数学の研究を始めよう (15)
平行移動問題の深い闇と 1 条の光

飯高 茂

平成 26 年 4 月 6 日

連載を始めてはや 1 年半になろうとしている.「数学の研究を始めよう (15)」というように題に (15) がついている. これは良くない. 新しい読者を門前払いしているようで申し訳ない.

そこで, 今回は繰り返しを気にしないで初心に戻り分かりやすさを優先することにした.

1　2 次方程式の平行移動

問 a を変数として $a^2 - 5a + 6 = 0$ を解きなさい.

このとき $a = 2, 3$ が解であることはいうまでもない.
この問題の平行移動は次の通り:
定数 x に対して $a^2 - 5a + 6 = x$ の解があるのはいつか, 解のあるときは何個か.

この問題に対して高校生ならば判別式 D をすぐ求めるであろう.
$D = 25 - 4(6 - x) = 1 + 4x$ になるので $x \geq -\frac{1}{4}$ のとき解がある.
さらに $x = -\frac{1}{4}$ のとき解は 1 つ. それ以外は 2 つ.

これは完璧な結果である. このように美しい結果を他の問題でも得たいものである. ここでは 2 乗関数 a^2 の代わりに自然数 a の約数の和 $\sigma(a)$, またはオイラー関数 $\varphi(a)$, さらにはオイラー陪関数 $\tilde{\varphi}(a)$ を使ったらどうなるか考えてみよう.

2　完全数の平行移動問題

自然数 a の約数の和を $\sigma(a)$ と表すとき, $\sigma(a) - 2a = 0$ を満たす自然数 a を古代ギリシャの数学者は**完全数**と呼んだ. $a = 6, 28$ はその例である. 完全数は現在まで人類あげての努力の結果 48 個見つかった. しかし無限にあるかどうかは依然として不明である.

完全数の平行移動問題とは 定数 x に対して $\sigma(a) - 2a = x$ を満たす自然数 a を求めることである.

表 1:

a	素因数分解	$\sigma(a)$	$\sigma(a)-2a=x$
3	$[3]$	4	-2
10	$[2,5]$	18	-2
2	$[2]$	3	-1
4	$[2^2]$	7	-1
8	$[2^3]$	15	-1
16	$[2^4]$	31	-1
32	$[2^5]$	63	-1
64	$[2^6]$	127	-1
6	$[2,3]$	12	0
28	$[2^2,7]$	56	0
20	$[2^2,5]$	42	2
18	$[2,3^2]$	39	3
12	$[2^2,3]$	28	4
70	$[2,5,7]$	144	4
88	$[2^3,11]$	180	4
56	$[2^3,7]$	120	8
40	$[2^3,5]$	90	10
24	$[2^3,3]$	60	12
30	$[2,3,5]$	72	12
42	$[2,3,7]$	96	12
54	$[2,3^3]$	120	12
66	$[2,3,11]$	144	12
78	$[2,3,13]$	168	12
100	$[2^2,5^2]$	217	17

この表の観察の結果

- $x=-1$ のとき a は 2 の累乗が出ている.
- $x=0$ のとき a は完全数になりそうだ. 実際 6,28 が出ている.
- $x=1$ のとき 解はないのだろう.
- $x=12$ のとき $a=6p$. ただし p は 2,3 以外の素数または 4,9 など.
- $x=5,7,9,11$ のときも解はないだろう.
- $a=2^3\times 11, 2^3\times 7, 2^3\times 5, 2^3\times 3$ のとき $x=4,8,10,12$

などが気になる. しかしこれらを解決することは非常に難しいようだ.

最後の場合を考えてみる. $a=8p, p:($ 奇素数$)$, のとき $8\sigma(a)=15a+15\times 8$. よって $8(\sigma(a)-2a)=120-a=8(15-p)$. したがって $p=11,7,5,3$.

$x = 12, 56,$ などのとき, すなわち完全数の 2 倍になる場合の解 a は無限にあることはわかっている.

このほかに $x = -1$ のとき $a = 2^e (e > 0)$ はすべて解なのだが, これで $\sigma(a) - 2a = x$ に無限個の解のある場合が尽きているかどうかはわからない.

