# 数学の研究を始めよう (17a) 2014/October
# 三角関数を面積で導入する

飯高 茂

平成 26 年 8 月 5 日

## 1　高校数学を社会人に教える

5 年半前にカルチャーセンターの方から「高校の数学教科書を用いた数学の講座を開きたい. ついては協力してほしい」というメールをもらった. 全く存じ上げない方だったが当時 4 年後に定年になることで死にそうなほど悩んでいたので渡りに舟とばかりに引き受けた. 依頼主は私のホームページをみて頼みやすい人と判断したのだそうだ.

カルチャーセンターとして、高校数学教科書を用いた数学講座の開設の趣旨をきいたところ「数学をちゃんと理解したいという気持ちのある社会人は一定程度いるのは間違いない. カルチャーセンターにそのような要望が寄せられることもある. 高校 1 年の数学から初めて行けば 3,4 年は継続できるだろう」このような趣旨の説明であった.

カルチャーセンターに集まる社会人には熟年者とくに定年退職者が多い. とかく嫌われることが多い数学を学ぶために継続的に来てくれる高齢の人がいるだろうか. はなはだ心配なことであった. カルチャー内部の議論でもこの講座が成立するかどうか危惧され, 悲観論が多かったそうだ.

夏休み明けから「高校の数学教科書を用いた数学の講座」を開設する旨を宣伝すると意外に反響が大きく最終的には 27 名の受講者が集まった. これは予想より多くカルチャーセンターの新しい試みとしては大成功と言ってよいものであった.

集まったメンバーには熟年の男性が多かったが年配の女性も目立った. しかし女子高校生もひとりいた. 「街の塾より安いのでここに来た」と説明してくれたが, 彼女は熟年世代に負けずにがんばり講義が終わると毎回関係のない数学の宿題も持って質問にきた.

### 1.1　三角法

数学 I の最初は「式と計算」,「２次式」などでこれらが終わると「図形と計量」. 要するに三角法を教えることになった. 三角法を講じるにあたりその歴史をあらためて勉強した. 三角法の歴史は深く広い. 昔の数学応用の過半は三角法に関するものであった. 三角法の数表の完成は桁の大きい数の積と商の近似計算を可能にし, 対数表のでてくる前の時代は長い間三角表が活躍していた.

三角法の重要な応用は三角測量である. 熟年世代に配慮して、軍艦大和のもつ測距儀を用いた距離計算を説明した. 大和の測距儀の基準長は 15.72 メートルある. 測距儀から得られた角度のデータをもとに敵艦の位置を決める式を求める. 測距儀の辺とそれを挟む 2 つの角度を計測すれば、三角形はただ 1 つ決まるのでそれから大和に対する相対位置としての敵艦の座標が決まる. この計算は２元 1 次方程式を解くことになる. 要するに鶴亀算である.

役に立たない数学の典型と思われる鶴亀算がこういうとき重要な役を演じるのである. 基準長とその両端の角度を与えられれば敵艦の位置が決まるプログラムをエクセルで書いた. 台本を作り講義中に寸劇を行った. 助手を務める学生が「敵艦の角度が４８．３度と４８．９度」などと叫ぶ. すると相対座標と距離がエクセルで自動的に求まるので艦長気取りの私が「距離マルマルｋｍ、主砲発射」などと悪乗りをする. 受講している熟年世代も少年のように目を輝かせる. 三角法の威力はすごいものであることをみなで実感した.

### 1.2　一般角

私も編集に長く関わった検定教科書であるが、実際に使ってみると感動の伝わらないことが目についた. 「教科書ではこう説明しているが面白くないですね. もっとうまい説明をしましょう.」などと教科書批判することが次第に多くなった. 教科書を詳しく批判的に読むには実際に教えてみるにこしたことはない. 数学 I,II を教えて自分なりに発見することがよくあった. たとえば、一般角を教えるにあたり、ネットでチェックすると「オイラーが一般角を導入した」と説明されていた. これには驚いた. 一般角はオイラー起源だったのか. 英語で一般角をなんというかが調べてもわからない. これは教育のために導入された日本独特の言い回しの可能性があると思う.

あらためて考え直してみると、実数全体を加法群とみて、そこに 360 の生成する部分群を考えその商群の元として角度をとらえるべきであることに気づいた. 商群の元としての角度があればそれを代表する実数が一般角である. カルチャーで教えるのだから角度を現代数学から扱えば商群の元であるという話までする. 内容は高校数学でもすこし高級な視点が紹介できる. 内分や外分も扱う. その昔、わたくしも高校でこれらを習ったがいまいちピンとこなかった. しかしカルチャーで教えてみるとじつによくわかって楽しい.

