数学の研究を始めよう
(1) 10の累乗の階乗について

飯高 茂

平成 25 年 7 月 17 日

プロの数学者はさておき, 一般の人にとって数学は試験そのものであろう. 試験でいい思いをする少数者を除くと試験の恐怖がつきまとう数学が嫌われるのも無理はない. 試験と切り離すと数学は意外に面白いものである.

数学の研究には金がかからない. しかも数学の研究を試みてうまく行けば全く新しい数学の世界をみることができる. だれでも新しい数学の世界をみることができれば大感激する. これは純粋な深い感動でこのような喜びをプロの数学者だけに独占させておくことはもったいないことである.

このシリーズでは「やさしいことから始めよう.」をスローガンにして数学の世界を新しく探検し数学の研究に誘うことを目的とする.

なお, この内容は著者が指導して行った学習院大学理学部での学部 4 年生の卒業研究から多くのネタを得ている. ゼミに参加してくれた学生諸君の熱意と努力に敬意を表する.

1 階乗について

自然数 n の階乗とは積 $1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ のことであり, 記号で $n!$ と書く. 階乗を計算すると急激に大きくなるからびっくりした, という意味をこめた記号なのだろうか. 階乗は高校生にとっても 2 項係数の計算等でお馴染みの関数である.

先日 (2012 年冬), 深夜テレビのお笑い番組 (ワラッタメ天国) でも階乗が取り上げられていた. 階乗がお笑いのネタになるのだから, びっくりしますね. パソコン君に頼んで 15! まで階乗を求めてみた (表 1).

学生に話すとき 10! は初任給の年間総所得 (税込) くらいだね, と言って大きさの感じを掴んでもらう. 実際, 初任給で 3,628,800 円もらえば立派なものである.

$11! = 39916800$ は上場会社の社長の年間総所得程度, 12! は 5 億円弱なので, 成功したビジネスマンの生涯総所得と言っても良いかもしれない.

学生諸君, 目指せ,12!.

しかし 15! は 1 兆を超える. 巨大すぎて例えようもない. そこで末尾の 0 に注目しよう. 15! の末尾には 0 が 3 つ並んでいる.

2 末尾の 0 に注目

100! の末尾にはいくつ 0 が並んでいるだろうか.

パソコン君に聞いてみよう.

表 1: 急速に大きくなる階乗

n	$n!$
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1307674368000

100!= 933262154439441526816992388562667004907
15968264381621468592963895217599993229915608941
46397615651828625369792082722375825118521091686
4000000000000000000000000.
数えてみると末尾には 0 が 24 個並んでいる.

1000! はもっと巨大な数で計算は大変だが印刷の都合上途中を略して書くと
$1000! = 402387260077 \cdots$
5347200000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000.
並んでいる 0 を数えるだけでも大変だ. そこで数学的に考えてみよう.

10! は 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 をかけるから 5 の倍数は 5,10 の 2 個. 10 は $2, 5$ の積なのだが 2 はたくさんでてくるから, 5 の倍数の個数が 10 の倍数の個数と見て良い. だから 10! は 100 でちょうど割り切れる.

100! は $1, 2, 3, 4, \cdots, 99, 100$ をかけた数. そこで 5 の倍数は $5, 10, 15, \cdots, 100$ なので 10 の倍数の個数 $\frac{100}{5} = 20$ になりそうだが, パソコン君は 24 だという.

なぜだろうか. $25, 50, 75, 100$ はさらに 5^2 で割れる. ここにあと 4 つの 0 が隠れていたのだ. だから 10 の倍数は個数 24 個.

1000! についてもこのように考えてていけば分かりそうだ. そこで一般的に考えてみよう.

3 素因数分解

$n!$ は 5 でぎりぎり何回割れるか. 数学的に言えば $n!$ を素因数分解するとき 5 の指数 f を調べれば良い. すなわち $n! = 2^e 3^d 5^f \cdots$ とおいたときの f である.

f は n によって定まるから n の関数である. そこで $f(n)$ とおく. $f(1) = 0, f(5) = 1, f(10) = 2, f(100) = 24$ はわかっている.

n を 5 で割った商を n_1 (n を 5 で割った商を $n//5$ と書く) とおくと, $1, 2, \cdots, n$ のうち 5 の倍数の個数が n_1 であり, これに $n_1!$ における 5 の指数 $f(n_1)$ を補ってやれば $f(n)$ が出てくる.

$$f(n) = f(n_1) + n_1 \tag{1}$$

となる.