$x > 0$ のとき $\sigma(a) - 2a = x$ の解を過剰数 (abundant number) という. x を過剰度 (abundance) と言うこともある. $x < 0$ なら不足数 (deficient number) という.

過剰度 1 の過剰数は実在するかどうか不明である. また不足度 1 の不足数は 2 のべきに限るかどうか, 不明である.

過剰数を順に並べると $a = 12, 18, 20, 24, 30, 36, \cdots$.

これは単に計算するだけで簡単ではあるが, 過剰数の存在する過剰度を決める問題は難しい. 与えられた過剰度を持つ過剰数の決定もやっかいな問題である.

On line encyclopedia of integer sequences, A005101 に詳しい情報がある.

関数 $\sigma(a)$ についての問題は, 言ってみれば約数に関することであるが, これらに関する問題を一般的に解くことは非常に難しい. 完全数の平行移動問題も深い闇の中にある. 一条でもよいからどこかに光が見えないものだろうか.

3　オイラー関数の平行移動

$a = 2^e (e > 0)$ は $\varphi(a) = 2^{e-1}$ によって $2\varphi(a) = a$ を満たす．逆に $2\varphi(a) - a = 0$ を満たす自然数 a は $a = 2^e$ と書ける．このことを証明することは容易である．

さて $a = 2^e (e > 0)$ は $\sigma(a) = 2a - 1$ を満たすが逆にこの式を満たす a は 2 の累乗に限ると想像されているが, まだ証明されていない．一見簡単そうに見えることが依然として証明できないことは驚異である．この例から見ると約数の和関数 $\sigma(a)$ に比べるとオイラー関数の方が扱いやすいと思われる．

$2\varphi(a) - a = 0$ を満たす a を求める問題の平行移動は「与えられた定数 x に対して $a - 2\varphi(a) = x$ を満たす自然数 a を求めよ.」となる．しかしこれを完全に解くことは難しい. そこでパソコン君に依頼して $a - 2\varphi(a)$ を計算してもらう．

表 2: $a-2\varphi(a)$ の順に並べた

a	素因数分解	$\varphi(a)$	$a-2\varphi(a)=x$
13	$[13]$	12	-11
11	$[11]$	10	-9
27	$[3^3]$	18	-9
39	$[3,13]$	24	-9
63	$[3^2,7]$	36	-9
33	$[3,11]$	20	-7
7	$[7]$	6	-5
5	$[5]$	4	-3
9	$[3^2]$	6	-3
21	$[3,7]$	12	-3
45	$[3^2,5]$	24	-3
3	$[3]$	2	-1
15	$[3,5]$	8	-1
2	$[2]$	1	0
4	$[2^2]$	2	0
8	$[2^3]$	4	0
6	$[2,3]$	2	2
10	$[2,5]$	4	2
14	$[2,7]$	6	2
22	$[2,11]$	10	2
12	$[2^2,3]$	4	4
20	$[2^2,5]$	8	4
28	$[2^2,7]$	12	4
44	$[2^2,11]$	20	4
52	$[2^2,13]$	24	4
18	$[2,3^2]$	6	6
24	$[2^3,3]$	8	8
40	$[2^3,5]$	16	8

この表の観察の結果

- $x=-1$ のとき a は フェルマー素数の積.
- $x<0$ のとき x は奇数.
- $x=0$ のとき a は 2 の累乗.
- $x=2$ のとき $a=2p$. ただし p は 奇素数.
- $x=1,3,5,7$ のとき 解はない.
- $x=4$ のとき $a=4p$. ただし p は 奇素数.

など正しそうである.

$a-2\varphi(a)>0$ なら a をオイラー関数に関しての過剰数, $a-2\varphi(a)$ をその過剰度と呼んでもよいであろう. 同様にオイラー関数に関しての不足数も定義できる. そこで

- 不足度 1 の不足数はフェルマー素数の積として書ける.
- 過剰度が 1,3,5,7 のオイラー関数に関しての過剰数は存在しない,

という予想を立てたい. これらの解決は本質的に困難がありそうで, 深い闇を嘆くほかない.

ところで漢字の「闇」は門構えに「音」である. 書家の武田双雲さんの解説を参考に次のように考えてみた.