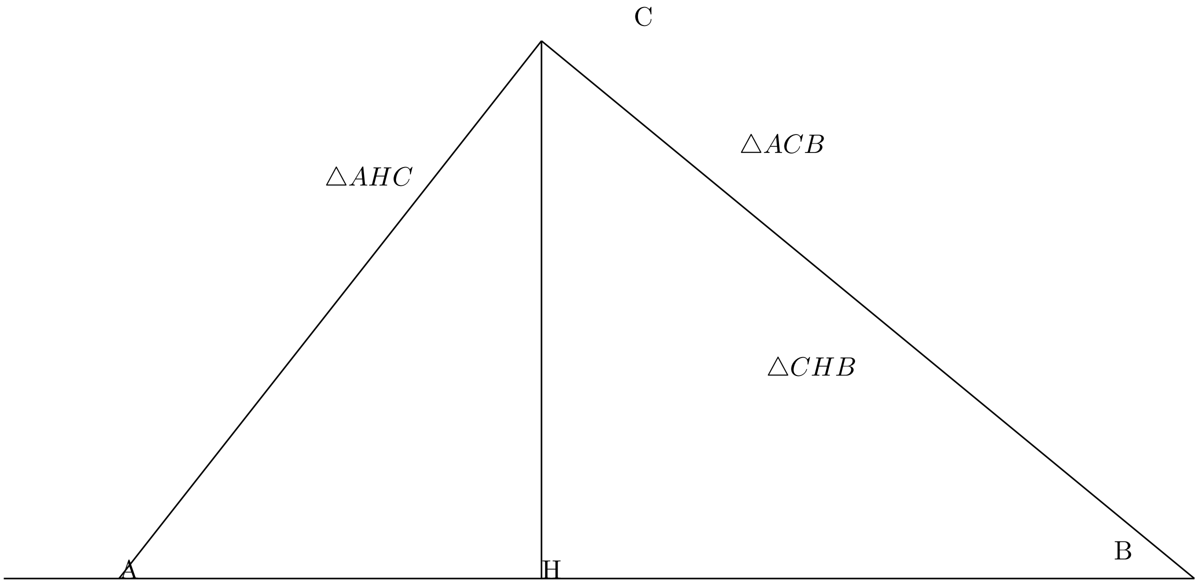
以前, 高校の数学を習ったときは先生の説明を従順に受け入れた. しかし長く数学の教育と研究をした経験を基に教科書を読み直し講義してみると試みたいことがいろいろ出てくる. 簡単なことでも視点を変えてやり直すと面白くなることが多かった.

## 2　ピタゴラスの定理

三角比では公式 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ を教える. これはピタゴラスの定理の定理から出るが, ピタゴラスの定理は学校教育では 3 平方の定理ともいう. 「これから公式 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ はすぐ導けます」と言って済ませたいところだが社会人にとってピタゴラスの定理は聞いたことはあるけれど, 何でしたっけという程度に遠い存在である.

そこで証明に入る. しかしユークリッドの数学原論以来の証明を繰り返すのも大変なので少し工夫してみたら, ピタゴラスの定理無しで公式 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ を導けることに気がついた.

$C$ を直角とする $\triangle ABC$ を考える. 斜辺 $AB$ を水平におき, $C$ を上にして $C$ から $AB$ に垂線を引く. 垂線の足を $H$ とする.




$AB = AH{+}HB$ に注目する．定義から $AH = AC\cos A, HB = BC\sin A, AC = AB\cos A, BC = AB\sin A$.

$\angle BAC$ を $A$ と書いている．ここで $A = \angle BAC = \angle BCH$ に注意すべきである．

$$AH = AC\cos A = AB\cos A\cos A = AB\cos^2 A.$$

$$HB = BC\sin = AB\sin A\sin A = AB\sin^2 A.$$

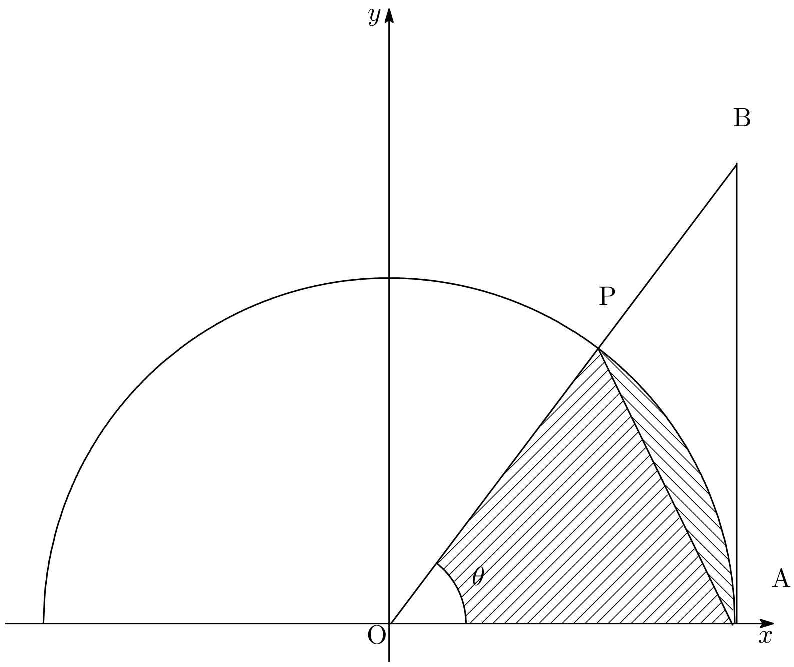
これらによって

$$AB = AH + HB = AB\cos^2 A + AB\sin^2 A = AB(\cos^2 A + \sin^2 A).$$

ゆえに, AB で割って $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ が出る．その上, $AC = AB\cos A, BC = AB\sin A$ を使うと 3 平方の定理 $AC^2 + BC^2 = AB^2$ が導かれる．この方が 3 平方の定理の証明としても平易であり,wikipedia にもこの方針の証明がピタゴラスの定理の項の最初に出ている．

## 3　三角関数の極限

三角関数の微分を求めるためには $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$ を示す必要がある．




原点を中心にした単位円を考え A(1,0) とおく. 上の円周上に P をとり $\angle AOP = \theta$ (鋭角とする) とおくとき A を通り, $x$ 軸と平行な直線と OP の交点を B とおけば

$$\triangle AOP \subset \text{扇形 } AOP \subset \triangle AOB.$$

ここで各図形の面積を求める.

$$\triangle AOP = \frac{\sin\theta}{2}, \text{扇形 } AOP = \frac{\theta}{2}, \triangle AOB = \frac{\tan\theta}{2}$$

によれば

$$\sin\theta \leq \theta \leq \tan\theta. \tag{1}$$

$\sin\theta \leq \theta$ がでてこれより $\frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1$. さらに $\theta \leq \tan\theta$ を $\theta$ で割って $\cos\theta$ を乗じれば

$$\cos\theta \leq \frac{\tan\theta}{\theta} \times \cos\theta = \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1.$$

$\theta \to 0$ のとき

$$1 = \lim_{\theta\to 0} \cos\theta \leq \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1.$$

これより挟み撃ちで

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

これで, 三角関数のもっとも基本的な極限値が求められた. だが, この証明は循環論法になっていて数学的には不完全である.

