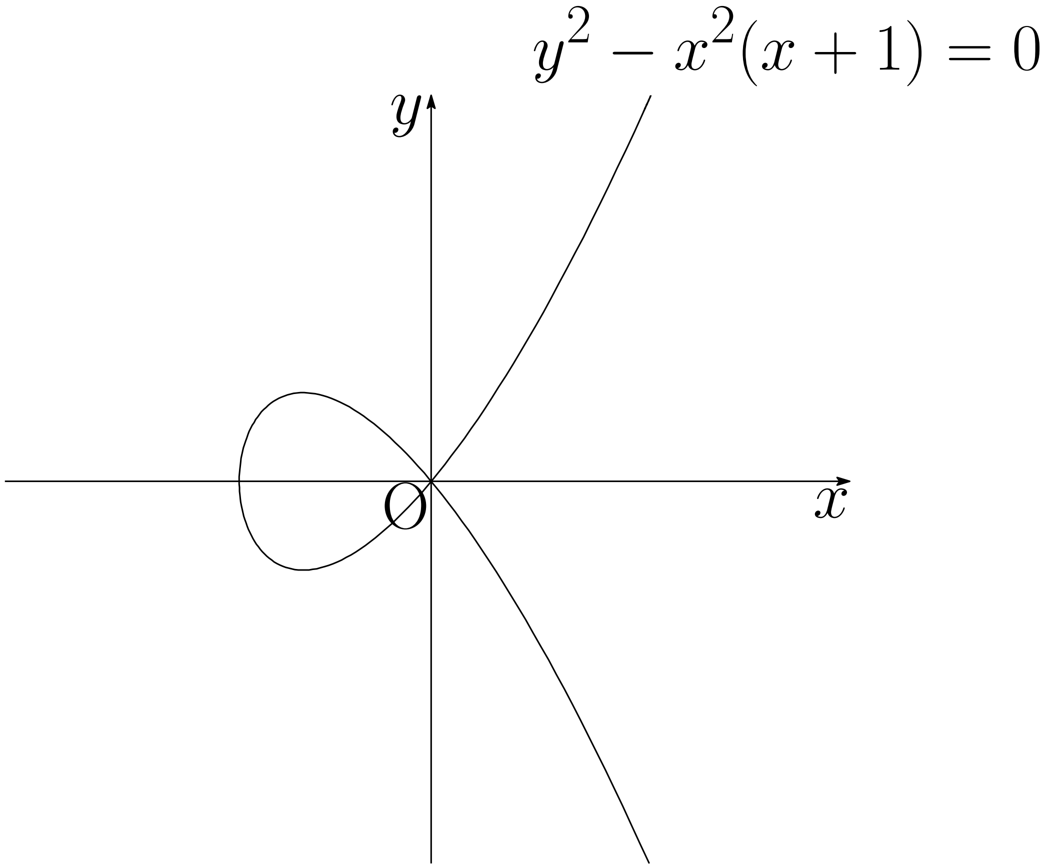
3次曲線は複素数係数の射影変換で次の3種類のいずれかに変換される．

cuspidal cubic

$$y^2 - x^3 = 0$$

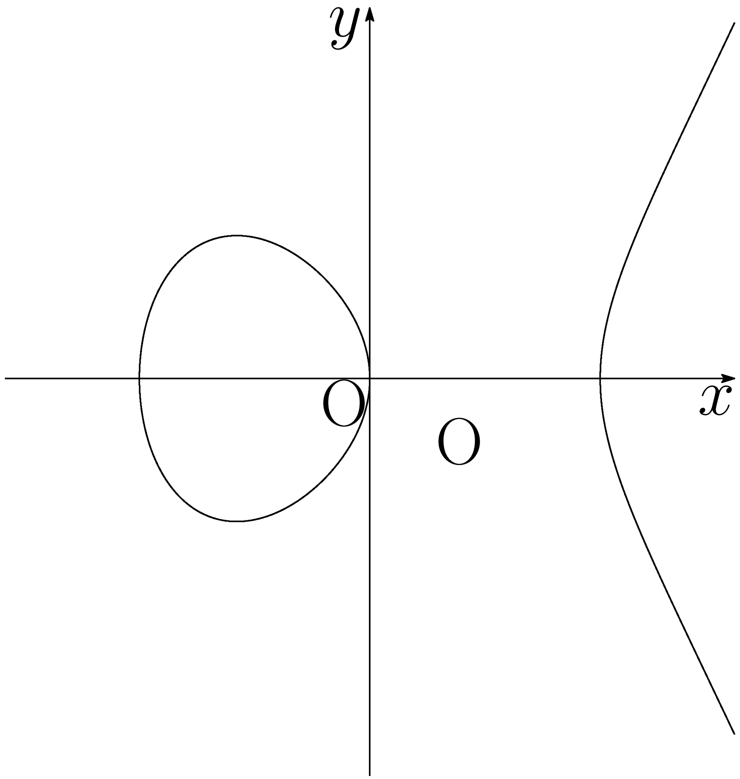


nodal cubic



non-singular elliptic

$$y^2 - x(x-1)(x+\lambda) = 0, \lambda \neq 0, -1$$



4. 代数曲線

2変数多項式の零点として表される曲線は代数曲線とよばれ，多項式の次数をその曲線の次数という．

幾何学的に考えると，次数は一般な直線との交点の数になる．

5. 有理曲線

有理式で媒介変数表示できる曲線を**有理曲線**という．これが最も簡単な曲線なのである．

与えられた曲線が有理曲線かどうかを判定する簡便な方法があることが望まれる．

曲線には**種数**と呼ばれる不変量があり，それが0なら有理曲線ということが分かるのである．

6. 種数

種数の概念は，不定積分 $\int f(x,y)dx$ の積分記号を取り去ってできた微分 $f(x,y)dx$ という概念を用いて定義される．

種数は一次独立な正則微分の個数として定義されるのである．

微分の定義のためには，曲線の特異点を双有理変換して解消することが必要になる．

これは必然的に曲線を多様体として捉えることになるが，それを初めて自覚したのはリーマンである．

代数曲線を多様体と見るときリーマン面ともいう．

7. 双有理変換; クレモナ変換

射影変換をさらに一般にした双有理変換がある. とくに射影平面での双有理変換を**クレモナ変換**という.

たとえば次の2次式の変換

- $x' = x,$
- $y' = y + x^2$

は逆に解けて

- $x = x',$
- $y = y' - x'^2$

となる.

放物線 $y = -x^2$ は上のような双有理変換を行うと

直線 $y' = 0$ になる.次数は変わるが曲線のより本格的な性質は変わらないと考える.

一般には有理式 $P(x,y), Q(x,y)$ があり

- $x' = P(x,y)$,
- $y' = Q(x,y)$

とかけるとき有理変換といいさらに逆にも解けて有理変換になるときとくに**クレモナ変換**というのである.

7.1. **4次曲線.** 4次曲線をクレモナ変換で分類すると次の4種になる. g を種数, κ を4次曲線の対としての **小平次元**とする,

- $g=3$, すると$\kappa=2$.
- $g=2$, すると$\kappa=1$.
- $g=1$, すると$\kappa=0$. クレモナ変換で非特異3次曲線になる
- $g=0$, すると$\kappa=-\infty$. クレモナ変換で直線になる

5次以上の曲線もクレモナ変換で分類できるが,複雑になるが対としての小平次元 κ では $2,1,0,-\infty$ のいずれかになるので4種にわけることは可能である.