大きな門のある場所で明かりの全く無い深夜を想像してみる. 昼には見えた門は全く見えない. そこに, 人が歩いてくる. 見えないが下駄の音だけは響く.

闇を表現するのに音を使ったところが凄い. $a-2\varphi(a)=1$ を満たす解を探そうとすると, このような闇を連想する.

4 オイラー陪関数

自然数 a の相異なる素因子の数を $s(a)$ と書き, $s=s(a)$ とおく. $\varphi(a)/2^s$ を $\widetilde{\varphi}(a)$ と書く. すなわち

$$\widetilde{\varphi}(a)=\frac{\varphi(a)}{2^s}$$

$\widetilde{\varphi}(a)$ を**オイラー陪関数** と呼ぶ.

$\widetilde{\varphi}(6)=\frac{1}{2}$ のようにオイラー陪関数の値は半整数 (2 倍すれば整数になる数のこと) になることもあるが乗法性という優れた性質をもっている.

5 $a-2\widetilde{\varphi}(a)$ の値

$a-2\widetilde{\varphi}(a)$ は $\widetilde{\varphi}(a)$ の余関数と呼ばれ, $\mathrm{co}\widetilde{\varphi}(a)$ と書かれる. $\mathrm{co}\widetilde{\varphi}(a)=1$ は a が素数になる必要十分条件である.

a が素数でない場合は $\mathrm{co}\widetilde{\varphi}(a)\geq\sqrt{a}$ で下から a が評価される.

この場合について $\mathrm{co}\widetilde{\varphi}(a)=2,3,\cdots,20$ についてパソコン君に数表を作ってもらった.

ここでは, a の値が逆転するところで横線を入れた. また a と $a-2\widetilde{\varphi}(a)$ が互いに素な箇所は $*$ で示した.

与えられた x に比して a の値が大きい場合は 素因子の個数 が 1 の場合であることも分かる.

次に手計算でこの表を確かめることにする. その過程で定理を求めて一般的な結果を探してみよう.

表 3: $a-2\widetilde{\varphi}(a)$ の表

a	素因数分解	$\widetilde{\varphi}(a)$	$\mathrm{co}\widetilde{\varphi}(a)$
4	$[2^2]$	3	2
9	$[3^2]$	6	3
8	$[2^3]$	6	4
6 $*$	$[2,3]$	5.5	5
25	$[5^2]$	15	5
49	$[7^2]$	28	7
10	$[2,5]$	9	8
16	$[2^4]$	12	8
27	$[3^3]$	18	9
12	$[2^2,3]$	11	10
14 $*$	$[2,7]$	12.5	11
15 $*$	$[3,5]$	13	11
121	$[11^2]$	66	11
169	$[13^2]$	91	13
18	$[2,3^2]$	16.5	15
21	$[3,7]$	18	15
20	$[2^2,5]$	18	16
32	$[2^5]$	24	16
22 $*$	$[2,11]$	19.5	17
289	$[17^2]$	153	17
361	$[19^2]$	190	19
24	$[2^3,3]$	22	20
26	$[2,13]$	23	20

5.1 $s(a)=1$ のとき

$s(a)=1$ の場合は $a=p^e$ の形に素数 p を用いて書けるので簡単な計算の結果

$$a-2\widetilde{\varphi}(a)=p^e-p^{e-1}\overline{p}=p^{e-1}.$$

$x\leq 20$ のとき, 2,3,4,5,7,8,9,11,13,16,17,19 がこの場合になる.
$x=19$ なら $a=19^2=361$ でこの場合 a の値がもっとも大きくなる.
残りの x は 6,10,12,14,15,18,20,21,22,24,26 にすぎない.

5.2 $s(a)=2$

$s(a)=2$ の場合は $a=p^eq^f$ (p,q は相異なる素数) の形に書ける.

$$a-2\widetilde{\varphi}(a)=\frac{2p^eq^f-p^{e-1}q^{f-1}\overline{pq}}{2}=\frac{1}{2}\cdot p^{e-1}q^{f-1}(2pq-\overline{pq}).$$

$x=\frac{1}{2}\cdot(2pq-\overline{pq})=\frac{(p+1)(q+1)-2}{2}$ なのでこれが 20 以下の場合を求める．そのために次の表を利用する．ただし,$a=pq, w=2x+2$.

