数学の研究を始めよう (14)
オイラーの卵とゴールドバッハ予想

飯高 茂

平成 28 年 9 月 22 日

1 第 2 種オイラー関数と陪関数

第 2 種オイラー関数と陪関数の定義は以前にも書いたが, 重要なのであらためて書く.

自然数 a の素因数分解 $a = {p_1}^{e_1} \cdots {p_s}^{e_s}$ に応じて $\frac{\varphi(a)}{2^s}$ を $\widetilde{\varphi}(a)$ と書き**オイラー陪関数** と呼ぶ. さらに $\varphi_1(a) = \widetilde{\varphi}(a)a$ とおき. $\varphi_1(a)$ を第 2 種オイラー関数という.

その心は $a = p^e$ のとき,a より小さいが p と互いに素な数の和は

$$\frac{p^e(p^e+1)}{2} - p \times \frac{p^{e-1}(p^{e-1}+1)}{2} = \frac{p^e(p^e - p^{e-1})}{2}.$$

なので $\frac{p^e \varphi(p^e)}{2}$ となり定義から $\varphi_1(p^e)$ と等しいからである.

2 第 2 種オイラー関数のグラフ

第 2 種オイラー関数 $\varphi_1(a)$ のグラフを描いてみよう.

$x = a, y = b = \varphi_1(a)$ とおき $a < 1000$ についてグラフを描いた (図 1).

a が素数 p なら $s = 1$, $\widetilde{\varphi}(p) = \frac{p-1}{2}$ なので $2\widetilde{\varphi}(p) = p - 1 = a - 1, b = \varphi_1(a) = \frac{a(a-1)}{2}$ によって

$$y = \varphi_1(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

を満たす. したがって素数 p に対応して点 $(p, \varphi_1(p))$ は放物線 $2y = x(x-1)$ の上にあり一般の自然数 a に対する 点 $(a, \varphi_1(a))$ は

$$y \leq \frac{x(x-1)}{2}, y \geq 1$$

で定義された領域の点である.

各自然数 m につき $m \neq p$ を満たす素数 p に対して $a = mp, b = \varphi_1(a)$ とおくと (a, b) は放物線の上にある.

2.1 $a = 2^e p$ の定める放物線

p を奇素数として $e > 0$ に対して $a = 2^e p$ とすると $\varphi(a) = 2^{e-1}(p-1)$, $\varphi_1(a) = a\frac{\varphi(a)}{4} = a\frac{2^e(p-1)}{8} = \frac{a}{8}(a - 2^e)$.

$x = a, y = \varphi_1(a)$ とおけば $8y = x(x - 2^e)$.

図 1: 第 2 種オイラ関数のグラフ

たとえば $e=1$ なら 放物線 $8y=x(x-2)$.
$e=2$ なら 放物線 $8y=x(x-4)$.
$e=3$ なら 放物線 $8y=x(x-8)$.
がそれぞれ対応する.

2.2 $a=3^e p$ の定める放物線

同様に $p\neq 3$ を素数とし,$x=a=3^e p$, $y=\varphi_1(a)$ とおけば $6y=x(x-3^e)$ を満たす.
$e=1$ なら 放物線 $6y=x(x-3)$.
$e=2$ なら 放物線 $6y=x(x-9)$.
$e=3$ なら 放物線 $6y=x(x-27)$.
がそれぞれ対応する.

2.3 $a=qp$ の定める代数曲線

素数 q を 1 つ定めて素数 $p\neq q$ をとり $a=qp$ について

$$\varphi_1(a)=a\frac{(q-1)(p-1)}{4}=a(p-1)\frac{q-1}{4}=a(\frac{a}{q}-1)\frac{q-1}{4}=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{q})a(a-q).$$

かくして $x=a, y=\varphi_1(a)$ とおけば放物線 $y=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{q})x(x-q)$ が定まる.

2.4 $a = p^e$ の定める代数曲線

素数の累乗 p^e と書ける a について $\varphi(a) = p^{e-1}\overline{p}$ (ここで $(\overline{p} = p-1)$) なので $\varphi_1(a) = \frac{ap^{e-1}\overline{p}}{2}$ となる.

