数学の研究をはじめよう 2017/august 多重完全数から劣完全数へ

飯高 茂

2017 年 5 月 12 日

1 多重完全数

一般に整数 a に対してその約数の和を $\sigma(a)$ (英語では divisor function, 約数関数; ユークリッド関数ともいう) で表す. したがって $p=\sigma(2^e)$ が素数になるとき $a=2^e p$ は $\sigma(a)=2a$ を満たすので完全数になる. この形の完全数をとくにユークリッドの完全数という. 6,28,4986,8128, などがその例である.

そこで $2a$ の代わりに $3a$ にしたらどうなるか? という疑問は昔から提起されてきた.

1.1 120 の特徴付け (伏字問題)

たとえば $a=120$ は $\sigma(a)=3a$ を満たす. 実際,

$$a=120=2^3*3*5, \sigma(a)=(2^4-1)*4*6=3*5*4*6=3a.$$

120 の特徴付けをしてみよう.

120 の素因数分解 $2^3\times3\times5$ の型にならって $a=P^e rq(P<r<q$:素数, とし $\sigma(a)=3a$ を満たすとき a を求めてみよう. (このような問いを伏字問題という.)

補題 1 *$a=P^e rq(P<r<q$:素数$)$ が $\sigma(a)=3a$ を満たすとき $P=2, a=120$ または 672.*

Proof.

$P=2$ のとき, $a=2^e rq$ として計算する.

$N=2^{e+1}-1, \widetilde{q}=q+1, \widetilde{r}=r+1$ を使うと

$$\sigma(a)=N\widetilde{q}\widetilde{r}, 3a=3\times2^e qr$$

$\sigma(a)=3a$ によれば, $N\widetilde{q}\widetilde{r}=3\times 2^e qr$. 2 倍して

$$2N\widetilde{q}\widetilde{r}=3\times 2^{e+1}qr=3(N+1)qr.$$

$A=\widetilde{q}\widetilde{r}, B=qr, \Delta=q+r$ を用いて $A=B+\Delta+1$ に留意すると,

$$2NA=3(N+1)B, \text{かつ}\ 2NA=2N(B+\Delta+1).$$

これより, $3(N+1)B=2N(B+\Delta+1)$. B で整理して

$$2N(\Delta+1)=(N+3)B.$$

$2>\frac{2N}{N+3}=\frac{B}{1+\Delta}$ によって

$$2(1+\Delta)>B.$$

$q_0=q-2, r_0=r-2$ とおけば $q_0r_0=B-2\Delta+4$.

$$2(1+\Delta)>B=q_0r_0+2\Delta-4.$$

これより, $6>q_0r_0$.

$r_0=r-2\geq 2$ なら,r は素数だから $r_0\geq 3$. したがって, $6>q_0r_0\geq 3q_0$. よって,$2>q_0>r_0\geq 2$. これは矛盾.

$r_0=1$ になる. そこで $r=3, q_0=q-2\leq 5$.

1) $q_0=5$ のとき, $q=7, B=21, \Delta=10$.

$\dfrac{2N}{N+3}=\dfrac{B}{1+\Delta}=\dfrac{21}{11}$ によれば $22N=21N+63$.

これより $N=63.2^{e+1}-1=N=63$.

したがって, $2^{e+1}=64=2^6$. よって, $e=5, r=3, q=7$. ゆえに $a=2^5\cdot 3\cdot 7=672$.

2) $q_0=3$ のとき, $q=5, r=3, B=15, \Delta=8$.

$\dfrac{2N}{N+3}=\dfrac{B}{1+\Delta}=\dfrac{5}{3}$ によれば $6N=5N+15$.

よって $2^{e+1}-1=N=15$ になり $2^{e+1}=16=2^4$. $e=3, r=3, q=5$. したがって, $a=2^3\cdot 3\cdot 5=120$.

$P\geq 3$. このとき矛盾を導く.

$a=P^erq$ とおいて $N=P^{e+1}-1, \widetilde{q}=q+1, \widetilde{r}=r+1$ を使うと

$$\overline{P}\sigma(a)=N\widetilde{q}\widetilde{r}=3\overline{P}\times P^eqr$$

$N\widetilde{qr} = 3\overline{P} \times P^e qr$ を P 倍し

$$PN\widetilde{qr} = 3\overline{P}P^{e+1}qr = 3\overline{P}(N+1)qr$$

$A = \widetilde{qr}, B = qr, \Delta = q + r$ を用いて $A = B + \Delta + 1$ に留意すると,

$$PNA = 3\overline{P}(N+1)B.$$

よって,BPN で割ると,

$$1 + \frac{1+\Delta}{B} = \frac{A}{B} = \frac{3\overline{P}(N+1)}{PN}.$$

$$1 > \frac{1+\Delta}{B} = \frac{3\overline{P}(N+1)}{PN} - 1 = \frac{3\overline{P}(N+1) - PN}{PN}.$$

式を変形して

$$PN > 3\overline{P}(N+1) - PN.$$

ゆえに $\overline{P}(N+1) = PN + P - N - 1$ により

$$2PN > 3(PN + P - N - 1) = 3PN + 3P - 3N - 3.$$

P でまとめると $P \geq 3$　なので

$$3N + 3 > P(N+3) \geq 3N + 9.$$

めでたく矛盾した.

2　多重完全数

一般に $\sigma(a) = ka$ を満たす数を $k-$ 完全数 (k を abundancy または class と呼ぶ) といい, これらを総称して多重完全数 (multiply perfect numbers), または倍積完全数という. 多重完全数については興味ある例が次第に知られるようになったが完全数の場合のオイラーの定理のような美しい結果はない. 完全数と比べると多重完全数の研究にはさらなる困難があるようだ.