3次曲線もクレモナ変換で分類ですると$\kappa=0,-\infty$ のいずれかしかおきない.

8. 平面代数曲線の双有理幾何

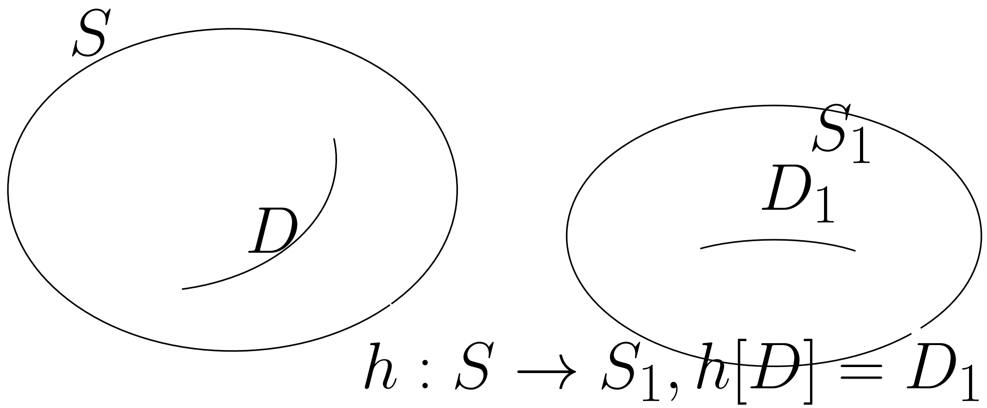


FIGURE 1. 双有理同値

一般に非特異射影有理代数曲面 S とその の上の代数曲線 C をとる.

S と C を合わせて対 (S, C) を考えこれを双有理変換を通して研究するのが課題である.

(S, C) と (S_1, C_1) は双有理変換 $h : S \to S_1$ で固有変換 $h[C]$ が C_1 になるものがあれば対として双有理同値と呼ばれる.

C が非特異曲線のとき D と書く.

S は非特異有理曲面, D はその上の非特異代数曲線とし, 対 (S, D) の双有理幾何を考える.

これをクレモナ幾何(Cremonian geometry)という.

対 (S, D) に対して 整数 $m \geq a > 0$ に対して混合多種数 (mixed plurigenera) $P_{ma}[D] = \dim|mK_S + aD| + 1$ を考えるとこれ は対として双有理不変になる.

とくに $P_{m,m}[D]$ は開代数曲面 $S - D$ の対数的 m 種数 $\overline{P_m}(S - D)$.

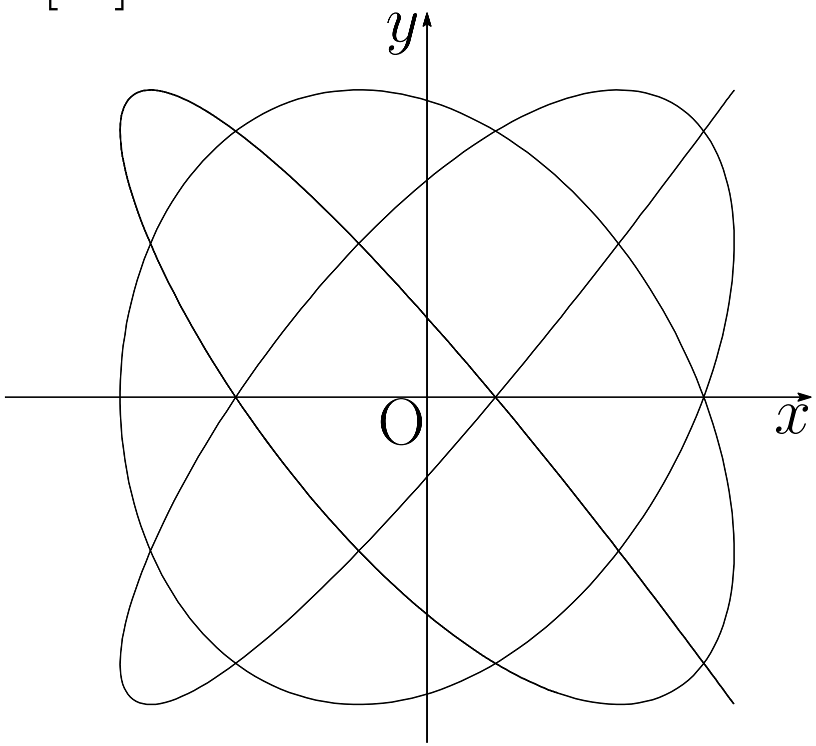
対の小平次元 $\kappa[D] = \overline{\kappa}(S - D)$ により定める.

したがって $\kappa[D] = \kappa(S, Z)$. ここで $Z = K_S + D$.

S は有理曲面なので $P_{1,1}[D] = g(D)$.

ここで $g(D)$ は代数曲線 D の種数.

$\kappa[D] = 2$ を仮定.



($x = \cos(6t), y = \cos(7t)$) は7次平面曲線で2重点を15個持っている.

対の小平次元が2で有理曲線になる中でもっとも簡単.

(S,D) が相対的極小モデルなら極小モデルとなる.
極小モデル (S,D) の構造を調べれば良い
(S,D) は極小モデルとする.

$\sigma \geq 7$ のときコホモロジーの消滅定理により
- $P_{2,1}[D] = Z^2 - \overline{g} + 1 = A + 1.$
- $P_{3,1}[D] = 3A - \alpha + 1 = \Omega - \omega + 1.$

$\overline{g} = g - 1, A = Z^2 - \overline{g}; \alpha = 4\overline{g} - D^2,$
$\Omega = (3Z - 2D) \cdot Z = 3Z^2 - 4\overline{g}.$ そして $\omega = 3\overline{g} - D^2.$

9. $\#-$ 極小性

　極小対 (S,D) は,S が射影平面でないとき,
　Hirzebruch 曲面 Σ_B の $\#-$ 極小対 (Σ_B, C) からその最短非特異化として得られる
　（対の 極小モデルの構成定理）.
　極小モデルの研究には特異点のある $\#-$ 極小対 (Σ_B, C) を調べればよい.
　Hirzebruch 曲面 Σ_B は $\boldsymbol{P}^1$ 上の $\boldsymbol{P}^1$ 束であり,その無限遠切断 Δ_∞ の自己交点数から $B=-\Delta_\infty^2$ が決まる.

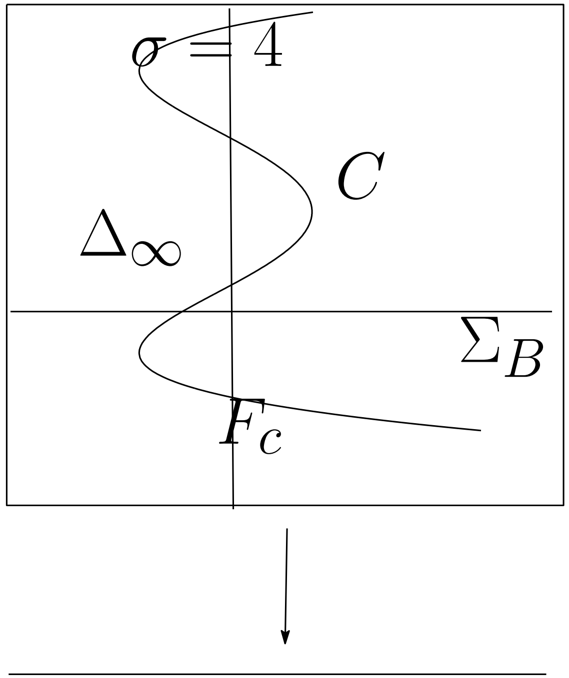


FIGURE 2. 双有理同值

Σ_B の上の因子全体をアーベル群とみて線形同値で分類すると Δ_∞, F_c によって生成される.