$x = a, y = \varphi_1(a)$ とおくと,$2y = x(x - x^{\frac{e-1}{e}})$ を満たす.

$e = 2$ のとき $2y = x(x - x^{\frac{1}{2}})$ であり $(2y - x^2)^2 = x^3$ を満たすのでこれは 4 次代数曲線である.

2.5 $s \geq 2$ のとき

$s \geq 2$ ならば

$$\varphi_1(a) = \frac{a\varphi(a)}{2^s} \leq \frac{a\varphi(a)}{4} \leq \frac{a(a-1)}{4}$$

かくして $x = a, y = \varphi_1(a)$ とおけば放物線 $4y \leq x(x-1)$ を境界とする領域ができる.

この補集合の定める領域 $4y > x(x-1), 2y \leq x(x-1)$ がグラフで描かれた「広い海」である.

3　オイラー陪関数の余関数のグラフ

陪関数の余関数のグラフは次の通りである. 広い海がますます広く見える.

図 2: 陪関数の余関数のグラフ

4　オイラー関数の余関数の 3 次評価式

a が素数 p の立方 p^3 のとき $\varphi(a) = \varphi(p^3) = (p-1)p^2 = a - a^{2/3}$ が成り立つ. 一般に a が素数でなくさらに素数の平方でもないとき

$$co\varphi(a) = a - \varphi(a) \geq a^{2/3}$$

は成り立たない. 実際 $s = 2, a < 1000$ についての数表を次に見てみよう.

しかし $s \geq 3, a < 1000$ についての次の数表に注目するとこの場合不等式 $a - \varphi(a) \geq a^{2/3}$ 正しいようだ. そこでその証明を考えよう.

表 1: $s=2$ の場合

a	素因数分解	$\varphi(a)$	$a-\varphi(a)-a^{\frac{2}{3}}$
989	[23,43]	924	-34.26531561
899	[29,31]	840	-34.14791277
943	[23,41]	880	-33.16295385
851	[23,37]	792	-30.80207534
893	[19,47]	828	-27.73299916

表 2: $s=3$ の場合

a	素因数分解	$\varphi(a)$	$a-\varphi(a)-a^{\frac{2}{3}}$
30	[2,3,5]	8	12.34510615
42	[2,3,7]	12	17.91723876
60	$[2^2,3,5]$	16	28.67381135
70	[2,5,7]	24	29.01500748
66	[2,3,11]	20	29.6683791
105	[3,5,7]	48	34.74336351
78	[2,3,13]	24	35.74438779
84	$[2^2,3,7]$	24	40.8198121
90	$[2,3^2,5]$	24	45.9170115
110	[2,5,11]	40	47.04229575
102	[2,3,17]	32	48.16934425
114	[2,3,19]	36	54.489065
165	[3,5,11]	80	54.91689708
130	[2,5,13]	48	56.33770056
120	$[2^3,3,5]$	32	63.67119202
126	$[2,3^2,7]$	36	64.86684382
140	$[2^2,5,7]$	48	65.038005
154	[2,7,11]	60	65.26923782

4.1 3 次基本不等式

$s\geq 3$ のとき $a>1$ について $a-\varphi(a)-a^{\frac{2}{3}}\geq 0$ 　を証明することを目標にする.

はじめは a に平方因子がないときを扱う.

相異なる素数 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ について $a=p_1\cdot p_2\cdots p_s$ のとき $\varphi(a)=(p_1-1)\cdot(p_2-1)\cdots(p_s-1)$ なので

$$a-\varphi(a)-a^{2/3}=p_1\cdot p_2\cdots p_s-(p_1-1)\cdot(p_2-1)\cdots(p_s-1)-(p_1\cdot p_2\cdots p_s)^{2/3}$$

となる. $p_1,p_2,\cdots,p_s$ について各々の正の 3 乗根を $x_1,x_2,\cdots,x_s$ とおけば

$$x_1{}^3 \cdot x_2{}^3 \cdots x_s{}^3 - (x_1{}^3 - 1) \cdot (x_2{}^3 - 1) \cdots (x_s{}^3 - 1) - (x_1 \cdot x_2 \cdots x_s)^2 > 0$$

と書き直せる.

