数学の研究をはじめよう 2017/march オイラーの $(*)$ 完全数

飯高 茂

平成 28 年 7 月 12 日

1 $(*)$ 完全数

オイラーの φ 完全数を導入した. それにより, φ 完全数の方程式が定まりこの結果,$m \geq 0$ のとき基本定理ができた. これは望外の成功であった. また $m < 0$ のときは方程式を解くアルゴリズムができ個々の具体例の場合には計算が可能である.

$P = 2$ のときの φ 完全数の方程式は

$$a - 2\varphi(a) = 2(q - m - 1)$$

となり a : 偶数 が自動的にでてくる. ここで $q = \mathrm{Maxp}(a)$.

$m = -2$ のときの解は方程式は

$$a - 2\varphi(a) = 2(q + 1)$$

となり解は $2^e q(q = 2^{e-1} - 1), q$:素数の形になり結果としてユークリッドの完全数の 4 倍になる.

表 1: $P = 2, m = -2$

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$
112	$2^4 * 7$
1984	$2^6 * 31$
32512	$2^8 * 127$
134201344	$2^{14} * 8191$

これは美しい結果と言ってよいが,4 倍がいささか気になるところである.

そこでオイラーの φ 完全数の定義をわずかばかり変更してオイラーの $(*)$ 完全数を導入する.

定義: $q=\varphi(P^{e+1})+1+m, e>1$ が素数になるとき $a=P^{e-1}q$ と定めて a をオイラーの $(*)$ 完全数とよぶ.

さて

$$q=\varphi(P^{e+1})+1+m=P^{e}\overline{P}+1+m,$$
$$\varphi(a)=\varphi(P^{e-1}q)=P^{e-2}\overline{P}(q-1)$$

に注意して

$$\begin{aligned}P^2\varphi(a)&=P^{e}\overline{P}(q-1)\\&=P^{e}q\overline{P}-P^{e}\overline{P}\\&=P\overline{P}a-(q-1-m).\end{aligned}$$

かくして $\mathrm{Maxp}(a)=q$ に注意し

$$P^2\varphi(a)=P\overline{P}a-\mathrm{Maxp}(a)+(1+m). \tag{1}$$

これが m だけ平行移動した $(*)$ 完全数の方程式である.

2 $(*)$ 完全数の方程式の解

$P=2$ の場合の方程式は

$$4\varphi(a)=2a-\mathrm{Maxp}(a)+(1+m). \tag{2}$$

以後 $q=\mathrm{Maxp}(a)$ とおく. 方程式は

$$4\varphi(a)-2a=m+1-q \tag{3}$$

になるため, $m+1-q$ は偶数になる. よって, $q>2$ のとき m : 偶数である.

一方, q : 奇数と仮定するとき, q : 偶数になるので $q=2$. このとき解は $a=2^e$ しか無い. $a=2^e$ のとき, $4\varphi(a)-2a=0$. よって, $m=1$. この結果を次にまとめる:

命題 1 方程式

$$4\varphi(a)=2a-Maxp(a)+(1+m). \tag{4}$$

において m : 奇数なら $m=1$. このとき解は $a=2^e$.

オイラーの φ 完全数の方程式の場合 m : 奇数のとき興味ある結果が出たのにくらべて何と寂しい結果になったことだろう.

3　m : 負の偶数の場合

3.1　$[P=2, m=-2]$ の $(*)$ 完全数の解

表 2: $[P=2, m=-2]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
6	$[2,3]$	2
28	$[2^2,7]$	12
496	$[2^4,31]$	240
8128	$[2^6,127]$	4032

この場合はユークリッドの完全数が 6,28,496,8128 が並んでいる.
$m=-2$ のときなので $(*)$ 完全数の方程式は

$$4\varphi(a) = 2a - \mathrm{Maxp}(a) - 1$$

この式から a : 偶数 が示されればいいのだが難しそうなのでここで止める.
a : 偶数 を仮定する. $a = 2^e L, (L : 奇数)$ と書けるので

$$2^{e+1}\varphi(L) = 2^{e+1}L - \mathrm{Maxp}(a) - 1.$$

これより

$$2^{e+1}(\mathrm{co}\varphi(L)) = q+1, q = \mathrm{Maxp}(L).$$

L : 素数のとき, $\mathrm{co}\varphi(L) = 1$.

$$2^{e+1} - 1 = q.$$

q はメルセンヌ素数, $a = 2^e q$ は古典的な完全数.
L : 非素数のとき,$\mathrm{co}\varphi(L) \geq q$. これより

$$q+1 = 2^{e+1}(\mathrm{co}\varphi(L)) \geq 2^{e+1}q \geq 4q.$$

これは矛盾.

a : 奇数を仮定して矛盾がでればいいのだが.