$C \sim \sigma\Delta_\infty + eF_c$ で(次数にあたる)不変数 σ, e を定める. σ は C から $\boldsymbol{P}^1$ への被覆次数で e は総次数にあたる.

C の特異点を,無限に近い特異点を含め,重複度を大きい方から順に $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_r$.

(Σ_B, C) のタイプを $[\sigma * e, B; \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_r]$.

(Σ_B, C) の $\#-$ 極小性の条件は次の通り:

(1) $\sigma = p + 2\nu_1, p \geq 0,\ \nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots \geq \nu_r \geq 2,$

(2) $B = 0$ なら $e = u + \sigma,\ u \geq 0;\ B = 1$ なら $e = u + \sigma + \nu_1,$
$u \geq 0;\ B \geq 2$ なら $e = u + B\sigma,\ u \geq 0.$

(3) $B = 1, \nu_1 = 0$ なら $u \geq 2.$

$\#-$ 極小性の条件はlog 対 $(\Sigma_B, \frac{1}{\nu_1}C)$ に関して Σ_B の標準因子を K_0 とおくとき$K_0 + \frac{C}{\nu_1}$ は nef,かつ $\kappa(\Sigma_B, K_0 + \frac{C}{\nu_1}) \geq 0$ となることと言って良い.

対の 極小モデルの構成定理を示すには,3種の基本変換を与えられた曲線対(Σ_B, C) について繰り返し用いて$\#-$ 極小に導く

$\#-$ 極小にできないことがあり,その場合は$(\boldsymbol{P}^2, L)$, L : 直線, と双有理同値になる.

$\#-$ 極小なら$K_0 + \frac{C}{\nu_1}$ は nef なので混合多種数に正になるものが必ずある.

混合多種数 $P_{j,1}[D] = 0($ すべての $j > 1)$ となる有理曲線 D は$(\boldsymbol{P}^2, L)$, L : 直線, と双有理同値になる(1928年, Coolidge)

　このようなフレームワークの中でCoolidge の定理の本質が初めて理解できる.

　$\kappa[D] < 2$ のときの構造定理

(1) $\kappa[D] = -\infty$ ならタイプは [1;1] (直線)

(2) $\kappa[D] = 0$ ならタイプは$[3;1]$ (楕円曲線) または $[4*4;2^9]$ (直線)

(3) $\kappa[D] = 1$ ならタイプは$[2*e;1]$(超楕円曲線) または $[3m;m^9](m > 1), [3m;m^9,2](m > 2)$.

　$\kappa[D] = 2$ のときを調べれば良い.

　代数曲面の場合と類似の対の 極小モデル理論ができることがわかったので酒井先生に依頼して新しいジャーナルSaitama Math J. の第 1 巻に載せていただいた.

10. 3世代に分類

双有理不変数を3世代に分けて分類.

TABLE 1. 双有理不変数の分類

1st generation	$d, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_r, \sigma, (e, B)$
	$k = (4 - \delta_{B,1})p + 2u, \tilde{k} = p(k - 2p)$
2nd generation	$g =$genus(Riemann),
3rd generation	4つの不変数 $\alpha, \omega, A, \Omega$
	$P_{2,1}[D]$(Coolidge,1928), $P_{3,1}[D], P_{m,a}[D],$

$$\alpha = (D + 2K) \cdot D, \omega = \frac{(D + 3K) \cdot D}{2}, A = \frac{(D + 2K) \cdot Z}{2},$$

$$\Omega = (D + 3K) \cdot Z$$

$Z = D + K_S, K_S$: 標準因子

Note リーマンの種数

$$g - 1 = \frac{(D+K)\cdot D}{2} = \frac{Z \cdot D}{2}.$$

ドグマ (dogmatic opinion)

第3世代不変数は第1世代不変数と第2世代不変数を決定する

ドグマだから証明はできない,

当面の基本的課題になる(簡単のため $\sigma \geq 7, \nu_1 \geq 3$ を仮定する).

基本問題

(1) 与えられた第3世代不変数を持つタイプを数え上げる.
(2) 第3世代不変数と第1世代不変数の関係.
(3) 第3世代不変数と第2世代不変数の関係.
(4) 第3世代不変数と第3世代不変数の関係.

問題を具体化する.

(1) 第1不等式 $\sigma \leq (\alpha+3)(\alpha+2)$ (O.Matsuda が示した).

(2) 第1不等式 $\sigma \leq (\omega+1)(\omega+2)$．等号が成り立たない場合(ごくわずかの例外を除くと)第2不等式$\sigma \leq \omega^2+\omega+2$.

(3) 2変数第1不等式 $\sigma \leq \omega_1^2+\omega_1+2+2\overline{g}$(1122不等式)．等号が成り立たない場合:2変数第2不等式が成り立つ場合は嘉数弥氏が証明. $\omega_1 = \omega - \overline{g}$.

(4) ω, g, e について2変数第1不等式,2変数第2不等式を与えることはまだ.

11. 第 2 不等式の例

$\sigma \geq 7$ とする .

Theorem 1. (1) $\sigma \leq (\omega+1)(\omega+2)$.

(2) $\sigma = (\omega+1)(\omega+2)$ ならば,タイプは $[2\nu_1 * 2\nu_1; \nu_1^7, \nu_1 - 1, \nu_r]$,
ここで $\nu_1 = \frac{\nu_r(\nu_r-1)}{2}$ かつ $\omega = \nu_r - 2$.

(3) $\sigma < (\omega+1)(\omega+2)$ ならば$\sigma \leq \omega(\omega+1)+2$ ただし次が例外;

(a) $(\omega = 2)$, $[10 * 11; 5^9]$;

(b) $(\omega = 3)$, $[15 * 22, 1; 7^9]$ かつ $[16 * 16; 8^6, 7^2, 6]$;

(4) $\sigma < \omega(\omega+1)+2$ ならば $\sigma \leq \omega(\omega-1)+4$ ただし次が例外;

(a) $(\omega = 3, g = 1)$, $[12 * 12; 6^6, 5]$;

(b) $(\omega = 4, g = 1)$, $[18 * 18; 9^7, 7, 6]$;

(c) $(\omega = 4, g = 0)$, $[19 * 19; 9^9]$;

(d) $(\omega = 4g = 0)$, $[20 * 20; 10^5, 9^3, 8]$.