扇形 $AOP$ の面積は小学生でも識っている. しかし, その証明には半径 $r$ の円の面積 $S(r)$ が $\pi r^2$ であることが用いられている.

## 4 円周率

円周率の値が $3.14\cdots$ であることは良く知られているし, 半径 $r$ の円の周の全長が $2\pi r$, 円の面積 $\pi r^2$ であることは国民の常識である. しかし, 円周率の定義は案外知られていない.

円周率は 3.14 であると覚えている学生もいた. 無理数の例として 3.14 をあげるので私は応対に窮した. 大学の編入試験での口頭試問に $x^2+y^2=x$ の面積を求めさせたところ半径が $\sqrt{x}$ なので $\pi x$ との答えが来たこともあった.

円周率の率とは割合のことである. すなわち, 円周率とは円周の全長と直径の比であり, 英語での表現は the ratio of a circles's circumference to its diameter であって, 英語には円周率のような簡明な呼び名はない. 強いていえば the number pi という身も蓋もない言い方もある.

単位円の全周の長さが $2\pi$ なのは $\pi$ の定義であり, 円の面積が $\pi$ になることは証明が必要な定理である.

円はすべて相似なので 半径 $r$ の円の場合の円周の長さは $2\pi r$ であり面積は $r^2$ 倍になるので . 単位円の面積 $\pi$ がわかれば面積は $\pi r^2$ であることがわかる.

高校数学では, 三角関数の微積分をやってその結果, $y=\sqrt{1-x^2}$ を 0 から 1 まで定積分が計算できるようになり $\frac{\pi}{4}$ をえる. しかしその計算には置換積分で三角関数に置き換えて正弦関数の微分を使う. かくして求まった値が四分円の面積である. これを 4 倍して円の面積が $\pi$ になることを示すのである.

これを学習した高校生は, それまでの学校教育の中で円の面積 $\pi r^2$ であることを暗記させられてきたが微積分を習った結果「円の公式が証明できた」と言って感動する.

円の面積公式を用いてはじめて扇形の面積公式が証明できる. それを用いて不等式ができそれから三角関数の極限の公式が得られる. 扇形 の面積公式は中学ですでに使っているので証明をする必要性を感じない. しかしその証明には単位円の面積が $\pi$ になることを使っているので循環論法になっている. デキの悪い学生の答案と同様のレベルの話で証明になっていない.

インターネットで 「三角関数の極限の公式 循環論法」 として検索すると多くのページが高校の数学教科書の該当箇所が循環論法であることを指摘している. わたくし自身, このことを知ったのは私立大学で教えるようになってからである.

高木貞治の名著『解析概論』では公式 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ は, 曲線の長さの定義そのものだから証明するに及ばないといいつつ在来の証明も紹介している.

その証明は面積を使わないので循環論法では無い. しかし曲線の長さを一般に定義してからそれを円の場合に使うのだから理解するには結構ハードルが高い.

それにしても「証明に及ばない」とまで書かれているのは衝撃的なことなのでその理由を考えてみよう. (こういうところを丁寧に扱うのがカルチャーの良さである)

曲線 $C$ の長さの定義は, $C$ 上の点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ をとり, 線分 $P_1P_2,P_2P_3,\cdots,P_{n-1},P_n$ のそれぞれの長さの和 $L_n$ を考える.

曲線 $C$ が連続曲線, すなわち 連続関数で定義されている曲線とする. 例えば円は $x^2+y^2=1$ で定義されているから連続曲線である. このとき, $\mathrm{Max}_n$ をこれらの線分の長さの最大値とする.

$\mathrm{Max}_n\to 0$ になるように $n\to\infty$ とすると $L_n$ は一定値に収束することが証明できる. これを曲線 $C$ の長さの定義とする.

単位円の中心を $n$ 等分すると, 内接正 $n$ 角形が出来る. その周の長さ $C_n$ は $2\sin(\frac{\pi}{n})$ の $n$ 倍であるから $2n\sin(\frac{\pi}{n})$ になる.

$\mathrm{Max}_n=2\sin(\frac{\pi}{n})$ は明らかに $n\to\infty$ のとき $\to 0$ になる.

単位円の周の長さは $2\pi$ と定義されていることによって $\lim_{n\to\infty} C_n = 2\pi$. したがって

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} 2n\sin(\frac{\pi}{n}) = 2\pi.$$

$h = \frac{\pi}{n}$ を変形すると $n = \frac{\pi}{h}$. これによれば

$$n\sin(\frac{\pi}{n}) = \frac{\pi}{h}\sin(h) = \pi\frac{\sin(h)}{h}.$$

$n \to \infty$ のとき $h \to 0$ になるので

$$2\pi = \lim_{n\to\infty} 2n\sin(\frac{\pi}{n}) = \lim_{h\to 0} 2\pi\frac{\sin(h)}{h} = 2\pi\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}.$$

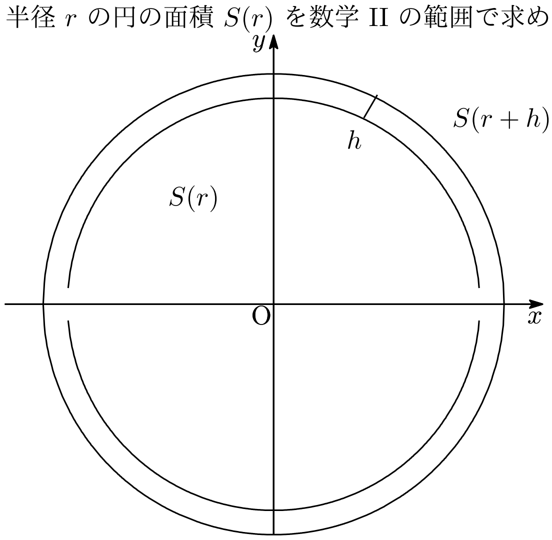
ゆえに

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

.