簡単のため $s = 3$ とし x_1, x_2, x_3 をそれぞれ x, y, z とおけば $x > y > z, z^3 \geq 2$ と仮定できる. その結果目的の不等式は

$$x^3y^3z^3 - (x^3 - 1)(y^3 - 1)(z^3 - 1) - x^2y^2z^2 > 0$$

と見やすい形になった. これは, 各変数については 3 次式であるが, 今まで見たことも聞いたこともないような不等式である.

こういうニューフェースに出会えるのが研究の醍醐味の 1 つと言ってよい.

z に着目して $F(z) = x^3y^3z^3 - (x^3 - 1)(y^3 - 1)(z^3 - 1) - x^2y^2z^2$ とおく.

$F(z) = (x^3 + y^3 - 1)z^3 - x^2y^2z^2 + (x^3 - 1)(y^3 - 1)$ となるので

$A = x^3 + y^3 - 1, B = x^2y^2, C = (x^3 - 1)(y^3 - 1)$ とすると $F(z) = Az^3 - Bz^2 + C$ と簡単に書ける.

z で微分すると

$$F'(z) = 3Az^2 - 2Bz.$$

この 0 でない方の根を z_0 とおけば $3Az_0 = 2B$ となり

$$F(z_0) = Az_0{}^3 - Bz_0{}^2 + C = (Az_0 - B)z_0{}^2 + C = -\frac{z_0{}^2B}{3} + C = \frac{27A^2C - 4B^3}{27A^2}.$$

$u = x^3, v = y^3$ とおけば $v \geq 3, u \geq 5$. $A^2C = (u-1)(v-1)(u+v-1)^2, B^3 = (uv)^2$ なので

$$G(u, v) = 27A^2C - 4B^3 = 27(u-1)(v-1)(u+v-1)^2 - 4(uv)^2$$

とおき, これが正となることを示そう.

相加相乗平均の不等式によって $u + v - 1 \geq 2\sqrt{uv} - 1$ なので $W = \sqrt{uv}$ とおけば

$$(u + v - 1)^2 \geq (2\sqrt{uv} - 1)^2 = 4W^2 - 4W + 1$$

一方 $u \geq 5$ により $1 \leq \frac{u}{5} = u - \frac{4u}{5}$ によって $\frac{4u}{5} \leq u - 1$.

同様にして $v \geq 3$ により $\frac{2v}{3} \leq v - 1$.

$$A^2C = (u-1)(v-1)(u+v-1)^2 \geq \frac{4u}{5}\frac{2v}{3}(2\sqrt{uv} - 1)^2 = \frac{72}{5}W^2(4W^2 - 4W + 1).$$

これより

$$G(u, v) \geq \frac{72}{5}W^2(4W^2 - 4W + 1) - 4W^4 = (\frac{72}{5}(4W^2 - 4W + 1) - 4W^2)W^2.$$

ところで $W = \sqrt{uv} > \sqrt{15} > 3$ によって $H(w) = (\frac{72}{5}(4W^2 - 4W + 1) - 4W^2)$ とおけば $H(3) > 0$ であり, 2 次式 $H(w)$ の頂点の x 座標は $\frac{36}{67} < 1$ なので $W > 3$ のとき $H(W) > 0$. したがって, $G(u, v) > 0$ は示された.

このように高校数学の範囲で新しい不等式が証明できた.

4.2 一般の場合の不等式

$s > 3$ のときも不等式

$$x_1{}^3 \cdot x_2{}^3 \cdots x_s{}^3 - (x_1{}^3 - 1)\cdot(x_2{}^3-1)\cdots(x_s{}^3-1) - (x_1 \cdot x_2 \cdots x_s)^2 > 0$$

が成り立つ事は帰納法で簡単に分かる. すなわち $s-1 \geq 2$ の場合の不等式の成立を仮定する.

$$X = x_1{}^3 \cdot x_2{}^3 \cdots x_{s-1}{}^3, Y = (x_1{}^3-1)\cdot(x_2{}^3-1)\cdots(x_{s-1}{}^3-1), Z = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_{s-1})^2$$