(5) $\sigma < (\alpha+3)(\alpha+2)$ ならば $\sigma \le \alpha(\alpha+1)+2$, ここで次が例外;

(a) ($\alpha = 1$), $[10 * 11; 5^9]$;

(b) ($\alpha = 2$), $[15 * 22, 1; 7^9]$, $[16 * 16; 8^6, 7^2, 6]$;

(c) ($\alpha = 3$), $[19 * 19; 9^9]$, $[19 * 38, 2; 9^9]$, $[20 * 20; 10^5, 9^3, 8]$, $[22 * 22; 11^6, 10^2, 7]$, $[22 * 22; 11^7, 8^2]$;

(d) ($\alpha = 4$), $[23 * 35, 1; 11^9]$, $[24 * 24; 12^4, 11^4, 10]$, $[24 * 25; 12^7, 10^2]$, $[25*37, 1; 12^8, 9]$, $[28*29; 14^8, 8]$, $[30*30; 15^7, 13, 8]$;

(e) ($\alpha = 5$), $[36 * 37; 18^8, 9]$, $[38 * 38; 19^7, 17, 9]$;

(f) ($\alpha = 6$), $[46 * 46; 23^6, 22^2, 10]$.

ω,σ について 第一不等式,第二不等式および 2変数第一不等式とがえられ,これをきっかけに第3世代不変数の研究が一気に進んだ.

A,σ についても同様の不等式が成り立つ.

(1) 第1不等式 $\sigma \leq (A+3)(A+2)$ はある,第2不等式 $\sigma \leq A^2+3A+6$ はまだ.

(2) A,g,σ について第1不等式 $\sigma \leq A_1^2+2\overline{g}+3A_1+4$(1234不等式) はある.

(3) A,g,e について第1不等式,第2不等式を与えることもできていない.

$B \leq 2$ として $\varepsilon_B = 1 + \frac{B}{2}$ とおく.

Theorem 3. $\sigma \geq 7, \nu_1 \geq 3$ のとき

$$e \leq \varepsilon_B \cdot (\omega + 1)(\omega + 2), \tag{1}$$

$$e \leq \varepsilon_B \cdot (A + 3)(A + 2). \tag{2}$$

第3世代不変数ω または A を与えると e が抑えられ#−極小対のタイプが有限個しかない.

第3世代不変数の優越性という.

σ の2次評価式$\sigma \leq (\omega + 1)(\omega + 2)$ よりも e が抑えられるので一日の長がある.

e を抑えるためだけならp と u の評価をすればよい. そのためには ω により k の評価をしても良いのである.

これらにより第３世代の不変数を与えた場合のタイプの決定ができる

これらの不等式によって,与えられた小さい数を不変数に持つタイプを決定された.

- α に対して松田修
- ω に対して, iitaka
- $Z^2, A, P_{2,1}, P_{3,1},$ に対して, 簗場広子,臼田進,岡田直也,田中信也,
- $P_{4,1}, P_{5,1},$ に対して, iitaka,森山翔

ここで
$X=\sum_{j=1}^{r}\nu_j^2, Y=\sum_{j=1}^{r}\nu_j, \widetilde{\mathcal{Z}}=\nu_1 Y-X.$

Proposition 1. $B\leq 2$ のとき

- $X=8\nu_1^2+2k\nu_1+\tilde{k}+\omega_1-2\overline{g},$
- $Y=8\nu_1+k+\omega_1.$

$\tilde{k}=kp-2p^2, \omega_1=\omega-\overline{g}.$

12. k の ω による評価

以下, $\sigma \geq 7$, $\nu_1 \geq 3$ とする.
$B \geq 3$ のとき $\omega - k \geq \sigma - 1$.
$\omega + 1 \geq \sigma + k$ となるので
第一世代不変数の和 $\sigma + k$ をω により評価している.
$\sigma \geq 7$ を仮定しているので $\omega - k \geq 6$.
$\omega - k < 7$ の場合を調べるには$B \leq 2$ と仮定して良い.

Proposition 2.

- $k \leq \omega$,
- $g > 0$ なら $k \leq \omega - 1$.

12.1. $\omega - k = 0$ **の場合.**

$\omega - k = 0$ と仮定する $g = 0$ が成り立ち, そのタイプは:

- I) $p = 0$ ならタイプは $[10 * 11; 5^9]$. $k = 2$.
- II) $p = 1$, なら
  1) $[(15+8u)*(22+13u), 1; (7+4u)^9]$, $(k = 3, 5, 7, 9, \cdots)$
  2) $[(19+8u)*(19+9u); (9+4u)^9]$, ここで $u \geq 0.(k = 4, 6, 8, 10, \cdots)$
- III) $p > 1$ なら $p = 2$ となりタイプは $[28 * 41, 1; 13^9]$. $\omega = k = 6$.

この結果は意外なほどきれいなものである.

パラメータをもつ主系列と離散的タイプが2つある点で興味深い.

12.2. $\omega = k + 1$ の場合.

$i = \omega - k = 1$ のときタイプ決定を試みる.

II.

(1) $[(9+4u)*(13+7u), 1; (4+2u)^{10}]$. ここで $\omega = 4+2u, g = 0$
, $k = 3+2u$.

(2) $[(11+4u)*(11+5u); (5+2u)^{10}]$. ここで $\omega = 5+2u, g = 0$
および $k = 4+2u$.

ここで, $p = 1; \omega = k{-}1 = 4, 6, 8, 10, \cdots, 5, 7, 9, 11, \cdots, 7, 25, 26, 33, \cdots$.

13. Hartshorne の等式

$2D+\sigma K_S$ と D または Z との交点数の評価から有用な不等式が得られる.

Hartshorne の等式

$\sigma \geq 7, \nu_1 \geq 3$ を仮定する.

$\tilde{\theta}_2 = (2C+\sigma K_0)\cdot C$ とおくと

$(2D+\sigma K_S)\cdot D = 2\sigma\overline{g} - (\sigma-2)D^2$ により

$$(\sigma-2)\omega - (\sigma-6)\overline{g} = \tilde{\Theta}_2. \tag{3}$$

$$\tilde{\Theta}_2 = \tilde{\theta}_2 + pY + 2\widetilde{\mathcal{Z}}.$$

Dear Shigeru-san,

Nice to hear from you.

I have retired from teaching, but still do mathematics and travel to conferences.

I am curious about "Hartshorne's identities".

Can you point me to which paper they are in, on what page?

i found many papers on your website.

With best wishes,

Robin Hartshorne

- $B \neq 1$ または $B = 1$ で $2e - 3\sigma \geq 0$ のとき $\mathrm{RH}_{(+)}$ 型[1]という.
- $B = 1$ で $2e - 3\sigma < 0$ のとき $\mathrm{RH}_{(-)}$ 型という.

$\mathrm{RH}_{(+)}$ 型ならば $\tilde{\theta}_2 \geq 0$.

実際, $B = 1$ のとき $\widetilde{B} - 2\sigma = 2e - 3\sigma$ なので$2e - 3\sigma \geq 0$ なら $\tilde{\theta}_2 \geq 0$.

$\mathrm{RH}_{(-)}$ 型 のときは $L = -(2e - 3\sigma) > 0$ とおくと

$\tilde{\theta}_3 = (3C + eK_0) \cdot C$ は$\tilde{\theta}_3 = L(u + \nu_1) \geq 3L > 0$.