$1000//5 = 200, 200//5 = 40, 40//5 = 8$ なので
$f(1000) = 200 + f(200),$
$f(200) = 40 + f(40),$
$f(40) = 8 + f(8)$
$f(8) = 1.$
によれば

$$f(1000) = 200 + 40 + 8 + 1 = 249.$$

かくして 1000! は末尾に 249 個の 0 がついていることが分かった.

4 一般公式

この公式は 5 の代わりに素数 p でも成り立つ. $n!$ を素因数分解するとき p の指数を $f_p(n)$ とおいてこれを調べよう.

n を p で割った商を n_1 とおき,

$$f_p(n) = f_p(n_1) + n_1$$

これを用いると簡単に次の表 2 ができる.

$10^5 = 100000$ の階乗は超巨大な数だが末尾の 0 の個数は 24999 になる. 24,249,2499,24999 と来るので次は 249999 になりそうだが $10^6 = 1000000$ の階乗の末尾の 0 の個数は 249998 になって期待が裏切られる.

表 2 において $10^3!$ からその末尾の 0 の個数の末尾の数が 9,9,9,8,9,9,8,7,7,7,7,8,7 と微妙に揺れるのが気になる. 最後の数は $10^{15}!$ である. これは真に超巨大な数であって末尾の 0 の個数を数えるだけでも大変だ. 249999999999997 個あるというのである.

表 2: $10^r!$

10^r	$10^r!$ の末尾の 0 の個数
10	2
10^2	24
10^3	249
10^4	2499
10^5	24999
10^6	249998
10^7	2499999
10^8	24999999
10^9	249999998
10^{10}	2499999997
10^{11}	24999999997
10^{12}	249999999997
10^{13}	2499999999997
10^{14}	24999999999998
10^{15}	249999999999997

5　$5^r!$ について

$10^r!$ は難しそうだからあきらめて $5^r!$ について $f_5(5^r)$ を調べよう.

5^n	$5^n!$ の 5 の指数
5	1
5^2	6
5^3	31
5^4	156
5^5	781
5^6	3906
5^7	19531
5^8	97656
5^9	488281
5^{10}	2441406

しかし指数の数列の正体は見ただけでは分からない. とりあえず次の数との階差をとると $5, 25, 125, \cdots$ となるので数列 $\{5^s\}$ になりそうだ.

もう少し分かりやすそうな $2^r!$ について $f_2(2^r)$ を調べてみよう.

2^n	$2^n!$ の 2 の指数
2	1
2^2	3
2^3	7
2^4	15
2^5	31
2^6	63
2^7	127
2^8	255
2^9	511
2^{10}	1023

$1, 3, 7, 15, 31$ と続くが 1 を加えると $2, 4, 8, 16, 32$ となりこれは底が 2 のときの累乗 2^r である.

$n = 2^r$ を 2 で割った商 n_1 は 2^{r-1} になるので漸化式は

$$f_2(2^r) = f_2(2^{r-1}) + 2^{r-1}$$

である. これを繰り返すと

$$f_2(2^r) = f_2(2) + 2 + 2^2 + +2^{r-1}.$$

$f_2(2) = 1$ なので

$$f_2(2^r) = 1 + 2 + 2^2 + +2^{r-1} = 2^r - 1.$$

したがって, $f_2(2^r) + 1 = 2^r$.

この論法は 2 を 5 に替えればそのまま使えて次式をえる.

$$f_5(5^r) = f_5(5^{r-1}) + 5^{r-1} = 1 + 5 + 5^5 + \cdots + 5^{r-1}.$$

等比数列の和の公式により

$$f_5(5^r) = \frac{5^r - 1}{4}.$$

したがって,$5^n!$ の 5 の指数に 4 倍して 1 を加えた欄を右側に補ってみよう.

5^n	5 の指数	4 倍 +1
5	1	5
5^2	6	25
5^3	31	125
5^4	156	625
5^5	781	3125
5^6	3906	15625
5^7	19531	71825

6　$6^r!$ で練習

10 より簡単な合成数 6 に着目して $6^r!$ の 3 の指数をパソコン君で求めると次のようになる.

この指数の数列は複雑でわけがわからない. 階差をとってもわからない.