とおくと, 帰納法の仮定から $X > Y + Z$ が成り立つとしてよい.

$$x_1{}^3 \cdot x_2{}^3 \cdots x_s{}^3 = Xx_s{}^3, (x_1{}^3-1)\cdot(x_2{}^3-1)\cdots(x_s{}^3-1) = Y(x_s{}^3-1), (x_1 \cdot x_2 \cdots x_s)^2 = Zx_s{}^2$$

によれば

$$x_1{}^3 \cdot x_2{}^3 \cdots x_s{}^3 - (x_1{}^3-1)\cdot(x_2{}^3-1)\cdots(x_s{}^3-1) - (x_1 \cdot x_2 \cdots x_s)^2 = Xx_s{}^3 - Y(x_s{}^3-1) - Zx_s{}^2$$

$$\begin{aligned} Xx_s{}^3 - Y(x_s{}^3-1) - Zx_s{}^2 &> (Y+Z)x_s{}^3 - Y(x_s{}^3-1) - Zx_s{}^2 \\ &> Z(x_s-1)x_s{}^2 + Y > 0. \end{aligned}$$

$s \geq 3$ のとき a に平方因子があるときを最後に扱う.

$a = p_1{}^{e_1} \cdots p_s{}^{e_s}$ に応じて $P_1 = p_1{}^{e_1}, \cdots, P_s = p_s{}^{e_s}$ とおくとき $a = P_1 \cdots P_s$ となるので $\varphi(a) \leq (P_1-1)\cdots(P_s-1)$ になって

$$a - \varphi(a) - a^{\frac{2}{3}} \geq P_1 \cdots P_s \geq (P_1-1)\cdots(P_s-1) - a^{\frac{2}{3}} \geq 0$$

となり証明された.

このようにしてオイラー関数の余関数について 3 次評価式ができたが $s \geq 3$ が新たな条件となっている.

5 オイラー関数のエイリアン解

q_1 と q_2 を相異なる素数とし,$Q = q_1q_2, \overline{q_1} = q_1 - 1, \overline{q_2} = q_2 - 1, \overline{Q} = \overline{q_1q_2}$ とおく. さらに $m = q_1{}^{\varepsilon_1}q_2{}^{\varepsilon_2}$ とし q_1, q_2 と異なる素数 p に対して $a = mp$ とおく. このとき q_1, q_2 をジーンと呼ぶ.

$$\varphi(a) = \varphi(m)\varphi(p) = \varphi(m)(p-1)$$

を m 倍して変形し

$$m\varphi(a) = \varphi(m)a - m\varphi(m). \tag{1}$$

すると $\varphi(m)=\frac{m\overline{Q}}{Q}$ になるので

$$\frac{\varphi(m)}{m}=\frac{\overline{Q}}{Q}.$$

解 a を素因数分解して $a=q_1{}^{e_1}q_2{}^{e_2}L,(L$ は q_1,q_2 で割れない) とし $M=q_1{}^{e_1}q_2{}^{e_2}$ とおく. $a=ML$ となり $\varphi(a)=\varphi(M)\varphi(L)$.

$e_1>0,e_2>0$ のとき.

$$\varphi(M)=\frac{M\overline{Q}}{Q}$$

によって式 (1) を m で割ると

$$\frac{\overline{Q}}{Q}(M\varphi(L))=\frac{\overline{Q}}{Q}(ML-m).$$

これより $R=\frac{m}{M}=q_1{}^{\eta_1}q_2{}^{\eta_2}$ とおくと次式が得られる.

$$\varphi(a)=\varphi(M)\varphi(L)=\frac{\overline{Q}}{Q}(ML-RM).$$

$$L-\varphi(L)=R=q_1{}^{\eta_1}q_2{}^{\eta_2}.$$

ここで $\eta_1=\varepsilon_1-e_1,\eta_2=\varepsilon_2-e_2$.

これがオイラー関数のときの 2 個のジーン q_1,q_2 に対応する卵の方程式である.

$\eta_1=\eta_2=0$ のとき,$a=q_1{}^{\varepsilon_1}q_2{}^{\varepsilon_2}p,(p$:素数) を通常解. これ以外の $a=q_1{}^{e_1}e_2{}^{\varepsilon_2}L$ をエイリアン解という. L が エイリアン a の卵である.