(4) $$(e-3)\omega - (e-9)\overline{g} = 2e\overline{g} - (e-3)D^2 = \tilde{\Theta}_3.$$

$$\tilde{\Theta}_3 = \tilde{\theta}_3 + (p+u)Y + 3\widetilde{\mathcal{Z}}.$$

D の代わりに Z を使うと $(2D+\sigma K_S)\cdot Z = \sigma Z^2 - 2\overline{g}(\sigma-2)$ となり ${\theta_2}^* = (2C + \sigma K_0) \cdot Z_0$. とおけば

(5) $\quad \sigma A - (\sigma - 4)\overline{g} = \sigma Z^2 - 2(\sigma - 2)\overline{g} = {\theta_2}^* + p\overline{Y} + 2\mathcal{Z}^*.$

$\overline{\nu_j} = \nu_j - 1$ とおいて次の式を導入した.

$\overline{X} = \sum_{j=1}^r \overline{\nu_j}^2, \overline{Y} = \sum_{j=1}^r \overline{\nu_j}, \widetilde{\mathcal{Z}} = \overline{\nu_1}\overline{Y} - \overline{X}.$

$\mathrm{RH}_{(+)}$ 型ならば ${\theta_2}^* \geq 0$.

$\mathrm{RH}_{(-)}$ 型 のときは $L = -(2e - 3\sigma) > 0$ とおくと$\theta_3{}^* = L(e - \sigma - 1) = L(u + \nu_1 - 1) > 0$ となり

(6) $eA - (e-6)\overline{g} = eZ^2 - 2(e-3)\overline{g} = \theta_3{}^* + (p+u)\overline{Y} + 3\mathcal{Z}^*.$

(1),(2),(3),(4) を **Hartshorne** の等式ということにした.

14. g の評価

$\sigma \geq 8, \nu_1 \geq 3$; または $e \geq 12, \nu_1 \geq 3$ の下に議論する.
$\mathrm{RH}_{(+)}$ 型 ならば
$(\sigma-2)\omega-(\sigma-6)\overline{g} \geq 0$ により

$$3\omega-\overline{g} \geq \frac{\sigma-2}{\sigma-6}\omega-\overline{g} \geq 0.$$

$3\omega-\overline{g} \geq 0.$
$3\omega-\overline{g}=0$ のとき,

$$0=\tilde{\Theta}_2=\tilde{\theta}_2+pY+2\widetilde{\mathcal{Z}}.$$

$pY=2\widetilde{\mathcal{Z}}=0$ により $p=0, \nu_1=\nu_r$. 等重複的.
$\tilde{\theta}_2=0$ により $u=0;, k=0.$
$\frac{\sigma-2}{\sigma-6}=3$ により $\sigma=8, \sigma=2\nu_1.$
したがって タイプは $[8*8;4^r]^*$.
$g=49-6r$ なので $r \leq 7$. 7個ある.

$\mathrm{RH}_{(-)}$ 型 ならば

$$3\omega - \overline{g} \geq \frac{e-3}{e-9}\omega - \overline{g} \geq 0.$$

多くの評価が得られた．一部を書く．

(1) ω が偶数のとき． $\overline{g} \leq 3\omega$． 等号成立ならタイプは $[8 * 8; 4^r]^*, 1 \leq r \leq 7$.

(2) $\overline{g} < 3\omega$ なら $\overline{g} \leq 3\omega - 3$. 等号成立時 $[8 * 8; 4^r, 3]^*, 0 \leq r \leq 7$.

(3) $\overline{g} < 3\omega - 3$ なら $\overline{g} \leq 3\omega - 5$.

(4) ω が奇数のとき. $\overline{g} \leq 3\omega - 4$.等号成立時 $[8 * 8; 4^r, 2]^*, 1 \leq r \leq 7$.

15. g の ω による評価

$\sigma \geq 8, \nu_1 \geq 3$; または $e \geq 12, \nu_1 \geq 3$.

$F_4 = 3\omega - \overline{g}$ とおくとき,

$$F_4 = \frac{1}{2}(3(D+3K_S)\cdot D - (D+K_S)\cdot D) = (D+4K_S)\cdot D$$

さらに

(1) ω が偶数. $F_4 \geq 0$. $F_4 = 0$ なら $[8*8;4^r]^*, 1 \leq r \leq 7$.

(2) $F_4 > 0$ なら $F_4 \geq 3$. 等号成立時 $[8*8;4^r,3]^*, 0 \leq r \leq 7$.

(3) $F_4 > 3$ なら $F_4 \geq 4$.

(4) ω が奇数. $F_4 \geq 4$. 等号成立時 $[8*8;4^r,2]^*, 1 \leq r \leq 7$.

(1) $\nu_1 = 3$. $[8 * 8; 3^{t_3}, 2^{t_2}]$, $F_4 = 3t_3 + 4t_2$.
(2) $[8 * 9; 1]$, $F_4 = 8$.
(3) $\nu_1 = 4$. $[8 * 8; 4^{t_4}, 3^{t_3}, 2^{t_2}]$, $F_4 = 3t_3 + 4t_2$.
(4) $[8 * 9; 4^{t_4}]$, $F_4 = 8$.
(5) $\nu_1 = 5$. $[10 * 10; 5^7, 4, 3^{t_3}, 2^{t_2}]$, $F_4 = 5 + 3t_3 + 4t_2, t_3t_2 \leq 1$.
(6) $[10 * 10; 5^7, 3^{t_3}, 2^{t_2}]$, $F_4 = 5 + 3t_3 + 4t_2$.
(7) $\nu_1 = 6$. $[12 * 12; 6^7, 5]$, $F_4 = 7, \omega = 4, \overline{g} = 5$.
(8) $\nu_1 = 7$. $[14 * 14; 7^7, 6]$, $F_4 = 9, \omega = 5, \overline{g} = 6$.
(9) $\nu_1 = 7$. $[14 * 14; 7^7, 6, 4]$, $F_4 = 9, \omega = 3, \overline{g} = 0$.

16. 評価

最初に $\mathrm{RH}_{(+)}$ の場合を扱う.

$3\omega - g$ を F_4 で置き換えると

(7) $$(\sigma-6)F_4 - 2(\sigma-8)\omega = \tilde{\Theta}_2.$$

16.1. $B \geq 3$. $B \geq 3$ ならば $\widetilde{B} - 2\sigma \geq \sigma$ となり

(8) $$\tilde{\theta}_2 = \sigma(\widetilde{B} - 2\sigma) \geq \sigma^2.$$

よって,

$$(\sigma-6)F_4 - 2(\sigma-8)\omega = \tilde{\Theta}_2 \geq \tilde{\theta}_2 \geq \sigma^2.$$

$\sigma^2 + 4\sigma - 32 = (\sigma-6)(\sigma+10) + 28$ なので

$$9 \geq F_4 \geq 10 + \frac{28}{\sigma-6} \geq 19.$$

矛盾

よって $B \leq 2$ を仮定する.

16.2. $\widetilde{\mathcal{Z}} > 0$.

$\widetilde{\mathcal{Z}} > 0$ とすると $\widetilde{\mathcal{Z}} \geq \nu_1 - 1$ and $Y \geq \nu_1 + \nu_1 - 1 = 2\nu_1 - 1$.