## 4.1 円の面積

半径 $r$ の円の面積 $S(r)$ を数学 II の範囲で求めることは簡単にできる.




$h > 0$ に対して 半径を $r$ から $r + h$ に増やした場合の円の面積の増加分 $S(r + h) - S(r)$ は円環の面積である. それは半径 $r + h$ の円の全周 $2r + 2h$ に円環の幅 $h$ を乗じたもの $(2r + 2h)h$ より小さく半径 $r$ の円の全周 $2r$ に円環の幅 $h$ を乗じたもの $2r \times h$ より大きい. したがって

$$2r \times h < S(r + h) - S(r) < 2(r + h) \times h.$$

これより

$$2r < \frac{S(r + h) - S(r)}{h} < 2(r + h).$$

$h \to 0$ として極限をとると微分の定義によって

$$2r \leq S'(r) = \frac{dS(r)}{dr} \leq 2r.$$

これより $S(r)$ の微分 $S'(r)$ は $2r$ となる. $\pi r^2$ の微分は $2r$ であり, 数学 III で習った平均値の定理により $S(r)$ は $\pi r^2 + C$ になる. しかし $S(0) = 0$ によって $S(r) = \pi r^2$ がえられた.

ここでは簡単のため $h > 0$ の場合しかしていないが負の場合も同様にできる.

### 4.2 球の体積と球の表面積

回転体の体積公式を使うと 2 次式の積分だけで半径 $r$ の球体の体積 $V(r)$ が求められ $V(r)=\frac{4\pi r^3}{3}$ となる. $h>0$ について 半径が $r+h$ の球体の体積の増加分 $V(r+h)-V(r)$ は球殻の体積である. それは $S(r)h$ と $S(r+h)h$ の間になる. よって

$$S(r)h<V(r+h)-V(r)<S(r+h)h.$$

したがって

$$S(r)<\frac{V(r+h)-V(r)}{h}<S(r+h).$$

$h\to 0$ として極限をとると微分の定義によって

$$S(r)\leq\frac{dV(r)}{dr}\leq S(r).$$

ゆえに $S(r)=\frac{dV(r)}{dr}$.

$V(r)=\frac{4\pi r^3}{3}$ によれば $\frac{dV(r)}{dr}=4\pi r^2$ なので $S(r)=4\pi r^2$.

このようにして球体の体積の微分が球の表面積になるという結果も分かりやすくでて来るので良い方法である. このように覚えれば 球体の体積の係数が $\frac{3}{4}$ か $\frac{4}{3}$ かで迷うことは無くなるであろう.

## 5 富士山型曲線の面積

先月号で $y=\dfrac{1}{x}$ の作る図形の面積を用いて, 対数関数を導入し, その逆関数として指数関数を導入した. これは数学的にはすっきりした論法である.

『解析概論』に $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ の定積分から逆三角関数を導入しこれから三角関数を導入することができるが, 面倒である. という叙述がある. これに触発されて三角関数を $y=\frac{1}{1+x^2}$ の作る図形の面積をもとに三角関数を導入してみたいと長らく思っていた. しかしその機会は現役の時代に訪れることはなかった. そこでカルチャーセンターで合成関数の微分の応用として面積関数をもとに積分を使わないで三角関数の導入をすることを試みた.

以下それを紹介する. 教科書とはまったく違う流れで行う講義なので講義資料をしっかり揃え 2 時間にわたって講義をした. それは全カルチャーセンターの講義の中で最も難解なものになった. 講義が終わったとき, 一同ほっとした空気に包まれたのが印象的であった.

### 5.1 図形の面積 $T(x)$

曲線 $C: y=\dfrac{1}{x^2+1}$ を考えると, 富士山型の曲線になる.

正の数 $x$ を一つ固定し, 曲線 $C$ と $x$ 軸の間で区間 $[0,x]$ の上部の作る図形の面積を $T(x)$ と書くことにする. 関数 $T(x)$ を微分したい. そのため $h>0$ をとり

$$\frac{T(x+h)-T(x)}{h}$$

について $h\to 0$ での極限値を求める.

積分はまだ知らないが数学 III の 微分法, とくに合成関数の微分は知っているものとする.

面積の増分 $T(x+h)-T(x)$ を計算する. そのため曲線 $C$ と $x$ 軸の間で区間 $[x,x+h]$ の上部の作る図形を $D_{x,h}$ とおく. $D_{x,h}$ の面積は $T(x+h)-T(x)$ と表せる.

$D_{x,h}$ は横幅が $h$ で高さが $\frac{1}{x^2+1}$, $\frac{1}{(x+h)^2+1}$ の 2 つの長方形で挟まれるので