$e_1>0,e_2=0$ のとき.

$\varphi(M)=\frac{\overline{q_1}M}{q_1}$ によって

$$q_2\varphi(L)=\overline{q_2}(L-R),R=q_1{}^{\eta_1}q_2{}^{\varepsilon_2}.$$

これより

$$0\equiv q_2\varphi(L)=\overline{q_2}(L-R)\equiv\overline{q_2}L \mod q_2$$

よって, $0\equiv\overline{q_2}L \mod q_2$. $\overline{q_2}=q_2-1$ と q_2 は互いに素なので $0\equiv L \mod q_2$ が出て, L が q_2 で割れないことに反する.

こうして矛盾が導かれたのでこの場合は起きない.

証明からわかるように,2 個以上のジーン $q_1,q_2,\cdots$ についても同様の形で卵の方程式が成立する. $L-\varphi(L)$ は余関数 $\mathrm{co}\varphi(L)$ であることに注意するとよい.

5.1 エイリアンの卵の名前

パソコン君に依頼してジーンが 3 と 5 のときの卵 L を 10000 以下の場合に求めた. 意外に多かったので, 各卵にアルファベットで名前をつけた.

表 3: ジーンが 3 のときの卵

卵の名前	卵 $L(< 10,000)$	素因数分解	$\varphi(L)$	co$\varphi(L)$	素因数分解
A	115	$[5, 23]$	88	27	$[3^3]$
B	187	$[11, 17]$	160	27	$[3^3]$
C	781	$[11, 71]$	700	81	$[3^4]$
D	1195	$[5, 239]$	952	243	$[3^5]$
E	1357	$[23, 59]$	1276	81	$[3^4]$
F	1537	$[29, 53]$	1456	81	$[3^4]$
G	2563	$[11, 233]$	2320	243	$[3^5]$
H	3859	$[17, 227]$	3616	243	$[3^5]$
I	7909	$[11, 719]$	7180	729	$[3^6]$
J	9259	$[47, 197]$	9016	243	$[3^5]$

表 4: ジーンが 5 のときの卵

卵の名前	卵 $L(< 10,000)$	素因数分解	$\varphi(L)$	co$\varphi(L)$	素因数分解
A	69	$[3, 23]$	44	25	$[5^2]$
B	133	$[7, 19]$	108	25	$[5^2]$
C	1469	$[13, 113]$	1344	125	$[5^3]$
D	1853	$[17, 109]$	1728	125	$[5^3]$
E	2033	$[19, 107]$	1908	125	$[5^3]$
F	2369	$[23, 103]$	2244	125	$[5^3]$
G	2737	$[7, 17, 23]$	2112	625	$[5^4]$
H	2813	$[29, 97]$	2688	125	$[5^3]$
I	3293	$[37, 89]$	3168	125	$[5^3]$
J	3569	$[43, 83]$	3444	125	$[5^3]$
K	3713	$[47, 79]$	3588	125	$[5^3]$
L	3869	$[53, 73]$	3744	125	$[5^3]$
M	3953	$[59, 67]$	3828	125	$[5^3]$
N	4333	$[7, 619]$	3708	625	$[5^4]$
O	7969	$[13, 613]$	7344	625	$[5^4]$

5.2　ゴールドバッハ予想

これらの表を見ると 卵　L は異なる 2 つの奇素数の積となる場合がほとんどである．たとえば，ジーンが 3 で指数が 3 のとき $3^3 = 27, L = 115 = 5 \times 23$ になっているが $5 + 23 = 28 = 27 + 1$ となる．他の卵でも同じことが成り立つ．

その理由を探るために奇素数 Q がジーンで指数 ε とする．卵 L の方程式は $\mathrm{co}\varphi(L) = Q^{\varepsilon}$ になる．

$s = s(L)$ とおくとき $s = 1$ とする．$L = q^e$ とおくと，$\mathrm{co}\varphi(L) = q^{e-1}$．$L$ と $\mathrm{co}\varphi(L)$ は互いに素なので $e = 1$ となり矛盾．