よって,

$$(\sigma - 6)F_4 - (\sigma - 8)\omega = \tilde{\Theta}_2 \geq 2\sigma + p(2\nu_1 - 1) + 2(\nu_1 - 1).$$

仮定により

$$\begin{aligned} p(2\nu_1 - 1) + 2(\nu_1 - 1) &= 2(p+2)\nu_1 - p - 2 \\ &= (p+1)(\sigma - p) - p - 2. \end{aligned}$$

$F_4 \leq 9$ と仮定したがさらに $\omega \geq 4$ のとき

$$\begin{aligned} 9(\sigma - 6) &\geq 2(\sigma - 8)\omega + \tilde{\theta}_2 + (p+1)(\sigma - p) - p - 2 \\ &\geq 8(\sigma - 8) + 2(\sigma - 8)\omega + \tilde{\theta}_2 + (p+1)(\sigma - p) - p - 2. \end{aligned}$$

よって, $\sigma = p + 2\nu_1 \geq p + 6$, により

$$10 + p^2 + 2p + 2 \geq \tilde{\theta}_2 + p\sigma \geq \tilde{\theta}_2 + p(p+6).$$

それゆえ,

$$12 \geq \tilde{\theta}_2 + 4p \geq 4p.$$

これから $p \leq 3$.

よって, $B = 0, 2$ のとき $u \geq 1$ を仮定すると

$$12 \geq \tilde{\theta}_2 + 4p \geq 2u\sigma + 4p \geq 2(p+6) + 4p = 6p + 12$$

以上によって $u > 0$ とすると $p = 0$. このほかは, $p \leq 3$.

16.3. $\mathbf{RH}_{(+)}$.

$B=1$ で $\mathrm{RH}_{(+)}$ ならば$\tilde{\theta}_2=(2u-p)\sigma\geq 0$.

同様の議論で $2u-p=0$ ならば $2u=p\leq 3$. よって, $u=1, p=2$.

$$9(\sigma-6)\geq 2(\sigma-8)\omega+2\sigma+\sigma-2.$$

$\sigma=2\nu_1$ により

$$3\nu_1-13\geq(\nu_1-4)\omega.$$

よって,

$$\frac{3\nu_1-13}{\nu_1-4}=3-\frac{2}{\nu_1-4}\geq\omega.$$

これより $\omega<3$.

しかしこれは仮定 $\omega\geq 4$ に反する.

16.4. $\mathbf{RH}_{(-)}$**.** $\mathrm{RH}_{(-)}$ の場合は

Hartshorne の第二等式から,

$$(e-3)\omega-(e-9)\overline{g}=\tilde{\theta}_3+(p+u)Y+3\tilde{\mathcal{Z}}.$$

よって, $F_4=3\omega-\overline{g}$ により

$$(e-9)F_4=2(e-12)\omega+\tilde{\Theta}_3. \tag{9}$$

$F_4\leq 9$ を仮定したから

(10)

$$\tilde{\Theta}_3=(e-9)F_4-2(e-12)\omega\leq 9(e-9)-2(e-12)\cdot 4=e+15.$$

仮定 $\widetilde{\mathcal{Z}} > 0$ を用いると

$$\widetilde{\mathcal{Z}} \geq \nu_1 - 1, Y \geq 2\nu_1 - 1$$

よって,

$$\tilde{\Theta}_3 = \tilde{\theta}_3 + (p+u)Y + \widetilde{\mathcal{Z}}\tilde{\theta}_3 + \geq (2\nu_1 - 1) + 6\nu_1 - 6. \tag{11}$$

$\tilde{p}$ を $p+u$ と定義すると

$$\tilde{\Theta}_3 = \tilde{\theta}_3 + (p+u)Y + \widetilde{\mathcal{Z}}\tilde{\theta}_3 + \geq (2\nu_1 - 1) + 6\nu_1 - 6.$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Theta}_3 &\geq \tilde{\theta}_3 + \tilde{p}(2\nu_1 - 1) + 3\nu_1 - 3 \\
&= \tilde{\theta}_3 + (2\tilde{p} + 3)\nu_1 + \tilde{p} - 3 \\
&= \tilde{\theta}_3 + (2\tilde{p} + 3)(\frac{e - \tilde{p}}{3}) + \tilde{p} - 3 \\
&= \tilde{\theta}_3 + \frac{e(2\tilde{p} + 3)}{3} - \frac{2\tilde{p}^2 + 6\tilde{p} + 9}{3}
\end{aligned}$$

以上により

$$15 \geq \tilde{\theta}_3 + \frac{2\tilde{p}e}{3} - \frac{2\tilde{p}^2 + 6\tilde{p}}{3} - 3. \tag{12}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} 18 + \frac{2\tilde{p}^2 + 6\tilde{p}}{3} &\geq \tilde{\theta}_3 + \frac{2\tilde{p}e}{3} \\ &\geq \tilde{\theta}_3 + \frac{2\tilde{p}(\tilde{p}+9)}{3}. \end{aligned}$$

すなわち,

$$18 \geq \tilde{\theta}_3 + 4\tilde{p}. \tag{13}$$

しかしながら,

$$\tilde{\theta}_3 = (p-2u)(u+\nu_1) \geq \nu_1 \geq 3.$$

よって,

$$15 = 18 - 3 \geq 4\tilde{p}. \tag{14}$$

よって $\tilde{p} \leq 3$.

1. $\tilde{p}=3$. このとき

$$27=15+12\geq 2e.$$

よって,

$$\tilde{p}+3\nu_1 e\leq 13.$$

これより $\nu_1=3$ および $\tilde{p}=p+u=3$.

$p>2u$ と $3=p+u>3u$ に注意すると $p=3, u=0$.

さらに, $\sigma=p+2\nu_1=9$ かつ $e=\tilde{p}+3\nu_1=3+3\cdot 3=12$.

タイプは$[9*12,1;3^r]$.

$$\overline{g}=51-3r, \omega=18.$$

よって, $F_4=3+3r$. ここで, $r\leq 2$.

(1) $[9 * 12, 1; 3]$ のとき $F_4 = 6$.
(2) $[9 * 12, 1; 3^2]$ のとき $F_4 = 9$.

2. $\tilde{p} = 2$. このとき $u = 0$ かつ $p = 2$. よって, $e = 2 + 3 \cdot 3 = 11 < 12$. 仮定に反する.

3. $\tilde{p} = 1$. このとき $u = 0$ かつ $p = 1$. よって, $\nu_1 = 4$ and $e = 13$.

$F_4 = 13$ になり仮定に反する.

16.5. **等重複度.**

$\widetilde{\mathcal{Z}}=0$ とすると等重複度になり $Y=r\nu_1$.

最初に $r\geq 6$ とすると

$$\tilde{\Theta}_2=2u\sigma+pr\nu_1\geq 2u\sigma+6p\nu_1.$$

しかし $6p\nu_1=3p(\sigma-p)$ かつ

$$9(\sigma-6)\geq 10(\sigma-8)+2\sigma+3p(\sigma-p).$$

よって,

$$26\geq\sigma+3p(\sigma-p).$$

ゆえに,

$$26+3p^2\geq(3p+1)\sigma\geq(3p+1)(p+6).$$

よって $26\geq 19p$. ゆえに, $p=1$.