表 4: $(p+1)\times(q+1)$ の表

	p	2	3	5	7	11
q		3	4	6	8	12
2	3	9	12	18	24	36
3	4	12	16	24	32	48
5	6	18	24	36	48	72
7	8	24	32	48	64	96

ここで対角線の上の数は $p=q$ なので使えない.

- $w=12=3\times 4, p=2, q=3, x=5, a=6,$
- $w=18=3\times 6, p=2, q=5, x=8, a=10,$
- $w=24=3\times 8, p=2, q=7, x=11, a=14,$
- $w=36=3\times 12, p=2, q=11, x=17, a=22.$

$x=17$ なら $a=17^2$ に加えて $a=22$ もあることがわかる.

5.3 $s(a)>2$ の場合

$s(a)\geq 3$ なので

$$\widetilde{\varphi}(a)\leq\frac{a-2}{8}.$$

これを $8\widetilde{\varphi}(a)\leq a-2$ と変形し $a-2\widetilde{\varphi}(a)=x$ に代入すると $4a-4x\leq a-2$ になり

$$3a\leq 4x-2.$$

$x\leq 20$ とすれば $a\leq 26$. しかし仮定 $s(a)\geq 3$ によれば $a\geq 30=2\times 3\times 5$. よってこの場合は起きない.

以上によって, 表が確認された．また証明の方法から計算が容易にできることがわかった.

5.4 5^3 に対する卵の決定

この項は現役高校生の研究結果の紹介である.

問題は $L-2\widetilde{\varphi}(L)=5^3$ を満たす整数 L で 5 と互いに素なものを決定することである.

すなわちジーンが 5 で指数が 3 の場合のエイリアンの卵 L の決定問題を解く．卵の条件から L は平方因子を含まないばかりか $s=s(L)>1$ であることはすぐ分かる.

1). $s=2$. $L=pq, p<q$ とする.
$\tilde{p}=p+1, \tilde{p}=q+1$ を用いると

$$L-2\widetilde{\varphi}(L)=\frac{2pq-\overline{p}\cdot\overline{q}}{2}=\frac{pq+p+q-1}{2}$$

となるので

$$\tilde{p}\tilde{q}=2(5^3+1)=2^2\cdot 3^2\cdot 7.$$

$p=2$ のとき
$q+1=\frac{2(5^3+1)}{3}=84$ によって $q=83$. これは素数. よって $L=2\times 83=166$ が解のひとつ.

$p\geq 3$ のとき
$\tilde{p},\tilde{q}$ はそれぞれ偶数なので $2A$, $2B$ と書けるから, $\tilde{p}\tilde{q}=2A\times 2B$.
$A,B\geq 2, AB=3^2\times 7$ によって 次の場合がある.

i. $A=3, B=21$. ゆえに $p=6-1=5, q=42-1=41$. うまく素数が出てきた. しかしこの場合は $L=5\times 41=210$ が 5 と互いに素にならないので除外する.

ii. $A=7, B=9$. ゆえに $p=14-1=13, q=18-1=17$. よって $L=13\times 17=221$.
結局 $L=166, 221$ が解になることが証明された.

2). $s=3$.
$L=pqr, p<q<r$ とし, これらは素数とする.
$s\geq 3$ によって $3L\leq 4(125-1)=496$. したがって $L\leq 162$.
i. $p=2$ のとき.

$$L-2\widetilde{\varphi}(L)=2qr-\frac{\overline{q}\cdot\overline{r}}{4}=125$$

から

$$7qr+q+r=4\cdot 5^3+1=501.$$

$q=\frac{501-r}{7r+1}$ になる.

表 5:

r	$501-r$	$7r+1$	q
3	498	22	22.63636364
5	496	36	13.77777778
7	494	50	9.88
11	490	78	6.282051282
13	488	92	5.304347826
17	484	120	4.033333333
19	482	134	3.597014925
23	478	162	2.950617284

ここで q は素数にならないので, この場合はおきない.