$s = 2$ とすると $L = p^e \cdot q^f$ と相異なる素数 p と q の積になる．

$\mathrm{co}\varphi(L) = p^{e-1}q^{f-1}(pq - \overline{p} \cdot \overline{q}) = p^{e-1}q^{f-1}(p + q - 1)$ なので

$$p^{e-1}q^{f-1}(p + q - 1) = Q^{\varepsilon}.$$

これより $e = f = 1$. さらに $p + q = 1 + Q^{\varepsilon}$ を満たす．

$1 + Q^{\varepsilon}$ は 4 以上の偶数なのでゴールドバッハ予想を正しいとすれば 2 個の異なる素数の和でかける．よって，この場合卵は必ずある．

ゴールドバッハ予想

ゴールドバッハ (C.Goldbach 1690–1764) が オイラー (L.Euler 1707–1783) への書簡 (1742) で

5 以上の数は，3 つの素数の和として表せる．

という予想を記したことに起因する．現在ではもっと簡潔に

4 以上の偶数は,2 つの素数の和として表せる．

と述べることが多い．

ゴールドバッハ予想はだれでも理解のできる内容にもかかわらず，極めて難しい予想で 370 年以上たっても解けていない．ここで 5 の場合が不可解である．$5 = 2 + 2 + 1$ とすればよい，との理解だが，1 を素数と解していたらしい．

5.3 エイリアンの例

5.3.1 $m = 3^6$ のとき

$m = 3^6$ のとき $m\varphi(a) = \varphi(m)a - m\varphi(m)$ の解 a を求めた.

表 5: $m = 3^6$ のときの解

a	素因数分解	$\varphi(a)$	卵の名前
1458	$[2, 3^6]$	486	
3105 $*$	$[3^3, 5, 23]$	1584	A
3585$*$	$[3, 5, 239]$	1904	D
3645	$[3^6, 5]$	1944	
5049$*$	$[3^3, 11, 17]$	2880	B
5103	$[3^6, 7]$	2916	
7029 $*$	$[3^2, 11, 71]$	4200	C
7689 $*$	$[3, 11, 233]$	4640	G
8019	$[3^6, 11]$	4860	
9477	$[3^6, 13]$	5832	

5.3.2 $m = 5^4$ のとき

$m = 5^4$ のとき $m\varphi(a) = \varphi(m)a - m\varphi(m)$ の解を求めた.

表 6: $m=5^4$ のときの解

a	素因数分解	$\varphi(a)$	卵の名前
1250	$[2,5^4]$	500	
1725 $*$	$[3,5^2,23]$	880	A
1875	$[3,5^4]$	1000	
3325 $*$	$[5^2,7,19]$	2160	B
4375	$[5^4,7]$	3000	
6875	$[5^4,11]$	5000	
7345	$*\,[5,13,113]$	5376	C
8125	$[5^4,13]$	6000	
9265 $*$	$[5,17,109]$	6912	D
10165$*$	$[5,19,107]$	7632	E
10625	$[5^4,17]$	8000	
11845$*$	$[5,23,103]$	8976	F
11875	$[5^4,19]$	9000	
14065$*$	$[5,29,97]$	10752	G
14375	$[5^4,23]$	11000	
16465$*$	$[5,37,89]$	12672	I
17845$*$	$[5,43,83]$	13776	J
18125	$[5^4,29]$	14000	
18565$*$	$[5,47,79]$	14352	K
19345$*$	$[5,53,73]$	14976	L
19375	$[5^4,31]$	15000	
19765$*$	$[5,59,67]$	15312	M
23125	$[5^4,37]$	18000	

5.4 $m=5^3\times 3^2$ のときのエイリアンと卵

初めにジーンが 3 と 5 のときの卵を調べて名前をつける.