それ故,

$$9(\sigma-6)\geq 2(\sigma-8)\omega+3\sigma-3.$$

よって

$$6\sigma-51\geq 2(\sigma-8)\omega.$$

$r \leq 5$ のとき

$$\bar{g} = \sigma(\sigma - 2) + u(\sigma - 1) - r\frac{\nu_1(\nu_1 - 1)}{2},$$
$$\omega = \sigma(\sigma - 6) + u(\sigma - 3) - r\frac{\nu_1(\nu_1 - 3)}{2}.$$

よって,

$$F_4 = 2\sigma(\sigma - 8) + 2u(\sigma - 4) - r\nu_1(\nu_1 - 4).$$

$2\sigma(\sigma - 8) \geq 8\nu_1(\nu_1 - 4)$ そして

$$F_4 \geq 8\nu_1(\nu_1 - 4) - r\nu_1(\nu_1 - 4) = (8 - r)\nu_1(\nu_1 - 4).$$

$\nu_1 > 4$ そして $r \leq 5$ ならば $F_4 > 9$.

$\nu_1 = 4$ そして $r \leq 5$ とすれば$\sigma = p + 8$ そして$F_4 = 2\sigma(\sigma - 8) + 2u(\sigma - 4) = 2(p+8)p + 2u(p+4) > 9$.

$\nu_1 = 3$ とする $\sigma = p + 6 \geq 8$. よって, $p \geq 2$ かつ$F_4 = 2(6+p)(p-2) + 2u(p+2) + 3r$.

$p \geq 3$ とすれば

$$F_4 \geq 18 + 3r.$$

$p = 2$ のとき

$$F_4 = 8u(p+2) + 3r.$$

$F_4 \leq 9$ によれば $u = 0$ そして $F_4 = 3r$.

16.6. F_4 **の公式.**

$B=0,2$ のときは

$$
\begin{aligned}
F_4 &= \sigma\tilde{B} - 4\tilde{B} - 8\sigma \\
&= 2\sigma(\sigma-8) + 2u(\sigma-4) \\
&= 8\nu_1(\nu_1) + 8(\nu_1-2)p + 2p^2 + 2u(p+2(\nu_1-2)).
\end{aligned}
$$

$\nu_1 = 4$ のとき $F_4 = 2p^2 + 16p + 2u(p+4) \geq 0$. よって, $0 < F_4 < 10$ ならば $P=0, u=1$ そして $F_4 = 8$.

タイプは $[8*9;4^r]$, ここで $0<r<8$.

$\nu_1 = 3$ のときは $F_4 = 2p^2 + 8p - 24 + 2u(p+2) \geq 0$. よって, $F_4 = 0, \sigma \geq 8$ ならば $F_4 \geq 0$.

さらに, $p = 2, u > 0$ ならば $F_4 = 8u \geq 8$.
ゆえに $0 < F_4 < 10$ のとき $P = 2, u = 1$ そして $F_4 = 8$.
タイプは $[8 * 9; 1]$.

$B = 1, e \geq 12$ ならば

$$
\begin{aligned}
F_4 &= \sigma\tilde{B} - 4\tilde{B} - 8\sigma \\
&= 8\nu_1(\nu_1) + 2\nu_1(3p + 2u) + p^2 - 12p + 2u(p - 4).
\end{aligned}
$$

$\nu_1 \geq 4$ ならば
$2\nu_1(3p+2u)+p^2-12p+2u(p-4) \geq 8(3p+2u)+p^2-12p+2u(p-4) \geq 8u$.
ゆえに $0 < F_4 < 10$ のとき $P = 0, u = 1$ そして $F_4 = 8$.
タイプは $[8 * 13, 1; 4^r]$.

$\nu_1 = 3, e = 6 + p + u \geq 12$ ならば $F_4 = -24 + p(p + 2u) +$

16.7. $u=0$ そして $p \geq 1$ のとき.

$u=0$ と $p \geq 1$ のとき.

さらに $\widetilde{\mathcal{Z}} > 0$ とすれば $\widetilde{\mathcal{Z}} \geq \nu_1 - 1$ そして $Y \geq \nu_1 + 2$.

よって,

$$(\sigma-6)F_4 - (\sigma-8)\omega = \tilde{\Theta}_2 \geq p(\nu_1+2) + 2(\nu_1-1).$$

$p(\nu_1+2)+2(\nu_1-1) = \frac{(p+2)\sigma}{2} + \frac{-p^2+2p-4}{2}$ によると

$$\frac{p(p+2)}{2} + 26 \geq \sigma + \frac{(p+2)\sigma}{2}.$$

よって, $\sigma \geq p+6$ に注意すると

$$p^2+2p+52 \geq (p+4)\sigma \geq (p+4)(p+6) = p^2+10p+24.$$

よって, $28p \geq 8p$. これより $p \leq 3$.

$$\tilde{\Theta}_2 = 2u\sigma + pr\nu_1 \geq 2u\sigma + 6p\nu_1.$$

$\mathrm{RH}_{(-)}$ のときH の等式より

$$\tilde{\Theta}_3 = (e-9)F_4 - 2(e-12)\omega.$$

$9 \geq F_4$ そして $\omega \geq 4, e \geq \tilde{p}+9$, によると

$$18 - Lu + \frac{(\tilde{p}-3+L)\tilde{p}}{3} \geq \frac{(\tilde{p}+3+L)(\tilde{p}+9)}{3}.$$

さらに

$$18 - Lu \geq \frac{(13-L)\tilde{p}+9}{3}.$$

よって, $45 - 3L \geq (13-L)\tilde{p}$.

それゆえ$\tilde{p} \leq 3$.

$u > 0$ のとき $\tilde{p} = p + u > 3u \geq 3$. ゆえに, $u = 0$.

16.8. $k=0$ のとき.

$u=p=0$ そして $\widetilde{\mathcal{Z}}>0$ とすると

$$(\nu_1-3)F_4 \geq 2(\nu_1-4)\omega+\widetilde{\mathcal{Z}} \geq 8(\nu_1-4)\omega+\widetilde{\mathcal{Z}}.$$

$F_4 \leq 9$ によると

$$\nu_1+5 \geq \widetilde{\mathcal{Z}}.$$

最初に $\widetilde{\mathcal{Z}}=\nu_1-1$ とする.

タイプは $[2\nu_1 * 2\nu_1; \nu_1^{r-1}, \nu_1-1]$.

ここで, $\sigma=2\nu_1$.

よって

- $\overline{g} = \frac{\nu_1(\nu_1-1)}{2}(8-r) + \nu_1 - 1.$
- $\omega = \frac{\nu_1(\nu_1-3)}{2}(8-r) + \nu_1 - 2.$
- $F_4 = \nu_1(\nu_1 - 4)(8-r) + 2\nu_1 - 5.$

$r = 8$ ならば $F_4 = 2\nu_1 - 5.$

$F_4 = 2\nu_1 - 5 \leq 9$ とすれば $\nu_1 \leq 7.$

TABLE 2. $[2\nu_1 * \sigma = 2\nu_1; \nu_1^{r-1}, \nu_1 - 1]$.

ν_1	ω	$\overline{g}$	F_4
4	3	2	3
5	4	3	5
6	5	4	7
7	6	5	9
8	7	6	11

次いで $\widetilde{\mathcal{Z}} > \nu_1 - 1$ とすれば

$$\nu_1 + 5 \geq \widetilde{\mathcal{Z}} \geq 2\nu_1 - 4.$$

よって, $\nu_1 \leq 9$.

16.9. $\nu_1 = 9$.