$$\frac{h}{(x+h)^2+1} \leq T(x+h) - T(x) \leq \frac{h}{x^2+1}$$

をえる. これより

$$\frac{1}{(x+h)^2+1} \leq \frac{T(x+h) - T(x)}{h} \leq \frac{1}{x^2+1}$$

$h \to 0$ での $\frac{1}{(x+h)^2+1}$ の極限値は右辺と同じ $\frac{1}{x^2+1}$ になるから,

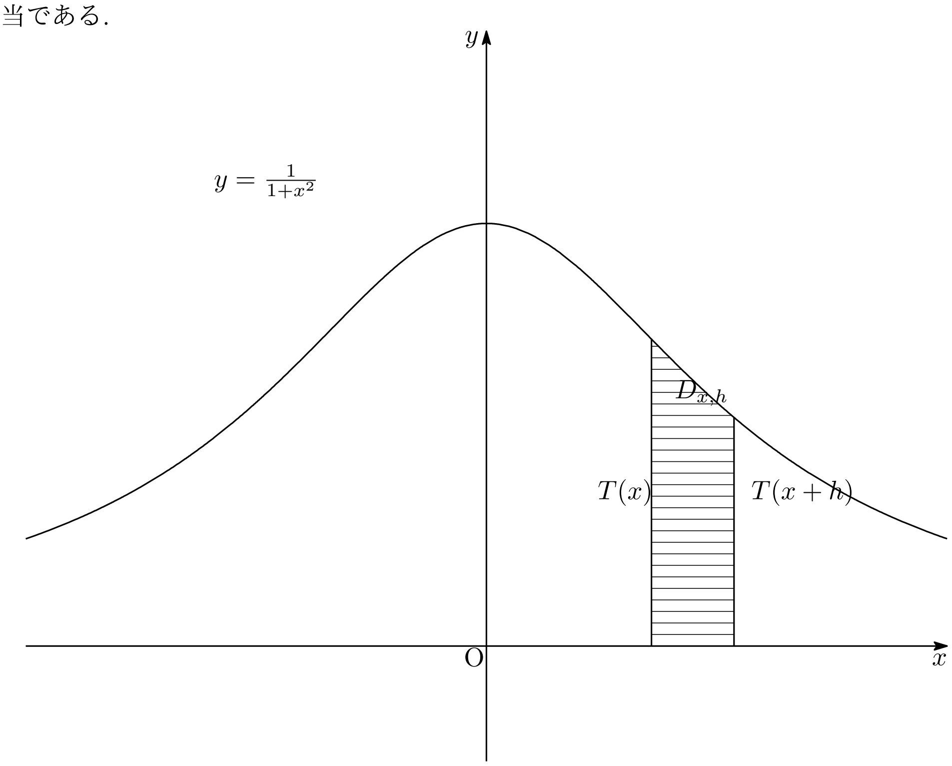
$$\frac{d}{dx}T(x) = \lim_{h\to 0} \frac{T(x+h) - T(x)}{h} = \frac{1}{1+x^2}$$

が成り立つ.

$x > 0$ において $y = \frac{d}{dx}T(x) = \frac{1}{x^2+1} > 0$ なので $T(x)$ は単調増加関数である.

$T(0) = 0$ であって $x \geq 0$ の範囲にしか定義されていない.

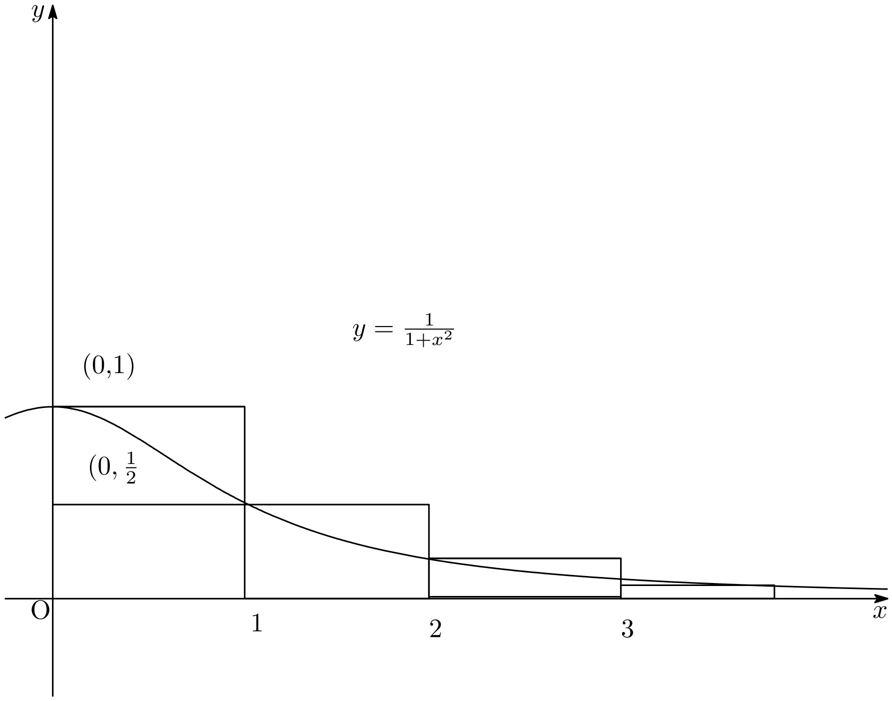
$x < 0$ なら $-x > 0$ なので $T(-x)$ は値が定まる. そこで $T(x) = -T(-x)$ によって $T(x)$ を定める. すなわち $T(x)$ を奇関数として定める. 実は $T(x)$ の導関数が偶関数 $\frac{1}{x^2+1}$ なのでこの定義は妥当である.




富士山型曲線 $C$ と $x$ 軸の間には $x$ 軸の正負の両側に無限の広がりを持ちその面積は円周率 $\pi$ であることは周知のことである. そしてその証明には逆正接関数 $\arctan(x)$ が用いられる. ここでは, $T(x)$ を用いて三角関数を導入することが目的なのでこの事柄を使うわけにはいかない.

そこで曲線 $C$ と $x$ 軸の間の図形の面積を $\alpha$ とおく. $\alpha$ が有限であることを次に示す.

記号を簡単にするため, $F(x) = \frac{1}{x^2+1}$ とおくと, 曲線 $C$ と $x$ 軸の間で $x \geq 0$ の範囲を幅 1 で高さが $F(0), F(1), F(2), \cdots$ の短冊型の長方形全体で包むことができる.