表 7: ジーンが 3 と 5 のときの卵

卵の名前	卵 $L(< 13000)$	素因数分解	$\varphi(L)$	co$\varphi(L)$	素因数分解
A	493	$[17, 29]$	448	45	$[3^2, 5]$
B	1003	$[17, 59]$	928	75	$[3, 5^2]$
C	1219	$[23, 53]$	1144	75	$[3, 5^2]$
D	1363	$[29, 47]$	1288	75	$[3, 5^2]$
E	2599	$[23, 113]$	2464	135	$[3^3, 5]$
F	3103	$[29, 107]$	2968	135	$[3^3, 5]$
G	4183	$[47, 89]$	4048	135	$[3^3, 5]$
H	4399	$[53, 83]$	4264	135	$[3^3, 5]$
I	5713	$[29, 197]$	5488	225	$[3^2, 5^2]$
J	6103	$[17, 359]$	5728	375	$[3, 5^3]$
K	6613	$[17, 389]$	6208	405	$[3^4, 5]$
L	8119	$[23, 353]$	7744	375	$[3, 5^3]$
M	8413	$[47, 179]$	8188	225	$[3^2, 5^2]$
N	8809	$[23, 383]$	8404	405	$[3^4, 5]$
O	9169	$[53, 173]$	8944	225	$[3^2, 5^2]$
P	9853	$[59, 167]$	9628	225	$[3^2, 5^2]$
Q	10063	$[29, 347]$	9688	375	$[3, 5^3]$
R	11203	$[17, 659]$	10528	675	$[3^3, 5^2]$
S	12193	$[89, 137]$	11968	225	$[3^2, 5^2]$

5.4.1 $m = 5^3 \times 3^3$ のときの解

$m = 5^3 \times 3^3$ のときの解を求め次の表をえた.

$m = 5^3 \times 3^3$ のときのエイリアン解はその卵 L のジーンが 3,5 でその指数が 2 以下である. すなわち $L = 5^{\eta_1} \times 3^{\eta_2}, (\eta_1 \leq 2, \eta_2 \leq 2)$

私は最初の段階では $L < 10000$ で卵を探したのでエイリアン解 182895 の卵が見つからなかった. そこで, このアイリアン解は何という暴れ馬だ, と嘆じた.

気を取り直して $L < 20000$ で探索し直したところ卵 S が見つかったのである.

$m = 5^3 \times 3^3$ のときのエイリアン解の最大値は 182895 であることは確実だが証明はできていない.

エイリアン解探索のときの範囲を十分安全にとるにはオイラー関数の余関数の値評価の精密化が必要であろう.

表 8: $m = 5^3 \times 3^3$ のときの解

a	素因数分解	$\varphi(a)$	卵の名前
6750	$[2, 3^3, 5^3]$	1800	
17955 $*$	$[3^3, 5, 7, 19]$	7776	B(表 4)
23625	$[3^3, 5^3, 7]$	10800	
36975 $*$	$[3, 5^2, 17, 29]$	17920	A
37125	$[3^3, 5^3, 11]$	18000	
43875	$[3^3, 5^3, 13]$	21600	
45135 $*$	$[3^2, 5, 17, 59]$	22272	B
54855 $*$	$[3^2, 5, 23, 53]$	27456	C
57375	$[3^3, 5^3, 17]$	28800	
61335 $*$	$[3^2, 5, 29, 47]$	30912	D
64125	$[3^3, 5^3, 19]$	32400	
77625	$[3^3, 5^3, 23]$	39600	
85695 $*$	$[3, 5, 29, 197]$	43904	I
97875	$[3^3, 5^3, 29]$	50400	
104625	$[3^3, 5^3, 31]$	54000	
124875	$[3^3, 5^3, 37]$	64800	
126195 $*$	$[3, 5, 47, 179]$	65504	M
137535 $*$	$[3, 5, 53, 173]$	71552	O
138375	$[3^3, 5^3, 41]$	72000	
145125	$[3^3, 5^3, 43]$	75600	
147795 $*$	$[3, 5, 59, 167]$	77024	P
158625	$[3^3, 5^3, 47]$	82800	
178875	$[3^3, 5^3, 53]$	93600	
182895 $*$	$[3, 5, 89, 137]$	95744	暴れ馬 (S)
199125	$[3^3, 5^3, 59]$	104400	
205875	$[3^3, 5^3, 61]$	108000	
226125	$[3^3, 5^3, 67]$	118800	
239625	$[3^3, 5^3, 71]$	126000	