$L = 3 \times 5 \times 7 = 105$ なら $L - 2\widetilde{\varphi}(L) = 57 < 125$. これは不適.
一方次に大きい場合は $L = 3 \times 5 \times 11 = 165$ になり 162 を超えてしまう.
かくして, ジーンが 5 で指数が 3 のときの卵は $L = 2 \times 83, 13 \times 17$ だけであることが分かった.

5.5 研究課題

関連して次の課題をあげておく.
ジーンが 5 で指数が 2 のときの卵はないことを示せ. いいかえれば, $L - 2\widetilde{\varphi}(L) = 5^2$ の解がないことを示せ (ここで自然数 L は 5 と互いに素.)
$L - 2\widetilde{\varphi}(L) = 5^4$ の解もないらしい (ここで自然数 L は 5 と互いに素.)
$L - 2\widetilde{\varphi}(L) = 5^5$ の解の決定は大変そうである.

このようにオイラー陪関数の場合なら計算ができてその結果を証明できる. 本来のオイラー関数の場合に比べてはるかに明るい. 希望の光が輝くことを感じる.
このようにオイラー陪関数には大きな長所がある.

6　$a - 4\widetilde{\varphi}(a) = x$ の研究

$a - 4\widetilde{\varphi}(a) = 0$ なら $a = 2^e$ とかけることはわかっている. そこでこの平行移動を試みる. すなわち, $a - 4\widetilde{\varphi}(a)$ の数表をパソコン君につくってもらう.

6.1　$x \leq 0$ の場合

表 6: $a - 4\widetilde{\varphi}(a) = x$ が負のとき

a	素因数分解	$\widetilde{\varphi}(a)$	$x \leq 0$
29	[29]	14	−27
81	[3^4]	27	−27
23	[23]	11	−21
19	[19]	9	−17
17	[17]	8	−15
25	[5^2]	10	−15
13	[13]	6	−11
11	[11]	5	−9
27	[3^3]	9	−9
7	[7]	3	−5
5	[5]	2	−3
9	[3^2]	3	−3
3	[3]	1	−1
2	[2]	0.5	0
4	[2^2]	1	0
8	[2^3]	2	0
16	[2^4]	4	0
32	[2^5]	8	0
64	[2^6]	16	0

表を観察してから分かることを列挙してみよう.

- $x < 0$ のとき, x は奇数で, a は奇素数の累乗. とくに $s = 1$.
- a が奇素数 p のとき $x = 2 - p$. たとえば $a = 29, 19, 17, 13, 11, 7, 5$.
- $x = 0$ のとき,a は 2 の累乗, 言い換えれば $a = 2^e$.

ここにおいて $x = 0$ のときは $a = 4\widetilde{\varphi}(a)$ なので 陪関数の比較定理として一般化され次のようになる.

与えられた m に対し $\frac{\widetilde{\varphi}(m)}{m} = \frac{\widetilde{\varphi}(a)}{a}$ が成り立つとき, m の相異なる素因子を $q_1, \cdots, q_s$ とおくと, それらのべきの積が a になる.

$m = 2$ なら $\frac{\widetilde{\varphi}(m)}{m} = \frac{1}{4}$ なので書き換えれば $x = 0$ のときになる.

6.2 $a - 4\widetilde{\varphi}(a) = x > 0$

$a - 4\widetilde{\varphi}(a) = x > 0$ のときの表を見てみよう.

表 7: $a - 4\widetilde{\varphi}(a) = x$ の場合

a	素因数分解	$\widetilde{\varphi}(a)$	$x > 0$
6	$[2, 3]$	0.5	4
10	$[2, 5]$	1	6
15 $\sharp$	$[3, 5]$	2	7
12	$[2^2, 3]$	1	8
14	$[2, 7]$	1.5	8
21	$[3, 7]$	3	9
35 $\sharp$	$[5, 7]$	6	11
18	$[2, 3^2]$	1.5	12
20	$[2^2, 5]$	2	12
22	$[2, 11]$	2.5	12
33 $\sharp$	$[3, 11]$	5	13
26	$[2, 13]$	3	14
39 $\sharp$	$[3, 13]$	6	15
55	$[5, 11]$	10	15
24	$[2^3, 3]$	2	16
28	$[2^2, 7]$	3	16
65 $\sharp$	$[5, 13]$	12	17
77$\sharp$	$[7, 11]$	15	17
34	$[2, 17]$	4	18

$\sharp$ は卵型の場合, すなわち a と $a - 4\widetilde{\varphi}(a)$ が互いに素な場合でありこの場合は特に興味がある. 次の事柄が観察できる.