$F(0)+F(1)+F(2)+\cdots$ が有限の値になることを証明する．少し倹約して $F(2)+F(3)+F(4)+\cdots$ を考える．これが有限になることを示せばよい．

$n>1$ のとき $n^2+1 \geq n(n-1)$ なので $F(n) \leq \frac{1}{n(n-1)}$．ここで，その昔ライプニッツが三角数の逆数和を求めるために使った部分分数のテクニクを用いる．$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ となるから

$$F(2)+F(3)+F(4)+\cdots \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1.$$

$F(0)+F(1) = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ なので $1+\frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$．$\alpha \leq 5$．したがって

$$x \to \infty \text{ のとき } T(x) \to \frac{\alpha}{2}$$

が得られた．

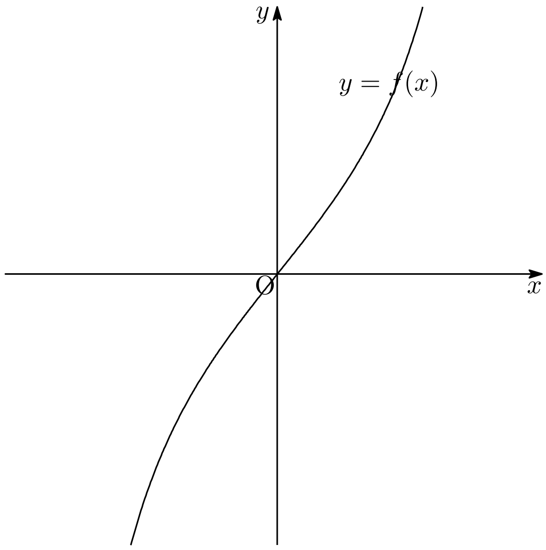
負の場合の $T(x)$ の定義によれば $x \to -\infty$ のとき $T(x) \to -\frac{\alpha}{2}$．

実数 $x$ に対して $T(x)$ の導関数が偶関数 $F(x)$ なので $y=T(x)$ は単調増加関数である．その逆関数を $x=f(y)$ と書く．

この関数の定義域は $(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$ であり

$y \to -\frac{\alpha}{2}$ のとき $f(y) \to -\infty$, $y \to \frac{\alpha}{2}$ のとき $f(y) \to \infty$

を満たす．




逆関数の微分法によれば

$$\frac{df(y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{F(x)} = 1 + x^2.$$

$x = f(y)$ なので $f(y)$ の微分 $\frac{df(y)}{dy}$ は $1 + x^2 = 1 + f(y)^2$.
$x = f(y)$ の $x, y$ を入れ替えて $y = f(x)$ と書くとき $f'(x) = 1 + f(x)^2$ となる.
$T(0) = 0$ によれば $f(0) = 0$ を満たす.
多項式の場合なら, 微分すれば次数が 1 つ下がる. 分数式の場合は微分すれば式が複雑になる.

# 6 三角関数

## 6.1 関数 $G(x), H(x)$

$f(x)$ を元に関数 $G(x), H(x)$ を次のように導入する.

$$G(x) = \frac{1 - f(x)^2}{1 + f(x)^2}, H(x) = \frac{2f(x)}{1 + f(x)^2}$$

ここで $(x)$ を略して

$$G = \frac{1 - f^2}{1 + f^2}, H = \frac{2f}{1 + f^2}$$

と書くこともある. もう少し簡単に

$$G_0(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, H_0(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

を導入すると $G = G_0(f), H = H_0(f)$ と書ける. $G_0^2 + H_0^2 = 1$ を満たすので $G^2 + H^2 = 1$.
微分して

$$G_0' = \frac{-4x}{(1 + x^2)^2} = -2H_0 \times \frac{1}{1 + x^2}, H_0' = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = 2G_0 \times \frac{1}{1 + x^2}.$$

ゆえに $f' = 1 + f^2$ を用いると合成関数の微分法によって

$$G' = G_0' f' = -2H, H' = H_0' f' = 2G.$$

極限値の計算をしよう.

$x \to \frac{\alpha}{2}$ のとき $f(x) \to \infty$ なので $G(x) \to -1, H(x) \to 0$.

そこで $G(\frac{\alpha}{2}) = -1$ かつ $H(\frac{\alpha}{2}) = 0$ と値を定めれば,$G(x), H(x)$ は $\frac{\alpha}{2}$ で連続になる. $G' = -2H, H' = 2G$ が成り立つので $G(x), H(x)$ は $\frac{\alpha}{2}$ で微分可能になる.

### 6.2 関数 $g(x), h(x)$

$g(x) = G(\frac{x}{2}), h(x) = H(\frac{x}{2})$ とおき新しい関数 $g, h$ を導入する.

$g(0) = 1, h(0) = 0$ でありさらに $g(\alpha) = G(\alpha/2) = -1, h(\alpha) = H(\alpha/2) = 0$.

合成関数の微分によれば $g' = -h, h' = g$ .　さらに $1 = g^2 + h^2 = G^2 + H^2$ .

## 7 加法定理

$y$ を固定し $x$ の関数と考えて

$$\Phi(x) = g(x+y) - g(x)g(y) + h(x)h(y), \Psi(x) = h(x+y) - h(x)g(y) - g(x)h(y)$$

とおく. $\Phi(x)$ を $x$ で微分すると

$$\Phi'(x) = g'(x+y) - g'(x)g(y) + h'(x)h(y) = -h(x+y) + h(x)g(y) + g(x)h(y) = -\Psi(x).$$

よって,$\Phi'(x) = -\Psi(x)$. 同様にして $\Psi(x)$ を $x$ で微分すると

$$\Psi'(x) = h'(x+y) - h'(x)g(y) - g'(x)h(y) = g(x+y) - g(x)g(y) + h(x)h(y) = \Phi(x).$$

これより,$\Psi' = \Phi$. さて $\Phi(0) = g(y) - g(0)g(y) + h(0)h(y) = g(y) - g(y) = 0$.

$\Psi(0) = h(y) - h(0)g(y) - g(0)h(y) = h(y) - h(y) = 0$.