表 3: $6^r!$ の 3 の指数

6^r	$6^r!$ の 3 の指数
6	2
6^2	17
6^3	106
6^4	646
6^5	3886
6^6	23326
6^7	139965
6^8	839806
6^9	5038844
6^{10}	30233084

$10^r!$ を調べるには漸化式を使って計算するしか手はないようだ.

$$\begin{aligned} f_5(10^r) &= f_5(2^r \cdot 5^r) \\ &= f_5(2^r \cdot 5^{r-1}) + 2^r \cdot 5^{r-1} \\ &= f_5(2^r \cdot 5^{r-2}) + 2^r \cdot 5^{r-2} + 2^r \cdot 5^{r-1} \\ &= \cdots \\ &= f_5(2^r) + 2^r(1 + \cdots + 5^{r-2} + 5^{r-1}) \\ &= f_5(2^r) + 2^r(\frac{5^r - 1}{5 - 1}) \\ &= f_5(2^r) + 2^r\frac{5^r - 1}{4}. \end{aligned}$$

したがって $f_5(2^r)$ を求めれば良いことがわかった.

2^r を 5 で割って商を求めればよいが, 思い切って 2^r を 5 進展開しておくのが早そうだ.

7　2^r の 5 進展開

$2^r = \varepsilon_0 5^s + \varepsilon_1 5^{s-1} + \cdots + \varepsilon_s$ のように $0, 1, 2, 3, 4$ を係数 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots$ に用いて表す. これが 5 進展開である. これを簡単に $\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots \rangle_5$ と書くことにする.

$2^r = \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s \rangle_5$ を 5 で割った商は $\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots \varepsilon_{s-1} \rangle_5$ なので

$$f_5(2^r) = f_5(\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s \rangle_5) = f_5(\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1} \rangle_5) + \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1} \rangle_5.$$

繰り返して等比数列の和の公式を使うと

$$
\begin{aligned}
f_5(2^r) &= f_5(\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1}\rangle_5) + \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1}\rangle_5 \\
&= f_5(\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-2}\rangle_5) + \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-2}\rangle_5 + \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1}\rangle_5 \\
&= \langle \varepsilon_0\rangle_5 + \cdots + \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-2}\rangle_5 + \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1}\rangle_5 \\
&= \varepsilon_0(5^{s-1} + \cdots + 5 + 1) + \varepsilon_1(5^{s-2} + \cdots + 5 + 1) + \cdots + \varepsilon_{s-1} \\
&= \varepsilon_0 \frac{5^s - 1}{4} + \varepsilon_1 \frac{5^{s-1} - 1}{4} + \cdots + \varepsilon_{s-1}\frac{5-1}{4}
\end{aligned}
$$

したがって,

$$f_5(2^r) = \varepsilon_0 \frac{5^s - 1}{4} + \varepsilon_1 \frac{5^{s-1} - 1}{4} + \cdots + \varepsilon_{s-1}\frac{5-1}{4}.$$

$2^r = \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s\rangle_5$ と 5 進展開したときの係数の和 $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_s$ を $\mathrm{sum}_5(2^r)$ と記すことにすれば

$$f_5(2^r) = \frac{1}{4}(\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s\rangle_5 - \mathrm{sum}_5(2^r)) = \frac{1}{4}(2^r - \mathrm{sum}_5(2^r)).$$

結局

$$f_5(10^r) = f_5(2^r) + 2^r\frac{5^r - 1}{4} = \frac{1}{4}(2^r - \mathrm{sum}_5(2^r)) + 2^r\frac{5^r - 1}{4}.$$

整理すると簡単になって

$$f_5(10^r) = \frac{1}{4}(10^r - \mathrm{sum}_5(2^r)). \tag{2}$$

これが 10! の末尾の 0 の個数公式である (この式を一般に**ルジャンドルの公式**とも言う). 簡単な場合を見てみよう.

$r = 1$ なら $\frac{1}{4}(10^r - \mathrm{sum}_5(2^r)) = \frac{1}{4}(10 - \mathrm{sum}_5(2^r)) = \frac{8}{4} = 2.$

$r = 2$ なら $\frac{1}{4}(10^r - \mathrm{sum}_5(2^r)) = 25 - \frac{1}{4}\mathrm{sum}_5(4) = 25 - 1 = 24.$

$r = 3$ なら $\frac{1}{4}(10^r - \mathrm{sum}_5(2^r)) = 250 - \frac{1}{4}\mathrm{sum}_5(8) = 250 - 1 = 249.$ ここでは $8 = 5 + 3$ によって, $\mathrm{sum}_5(8) = 4$ となる.