- $x = 1, 2, 3, 5$ の場合はおきない.
- $x = 4$ なら $a = 6$.
- $x = 6$ なら $a = 10$.
- $x = 7$ なら $a = 15$.

これらの性質を証明するために, $s = 1, s = 2, s \geq 3$ のそれぞれの場合について $a - 4\widetilde{\varphi}(a)$ を詳しく調べる.

7 $s=1,2,3,\cdots$ のとき

1.$s=1$.
このとき素数 p の累乗で $a=p^e$ と書ける.
$2\widetilde{\varphi}(a)=p^{e-1}\overline{p}(\overline{p}=p-1)$ により

$$a-4\widetilde{\varphi}(a)=p^e-2p^{e-1}\overline{p}=2p^{e-1}(p-2\overline{p})=p^{e-1}(2-p).$$

$p=2$ のときは $a=2^e$ であってこのときのみ $a-4\widetilde{\varphi}(a)=0$.
$p>2$ のとき $a-4\widetilde{\varphi}(a)=p^{e-1}(2-p)<0$. この値は負の奇数.

2.$s\geq 2$.
$\widetilde{\varphi}(a)\leq\frac{\varphi(a)}{4}\leq\frac{a-1}{4}$ が成り立つので

$$4\widetilde{\varphi}(a)\leq a-1.$$

これより $a-4\widetilde{\varphi}(a)\geq 1$. したがって, この対偶によれば
$a-4\widetilde{\varphi}(a)<1$ ならば $s=1$.
これより, $x=a-4\widetilde{\varphi}(a)<0$ のとき $a=p^e, p>2$ と書けて $-x=p^{e-1}(p-2)$.

$x<0$ のときの値は $-p^{e-1}(p-2)$ である.
たとえば同じ x を与える a が複数個あるのはどんな場合か. という問いに答えるには奇素数 p,q に対して負でない整数 e,f で $p^{e-1}(p-2)=q^{f-1}(q-2)$ となるのを探せばよい.
パソコン君に依頼して $a-4\widetilde{\varphi}(a)$ が等しい値になる p^e と q^f のペアを探したら次の結果が得られた.

$$(5,3^2),(11,3^3),(17,5^2),(29,3^4),(37,7^2),(83,3^5),(101,11^2),(257,17^2),\cdots$$

これによって $-a+4\widetilde{\varphi}(a)$ の値を求めると次のようになる.

$\langle 1\rangle$ $(5,3^2)$ については $a=5,9$ のとき $-a+4\widetilde{\varphi}(a)=3$.

$\langle 2\rangle$ $(11,3^3)$ については $a=11,27$ のとき $-a+4\widetilde{\varphi}(a)=9$.

$\langle 3\rangle$ $(29,3^4)$ については $a=29,81$ のとき $-a+4\widetilde{\varphi}(a)=27$.

7.1　卵型の解

$x = a - 2\widetilde{\varphi}(a)$ とおくとき x と a が互いに素な場合は a はエイリアンの卵である．そこで $a - 4\widetilde{\varphi}(a)$ と a が互いに素な場合 a を**卵型**と呼ぶ．この場合は最も特徴的と考えられる．

$s = 1$ のとき卵型なら $a = p$ と書けて $x = 2 - p$ となる．

$2 - x$ が素数 p の場合は 卵型の解 p がある．

7.2　$s \geq 2$ の場合

$s \geq 2$ のとき定義から $\widetilde{\varphi}(a) \leq \frac{\varphi(a)}{4}$ により $a - 4\widetilde{\varphi}(a) > 0$．よって $a - 4\widetilde{\varphi}(a)$ は正の値になる．

次に $s = 2$ のときと $s > 2$ のときに分けて調べる．

7.3　$s = 2$ のとき

$s = 2$ ならば $a = p^e q^f$ と相異なる素数 p, q のそれぞれの累乗で書けるからによって

$$a - 4\widetilde{\varphi}(a) = p^{e-1}q^{f-1}(pq - \overline{pq}) = p^{e-1}q^{f-1}(p + q - 1).$$