さらに $\Phi'(x) = -\Psi(x)$. なので $\Phi'(0) = 0$.

$\varphi(x) = \Phi(x)$ とおくと $\varphi''(x) = -\varphi(x), \varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. $\Psi(x)$ も同じ関係を満たす.

**補題 1** 何回も微分できる関数 $\varphi(x)$ が $\varphi''(x) = -\varphi(x), \varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ を満たすなら $\varphi(x) = 0$.

仮定から $x = 0$ とおき $\varphi''(0) = -\varphi(0) = 0$. 同様にして 各自然数 $n$ について $\varphi^{(n)}(0) = 0$ を満たす.

一般に関数 $\varphi(x)$ のテーラー近似の剰余項 $R_n(\varphi(x))$ は

$$\varphi(x) - \varphi(0) - \varphi'(0)x - \varphi''(0)\frac{x^2}{2!} - \cdots - \varphi^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

と定義され 0 と $x$ の間の適当な数 $c$ によって $\varphi^{(n)}(c)\frac{x^n}{n!}$ と書ける.

仮定の条件より $|\varphi^{(n)}(c)| = |\varphi(c)|$ または $|\varphi'(c)|$ なので $n \to \infty$ のとき $R_n(\varphi(x)) \to 0$.

ところですべての $m$ につき $\varphi^{(m)}(0)=0$ を満たすので $R_n(\varphi(x))=\varphi(x)$. $n\to\infty$ のとき $R_n(\varphi(x))\to 0$ なので左辺は $0$ になり $\varphi(x)=0$ が導かれた. よって $\Phi(x)=0$. 言い換えれば $g(x+y)=g(x)g(y)-h(x)h(y)$ がえられる.

同様にして $h(x+y)=h(x)g(y)+g(x)h(y)$ もえられる.

これは加法定理の形となっている. ただし定義域の制約によって

$$-\frac{\alpha}{2}\leq x+y,x,y\leq\frac{\alpha}{2}$$

を満たす範囲でしか意味をなさない.

加法定理が成立するように定義域を増やし, ついにはすべての実数 $x$ に対して関数 $g,h$ の値が定義でき加法定理も成立するようにしよう.

加法定理がいつも成り立つとする.

$y=\alpha$ とすれば $g(x+\alpha)=g(x)g(\alpha)-h(x)h(\alpha)$.

そこで ,$g(\alpha)=-1,h(\alpha)=0$ により $g(x+\alpha)=-g(x)$.

これをヒントにして 一般の $x$ に対して $g(x),h(x)$ の値を次のように定める.

$x=x_1+n\alpha$ , ( $-\frac{\alpha}{2}\leq x_1\leq\frac{\alpha}{2}$) とするとき $g(x)=(-1)^n g(x_1),h(x)=(-1)^n h(x_1)$ によって $g(x),h(x)$ の値を定めるのである.

ここでは平行移動とスカラー倍だけなので微分計算には影響が及ばない. だから $g'=-h,h'=g$ が常に成り立ちその結果, 加法定理の証明もそのまま使える. とくに

$$g(x+2\alpha)=-g(x+\alpha)=g(x),h(x+2\alpha)=-h(x+\alpha)=h(x)$$

が成り立ち関数 $g(x),h(x)$ が周期 $2\alpha$ を持つ周期関数であることがわかる.

## 7.1 積分の計算

$T(x)$ の定義ではわざわざ面積と言って, 積分とくに定積分という術語を避けてきた. しかし, 定積分を使うと $T(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$ とかける. $2T(\infty)=\alpha$ である.

$T(\infty)=\int_0^\infty\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^\infty\frac{1}{1+t^2}dt$ と分割するとき, 右辺の 2 項が等しいことを計算で示す. すなわち

$$A=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt,B=\int_1^\infty\frac{1}{1+t^2}dt$$

とおくとき $A=B$ を示そう.

$s=\frac{1}{1-t}$ とおくと, $t=0,1$ はそれぞれ $s=1,\infty$ に対応し,

$$1+t^2=2-\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}=\frac{2s^2-2s+1}{s^2},ds=\frac{dt}{(1-t)^2},dt=\frac{ds}{s^2}$$

が成り立つので

$$A=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\int_1^\infty\frac{1}{1-2s+2s^2}ds.$$

$u=s-\frac{1}{2}$ とおくと $1-2s+2s^2=2u^2+\frac{1}{2}$ なので

$$A=\int_1^\infty \frac{1}{1-2s+2s^2}ds=\int_{1/2}^\infty \frac{du}{2u^2+\frac{1}{2}}.$$

そこで $2u=v$ とすると $2u^2=\frac{1}{2}v^2, du=\frac{1}{2}dv$ を用いて

$$A=\int_{1/2}^\infty \frac{du}{2u^2+\frac{1}{2}}=\int_1^\infty \frac{1}{1+v^2}dv=\int_1^\infty \frac{1}{1+t^2}dt=B.$$

$2A=A+B=T(\infty)=\frac{\alpha}{2}$ が示された. $T(x)$ の定義によって $T(1)=\frac{\alpha}{4}$. $f(x)$ は $T(x)$ の逆関数なので $f(\frac{\alpha}{4})=1$ となる.

$f(x)$ は本来開区間 $(-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2})$ において定義され $f'=1+f^2$ なので単調増大である.

したがって $f(\frac{\alpha}{4})=1$ が成り立つ事は $f(x)=1$ を満たす解は $\frac{\alpha}{4}$ だけでありことを意味する. 同様に $f(x)=-1$ を満たす解は $-\frac{\alpha}{4}$ だけである.

以上の計算で置換積分を用いているが, 式の変形だけで面積の計算で可能なはずである.