表 1: $[k = 3]$ 多重完全数 (Wolfram MathWorld より)

a	素因数分解
120	$2^3 * 3 * 5$
672	$2^5 * 3 * 7$
523776	$2^9 * 3 * 11 * 31$
459818240	$2^8 * 5 * 7 * 19 * 37 * 73$
1476304896	$2^{13} * 3 * 11 * 43 * 127$
51001180160	$2^{14} * 5 * 7 * 19 * 31 * 151$

クラス 3 の多重完全数の場合は 6 個しかないという予想がある.

2.1　奇数完全数

奇数完全数 n が仮にあったとして $a = 2n$ とおく.

$$\sigma(a) = \sigma(2)\sigma(n) = 3 \times 2n = 6n = 3a$$

したがって, a はクラス 3 の多重完全数なのである. 奇数完全数 n の非存在は確定していないがあれば $n > 10^{1500}$ という結果があるそうだ.

2.2　$k = 4, 5$ の場合

表 2: $[k=4]$ 多重完全数 ,36 個発見された

a	素因数分解
30240	$2^5 * 3^3 * 5 * 7$ (デカルト 1638)
32760	$2^3 * 3^2 * 5 * 7 * 13$
2178540	$2^2 * 3^2 * 5 * 7^2 * 13 * 19$
23569920	$2^9 * 3^3 * 5 * 11 * 31$

表 3: $[k=5]$ 多重完全数, 65 個発見されているそうだ

a	素因数分解
14182439040	$2^7 * 3^4 * 5 * 7 * 11^2 * 17 * 19$ (デカルト 1638)
31998395520	$2^7 * 3^5 * 5 * 7^2 * 13 * 17 * 19$

表 4: $[P=2, k=6]$ 多重完全数 ,(カーマイケル 1907)

a	素因数分解
154345556085770649600	$2^{15} * 3^5 * 5^2 * 7^2 * 11 * 13 * 17 * 19 * 31 * 43 * 257$

2.3 底 P の $k-$ 完全数

完全数の一般化と同じ考えで, きわめて安易であるが底の素数 P を固定して $(P-1)\sigma(a) = ka$ を満たす数を 底 P の場合の $k-$ 完全数という.

試しに $[P=3, k=5]$ の場合を計算してみた.

表 5: $[P=3, k=5]$ 多重完全数 $(2\sigma(a) = 5a)$

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$

これだけかどうかわからない. そこで少し理論的に考える.

$2\sigma(a) = 5a$ を満たす　a を決めたい. これは偶数なので, $a = 2^e L, L$: 奇数, と表す.$N = 2^{e+1} - 1$ を用いると $\sigma(a) = N\sigma(L)$. $5a = 5(N+1)L/2$ によって,

$$4N\sigma(L) = 5(N+1)L.$$

$N(4\sigma(L) - 5L) = 5L$ をえるがここで手詰まり.

L : 素数を仮定する.
$N(4(L+1)-5L)=5L$ になり $L=\frac{4N}{5+N}<4$.
L : 奇素数なので, $L=3, N=15. e=3$ となって, $a=24=2^3*3$.

表 6: $[P=3, k=7]$ 多重完全数 $2\sigma(a)=7a$

a	素因数分解
30240	2^5*3^3*5*7
32760	$2^3*3^2*5*7*13$
2178540	$2^2*3^2*5*7^2*13*19$

やはり多重完全数の素因子は小さい.
$[P=3, k=11,13,17]$ のとき $a<3\times10^6$ の範囲で解がない.

表 7: $[P=5, k=7]$ 多重完全数 $4\sigma(a)=7a$

a	素因数分解
28	2^2*7

3　底 P, 平行移動 m の多重完全数

底 P で多重完全数を定義すると解がないことが多い. これでは問題設定に問題あり, と言われかねない.

パラメータ m を取り替えて解を探したところ,

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = -m$$

の場合は解が多いことがわかった.

ここで $P = 2$ とすると方程式は $2\sigma(a) - 2a = -m$ になりユークリッドの完全数の平行移動の場合になっている.

そこで新たに別種の完全数を導入しよう.

$q = P^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $a = P^e q$ を底 P, 平行移動 m の狭義の劣完全数 (subperfect number) といい, このときの q をサブ素数 (subprime number) という.

劣完全数 $a = P^e q$ について $N = P^{e+1} - 1$ とおいて次のような計算をする.

$$\overline{P}\sigma(a) = \overline{P}\sigma(P^e q) = N(q+1) = Nq + N$$

定義から $q = N + m, -m = N - q$.

$Nq = P^{e+1} - q = Pa - q$ なので

$$\overline{P}\sigma(a) = Nq + N = Pa - q + N = Pa - m.$$

究極の完全数の場合と比べて少し簡明な式になった. この方程式の解を底 P, 平行移動 m の広義の劣完全数 (subperfect number with translation parameter m) というのである.

広義の劣完全数を簡単に劣完全数という.

$P > 2$ なら, $m = 0$ のとき $P^{e+1} - 1 + m$ 　は素数にならない. これを克服するために $\sigma(P^e)$ を使うことになり $q = \sigma(P^e) - 1 + m$ が素数のとき $a = P^e q$ を究極の完全数が定義された.

しかし, m によっては $P^{e+1} - 1 + m$ は素数なのでこのようにしても一向構わない.

劣完全数の研究は現在進行中であり, 興味ある結果が多数得られている.