この特別な場合として次に注目しよう．

解が卵型のとき $e = 1, f = 1$．このとき $a - 4\widetilde{\varphi}(a) = p + q - 1$．

$x = a - 4\widetilde{\varphi}(a)$ とおくとき $x + 1 = p + q$ となる．

7.4　Goldbach の予想

偶数 $x + 1$ が 8 より大なら,$x + 1 = p + q$ を満たす相異なる奇素数 p, q があるか?．

という問題があり，これが常に可能なことを **Goldbach の予想**という．

したがって $x \geq 7$ なら $s = 2$ を満たす卵型の解 L ($s(L) = 2$) があると希望的に言える．

x が偶数のとき $x - 1$ が素数 q なら 卵型の解 $a = 2q$ がある．

7.5　$s \geq 3$ の場合

$s \geq 3$ ならば $\widetilde{\varphi}(a) \leq \frac{\varphi(a)}{8} \leq \frac{a-1}{8}$ によって $8\widetilde{\varphi}(a) \leq a - 1$ なので

$$a - 4\widetilde{\varphi}(a) \geq 4\widetilde{\varphi}(a) + 1.$$

$s \geq 3$ のとき $\widetilde{\varphi}(a)$ の最小値は 1．それは $a = 30$ のときである．したがって $a - 4\widetilde{\varphi}(a) \geq 26$．ここで等号は $a = 30$ のとき成立．パソコン君に依頼して次の表を得た．

これによれば $x = a - 4\widetilde{\varphi}(a) \leq 78$ を満たすのは $s = 3$ なら上にあげた場合になりそれ以外は $s = 2$ なので相異なる素数 p, q と整数 $e, f > 0$ について解き $a = p^e q^f$ を求めるだけのことになる．

$$x = p^{e-1}q^{f-1}(p + q - 1).$$

かくしてオイラー陪関数の平行移動問題は労苦さえ惜しまなければ解決できそうなのである．ここに希望の光が見える．

表 8: $s \geq 3$ のとき

a	factor	$\widetilde{\varphi}(a)$	$a - 4\widetilde{\varphi}(a)$
30	[2,3,5]	1	26
42	[2,3,7]	1.5	36
60	$[2^2, 3, 5]$	2	52
66	[2,3,11]	2.5	56
70	[2,5,7]	3	58
78	[2,3,13]	3	66

7.6 $x \geq 7$ の場合

とくに，$x = 1, 2, 3, 5, 7$ の場合に解がないことを示したい.

前の項の議論から $s = s(a) > 1$ は分かるから $s = 2$ のとき求めればよい.

$$x = p^{e-1}q^{f-1}(p + q - 1) \geq p + q - 1 \geq 4$$

が成り立つ.

よって $0 < x < 4$ なら解なし.

$x = 4$ なら $p = 2, q = 3, e = f = 1$. よって $a = 6$.

$x = 5$ なら $e = f = 1$. よって $5 = p + q - 1$. 解なし.

$x = p^{e-1}q^{f-1}(p + q - 1) \geq 4p^{e-1}q^{f-1}$ に注意すると $x = 6, 7$ なら $e = f = 1$. $x + 1 = p + q$. これを解く.

$p = 2$ なら奇素数 q によって $x = 1 + q, a = 2q$.

$x = 7$ なら $e = f = 1$. よって $x + 1 = 8$ なので $p = 3, q = 5; a = 15$ が解 .

表 9: $p = 2$, 奇素数 q の場合

q	x	a
5	6	10
7	8	14
11	12	22

これによって, $x = 6, 8, 12$ の場合が決定された.

$p = 3$ なら奇素数 q によって $x = 2 + q, a = 3q$.

表 10: $p = 3$, 奇素数 $q > 3$ の場合

q	x	a
7	9	21
11	13	33
13	15	39.

これによって, $x = 9, 13, 15$ の場合が決定された.

研究課題

$x = a - 4\widetilde{\varphi}(a) \leq 27$ を満たす a を求めよ.

このようにして, 陪関数の場合は素因子の個数がうまく評価できるので具体的な結果がでやすい. これは 陪関数のもつ優れた性質の例である.