### 7.2 関数 $\tau(x)$

関数 $\tau(x)$ を $\tau(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ として導入する.

$$\tau(x+\alpha)=\frac{h(x+\alpha)}{g(x+\alpha)}=\frac{-h(x)}{-g(x)}=\frac{h(x)}{g(x)}$$

によって関数 $\tau(x)$ は周期が $\alpha$ の周期関数である.

次に関数 $\tau(x)$ の加法定理を考えよう. 関数 $g(x),h(x)$ の加法定理によれば

$$\tau(x+y)=\frac{h(x+y)}{g(x+y)}=\frac{h(x)g(y)+g(x)h(y)}{g(x)g(y)-h(x)h(y)}$$

$h(x)=g(x)\tau(x),h(y)=g(y)\tau(y)$ を代入すると

- $h(x)g(y)+g(x)h(y)=\tau(x)h(x)g(x)g(y)+\tau(y)g(x)g(y)=g(x)g(y)(\tau(x)+\tau(y))$,
- $g(x)g(y)-h(x)h(y)=g(x)g(y)-\tau(x)\tau(y)g(x)g(y)=g(x)g(y)(1-\tau(x)\tau(y))$

によって

$$\tau(x+y)=\frac{\tau(x)+\tau(y)}{1-\tau(x)\tau(y)}.$$

これが $\tau(x)$ についての加法定理である.

$x=y$ として用いれば関数 $\tau(x)$ の倍角公式

$$\tau(2x)=\frac{2\tau}{1-\tau^2},(\tau=\tau(x))$$

を得る.

## 7.3　種明かし

定義により $\tau = \frac{h}{g} = \frac{2f_2}{1-{f_2}^2}$. ここで $f_2(x) = f(\frac{x}{2})$ とおいた.
$x$ を $2x$ で置き換えると $\tau(2x) = \frac{h(2x)}{g(2x)} = \frac{2f}{1-f^2}$.
倍角公式によれば $\tau(2x) = \frac{2\tau}{1-\tau^2}$ なので

$$\frac{2f}{1-f^2} = \frac{2\tau}{1-\tau^2}.$$

これより

$$(\tau - f)(1 + f\tau) = 0.$$

$\tau$ も $f$ も $f_2$ の有理式なのでこれから

$$\tau = f \text{ または } 1 + f\tau = 0.$$

$f(x)\tau(x) = -1$ ならば $x = 0$ とおくと $0 \times 0 = 0 = -1$ となって矛盾する. なよって $\tau = f$ となる.

定義を書き直すと

$$g(x) = G(\frac{x}{2}) = G_0(f_2), h(x) = H(\frac{x}{2}) = H_0(f_2).$$

$\tau_2(x) = \tau(\frac{x}{2})$ とおけば

$$g(x) = G_0(\tau_2), h(x) = H_0(\tau_2)$$

をえる. $f_2(x) = f(\frac{x}{2})$ によれば $f_2(\frac{\alpha}{2}) = f(\frac{\alpha}{4}) = 1$.

$$g(\frac{\alpha}{2}) = G(\frac{\alpha}{4}) = \frac{1 - f(\frac{\alpha}{4})^2}{1 + f(\frac{\alpha}{4})^2} = 0,$$

同様にして

$$h(\frac{\alpha}{2}) = H(\frac{\alpha}{4}) = \frac{2f(\frac{\alpha}{4})}{1 + f(\frac{\alpha}{4})^2} = 1.$$

$g = G_0(f_2)$ によれば $g(x) = 0$ の最初の解 $x_0$ は $f_2(x_0) = 1$ を満たすので $\frac{x_0}{2} = \frac{\alpha}{4}$. よって $x_0 = \frac{\alpha}{2}$. このとき $h(x_0) = H_0(f_2) = \frac{2}{1+1} = 1$.

## 7.4　曲線の長さ

ここで独立変数を $t$ に変更し $x = g(t), y = h(t)$ とおき $(x, y)$ を $x - y$ 平面の点 $\mathrm{P}(x, y)$ とみなす. $x^2 + y^2 = g(t)^2 + h(t)^2 = 1$ を満たすのでこれらは単位円の上にある.
$t = 0$ から始めて $\frac{\alpha}{2}$ に至るとき, 点 $\mathrm{P}(x, y)$ $(1, 0)$ から $(0, 1)$ に至る 4 分弧の上を行く.

一般に微分できる関数 $x = g(t), y = h(t)$ により定義され $t = 0$ から始めて $a$ に至る曲線の長さは微積分の公式では $\int_0^a \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2)}$ で与えられる.

これを使うと $dx = -h(t)dt, dy = g(t)dt$ によって, $h(t)^2 + g(t)^2 = 1$ なので $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2)} = dt$ が成り立つから $t$ 自身が曲線の長さを表す. とくに単位円の 4 分弧 の長さが $\frac{\alpha}{2}$ となる. 4 分弧 の長さは円周率の定義によって $\frac{\pi}{2}$ である. したがって $\alpha = \pi$. とくに, $t$ はラジアンであることが分かった.

点 $\mathrm{P}(x,y)$ と原点 $(0,0)$ および $(x,0)$ の作る直角三角形でみるとその斜辺の長さが 1 なので, $t$ をラジアンと見るとき $g(t)=\cos t, h(t)=\sin t, \tau(t)=\tan t$ となる.

例えば $h'(t)=g(t)$ は定義の上からは合成関数の微分法という計算規則で証明されたがこの結果は ($h$ は関数の記号にも使ったので $\delta$ を用いる )

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{h(t+\delta)-h(t)}{\delta}=h'(t)=g(t)$$

と書き換えられる. $t=0$ で使えば

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{h(\delta)}{\delta}=g(0)=1.$$

が出てくる. $h(t)=\sin t$ なので

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\sin\delta}{\delta}=1.$$

こうして極限の公式に至った.

三角関数の微分は定義から計算だけですでに導かれている. しかし, 最後になってようやく正弦関数の極限の公式が出てきた. 倒錯した世界になっているところが実に面白い.