$\mathrm{sum}_5(2^r)$ はどんな値になるか, これが問題の核心であった.

$2^r!$ の 5 進展開をパソコン君に求めてもらうと表 4 がえられる.

$\mathrm{sum}_5(2^r)/4$ は 1,1,1,1,2,1,1,2,3,3,3,3,3,2,3 となっている. これが $10^r!$ の末尾の 0 の個数が微妙に揺れる有様を説明している.

そこで関数 $F(r) = \mathrm{sum}_5(2^r)/4$ を定義し 次の問いを出しておこう.

$\langle 1\rangle$ $F(r) = 10$ となる最小の数 r はなにか?

$\langle 2\rangle$ $F(r) = 1$ となる r は 2,3,4,7,8 だけか?

$\langle 3\rangle$ $r > 2, 2^r = 5^e + 3$ とすると $r = 3, e = 1; r = 7, e = 3$ になるか.

$\langle 4\rangle$ $2^r = 5^{e_0} + 5^{e_1} + 5^{e_2} + 1, (e_0 > e_1 > e_2)$ を満たす解はないか ?

私にはどれも難しい. 正直のところ 2^r を 5 進展開することがこれほど困難な問いが出てくることは予想外であった. ただし問題の難易は判定が難しい. 案外簡単に解けるかもしれない.

表 4: $2^r!$ の 5 進展開

2^r	5 進展開	$\mathrm{sum}_5(2^r)$
2^2	$\langle 4\rangle_5$	4
2^3	$\langle 1,3\rangle_5$	4
2^4	$\langle 3,1\rangle_5$	4
2^5	$\langle 1,1,2\rangle_5$	4
2^6	$\langle 2,2,4\rangle_5$	8
2^7	$\langle 1,0,0,3\rangle_5$	4
2^8	$\langle 2,0,1,1\rangle_5$	4
2^9	$\langle 4,0,2,2\rangle_5$	8
2^{10}	$\langle 1,3,0,4,4\rangle_5$	12
2^{11}	$\langle 3,1,1,4,3\rangle_5$	12
2^{12}	$\langle 1,1,2,3,4,1\rangle_5$	12
2^{13}	$\langle 2,3,0,2,3,2\rangle_5$	12
2^{14}	$\langle 1,0,1,1,0,1,4\rangle_5$	8
2^{15}	$\langle 2,0,2,2,0,3,3\rangle_5$	12

8　$6^r!$ の場合

簡単そうな $6^r!$ の場合を結果だけを表 5 に挙げておく. $6^r!$ の 3 の指数の 6 進展開が美しく, そして末位の数が微妙に揺れている点に興味がある. これからまた新たな課題が見えてくる. 読者はこれをもとに発見の旅にでるとよい.

この研究は学習院大学理学部の学生, 田辺智典 (2006), 黒沼壯太君 (2012) の研究によるところが大きい. 記して感謝する.

表 5: $6^r!$ の 3 の指数の 6 進展開

$6r$	$6^r!$ の 3 の指数の 6 進展開
6	$\langle 2\rangle_6$
6^2	$\langle 2,5\rangle_6$
6^3	$\langle 2,5,4\rangle_6$
6^4	$\langle 2,5,5,4\rangle_6$
6^5	$\langle 2,5,5,5,4\rangle_6$
6^6	$\langle 2,5,5,5,5,4\rangle_6$
6^7	$\langle 2,5,5,5,5,5,3\rangle_6$
6^8	$\langle 2,5,5,5,5,5,5,4\rangle_6$
6^9	$\langle 2,5,5,5,5,5,5,5,2\rangle_6$
6^{10}	$\langle 2,5,5,5,5,5,5,5,5,2\rangle_6$
6^{11}	$\langle 2,5,5,5,5,5,5,5,5,5,1\rangle_6$
6^{12}	$\langle 2,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,1\rangle_6$
6^{13}	$\langle 2,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,2\rangle_6$
6^{14}	$\langle 2,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,1\rangle_6$
6^{15}	$\langle 2,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,4,4\rangle_6$