$\nu_1 = 9$ のときは

$$14 = \nu_1 + 5 \geq \widetilde{\mathcal{Z}} \geq 2\nu_1 - 4 = 14.$$

$$\widetilde{\mathcal{Z}} = 14, \widetilde{\mathcal{Z}} = 8x_1 + 14x_2 + 18x_3 + \cdots ,$$

ここで, $x_1 = t_8, x_2 = t_7 + t_2, x_3 = t_6 + t_3, \cdots$.

故に,$t_7 + t_2 = 1$. $F_4 = 9, \omega = 4, \overline{g} = 3$.

しかし, $t_7 = 1$ ならば

$$3 = \overline{g} = 18 \cdot 16 - 36(r-1) - 21.$$

$25 = 3r$ となり矛盾.

しかし, $t_2 = 1$ ならば

$$3 = \overline{g} = 18 \cdot 16 - 36(r-1) - 1.$$

ゆえに $9(r-1) = 71$, 矛盾.

よって, $\widetilde{\mathcal{Z}} > 2\nu_1 - 4$. このとき, $\widetilde{\mathcal{Z}} \geq 2\nu_1 - 2$. だから $\nu_1 \leq 7$.

16.10. $\nu_1 = 7$.

よって $\widetilde{\mathcal{Z}} = 12$

$$12 \geq 4F_4 - 6\omega = 12.$$

$2F_4 - 3\omega = 6, \omega = 4, F_4 = 9$ により $\overline{g} = 3$.

$$\widetilde{\mathcal{Z}} = 6x_1 + 10x_2 + 12x_3.$$

によって 1) $x_1 = 2$, 2) $x_3 = 1$.

1) $x_1 = 2$. タイプは $[14 * 14; 7^{r-2}, 6^2]$.

$$3 = \overline{g} = 14 \cdot 12 - 21(r-2) - 30.$$

だから

$$33 = 14 \cdot 12 - 21(r-2).$$

矛盾.

2) $x_3 = t_3 + t_4 = 1$. タイプは $[14 * 14; 7^{r-2}, 3]$ または $[14 * 14; 7^{r-2}, 4]$.

16.11. $\nu_1 = 6$.
よって $11 \geq \widetilde{\mathcal{Z}} = 10$

$$12 \geq 4F_4 - 6\omega = 12.$$

$2F_4 - 3\omega = 6, \omega = 4, F_4 = 9$ によれば $\overline{g} = 3$.

16.12. $\nu_1 = 5$.

よって $F_4 = 40 + 4t_2 + 3t_3 - 5t_5$. $F_4 < 10$ によれば $t_5 = 7$.

- $\overline{g} = 10 - (t_2 + 3t_3 + 6t_4)$.
- $\omega = 10 + t_2 - 2t_4$.
- $F_4 = 5 + 4t_2 + 3t_3$.

$\overline{g} = 10 - (t_2 + 3t_3 + 6t_4) \geq -1$ に注意すると $t_4 = 1$, または 0.

$F_4 = 5 + 4t_2 + 3t_3 < 10$ によれば $t_2 + t_3 \leq 1$.

16.13. $\nu_1 = 4$.

よって $[8 * 8; 4^{t_4}, 3^{t_3}, 2^{t_2}]$ そして $F_4 = 3t_3 + 4t_2$.

Table 3. F_4

$t_3 \setminus t_2$	0	1	2
0	0	4	8
1	3	7	11
2	6	10	18
3	9	13	21

17. Appendix

17.1. pairs with $\omega = 1, 2$.

Under the assumption $\sigma \geq 7$, we show the list of types of pairs with $\omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. However, associated types are omitted, for simplicity.

Table 4. $\omega = 1, 2$

ω	σ	type	genus
1	7	$[7 * 9, 1; 1]$	27
2	7	$[7 * 9, 1; 2]$	26
2	8	$[8 * 8; 4^7]$	7
2	8	$[8 * 8; 4^7, 3]$	4
2	8	$[8 * 8; 4^7, 3^2]$	1
2	10	$[10 * 11; 5^9]$	0
2	12	$[12 * 12; 6^7, 5, 4]$	0

17.2. **pairs with $\omega = 3$.**

TABLE 5. $\omega = 3$

ω	σ	type	genus
3	7	$[7 * 9, 1; 2^2]$	25
3	8	$[8 * 9; 4^9]$	2
3	8	$[8 * 8; 4^7, 2]$	6
3	8	$[8 * 8; 4^7, 3, 2]$	3
3	8	$[8 * 8; 4^7, 3^2, 2]$	0
3	10	$[10 * 10; 5^7, 4, 3]$	2
3	10	$[10 * 10; 5^7, 4]$	5
3	12	$[12 * 12; 6^6, 5^3]$	1
3	14	$[14 * 14; 7^7, 6, 4]$	1
3	15	$[15 * 22, 1; 7^9]$	0
3	16	$[16 * 16; 8^6, 7^2, 6]$	0
3	20	$[20 * 20; 10^7, 9, 5]$	0

17.3. **pairs with** $\omega = 4$.

TABLE 6. $\omega = 4$

ω	σ	type	genus
4	7	$[7 * 9, 1; 2^3]$	24
4	8	$[8 * 9; 4^9, 2]$	1
4	8	$[8 * 8; 4^6]$	13
4	8	$[8 * 8; 4^6, 3]$	10
4	8	$[8 * 8; 4^6, 3^2]$	7
4	8	$[8 * 8; 4^6, 3^3]$	4
4	8	$[8 * 8; 4^6, 3^4]$	1
4	8	$[8 * 8; 4^7, 2^2]$	5
4	8	$[8 * 8; 4^7, 3, 2^2]$	2
4	9	$[9 * 13, 1; 4^{10}]$	0

17.4. **pairs with $\omega = 4$.**

TABLE 7. $\omega = 4$

ω	σ	type	genus
4	10	$[10 * 10; 5^7, 4, 2]$	4
4	10	$[10 * 10; 5^7, 4, 3, 2]$	1
4	10	$[10 * 10; 5^6, 4^3]$	3
4	10	$[10 * 10; 5^6, 4^3, 3]$	0
4	12	$[12 * 13; 6^8, 5]$	2
4	12	$[12 * 12; 6^6, 5^3, 2]$	0
4	12	$[12 * 12; 6^7, 5]$	6
4	12	$[12 * 12; 6^7, 5, 3]$	3
4	12	$[12 * 12; 6^7, 5, 3^2]$	0
4	14	$[14 * 14; 7^7, 5^2]$	2
4	14	$[14 * 14; 7^7, 6, 4, 2]$	0

17.5. **pairs with $\omega = 4$.**

TABLE 8. $\omega = 4$

ω	σ	type	genus
4	16	$[16 * 16; 8^7, 7, 4]$	2
4	16	$[16 * 16; 8^5, 7^4]$	1
4	16	$[16 * 17; 8^8, 6]$	1
4	18	$[18 * 18; 9^7, 7, 6]$	1
4	19	$[19 * 19; 9^9]$	0
4	19	$[19 * 38, 2; 9^9]$	0
4	20	$[20 * 20; 10^5, 9^3, 8]$	0
4	22	$[22 * 22; 11^7, 10, 5]$	1
4	22	$[22 * 22; 11^6, 10^2, 7]$	0
4	22	$[22 * 22; 11^7, 8^2]$	0
4	30	$[30 * 30; 15^7, 14, 6]$	0