簡単な場合 : $a = 3^e qr, r < q$: 素数, なら解にならないことは容易にわかる.

3.2　$m=-4$ の場合

表 3: $[P=2, m=-4]$

a	素因数分解
20	$2^2 * 5$
104	$2^3 * 13$
464	$2^4 * 29$
1952	$2^5 * 61$
130304	$2^8 * 509$

この場合, $a = 2^{e-1}q, q = 2^e + 1 - 4$: 素数. かつ $q \equiv 1 \mod 4$ を満たす.

表 4: $[P=2, m=-6]$

a	素因数分解
12	$2^2 * 3$
88	$2^3 * 11$
585	$3^2 * 5 * 13$
1888	$2^5 * 59$
32128	$2^7 * 251$

この場合, $a = 2^{e-1}q, q = 2^e + 1 - 6$: 素数. かつ $q \equiv 3 \mod 4$ を満たす.

しかし, 次には $a = 585 = 3^2 * 5 * 13$ があらわれ, $q = 13$ は $q \equiv 1 \mod 4$ を満たす.

そこで一般化して

$a = 3^e rq (r < q)$ となる解を探す. 計算の結果 $q_0 = q - 4, r_0 = r - 4$ があり

$$q_0(2 * 3^{e-1} r_0 + 1) = 8 * 3^e - 9 = 9(8 * 3^{e-2} - 1).$$

$e = 2$ とおくとき,

$$q_0(6r_0 + 1) = 63.$$

$6r_0 + 1 = 7, q_0 = 9$ となり, $r = 7, q = 13$.

$e > 2$ なら解無しであろう.

3.3　$m=-8$ の場合

表 5: $[P=2, m=-8]$

a	素因数分解
8	2^3
302231454899809002979328	$2^{39} * 549755813881$

3.4 $m=-10$ の場合

表 6: $[P=2, m=-10]$

a	素因数分解
18	$2 * 3^2$
56	$2^3 * 7$
368	$2^4 * 23$
128768	$2^8 * 503$

3.5 $m=-12$ の場合

表 7: $[P=2, m=-12]$

a	素因数分解
40	$2^3 * 5$
105	$3 * 5 * 7$
1696	$2^5 * 53$
42585	$3 * 5 * 17 * 167$

3.6　$m=-14$ の場合

表 8: $[P=2, m=-14]$

a	素因数分解
24	2^3*3
304	2^4*19
127744	2^8*499

4　$(*)$ 条件

m だけ平行移動した オイラーの $(*)$ 完全数の方程式

$$P^2\varphi(a)-P\overline{P}a=m+1-\mathrm{Maxp}(a). \tag{5}$$

において $\mathrm{Maxp}(a)+(1+m)$ は P の倍数である. しかしこれだけから, a が P の倍数であるとは言えない.

オイラーの φ 完全数の方程式にくらべて $(*)$ 完全数の方程式は一段と難しい方程式である.

そこで話しを簡単にするため

$\mathrm{Maxp}(a)+(1+m)\equiv 0 \mod P^2$ を満たすとき $(*)$ 条件を満たす

といい, 以下この場合を主な研究対象とする.

すると, $(*)$ 条件を満たす方程式の解 a は P の倍数となるので, $a=P^{\varepsilon}L, (L:P$ で割れない$)$, の形にかける.

$$P^2\varphi(a)=P(P^{\varepsilon}\overline{P}\varphi(L), P\overline{P}a=P(P^{\varepsilon}\overline{P}L)$$

によって, $\mathrm{co}\varphi(L)=L-\varphi(L)$.

$$P^{\varepsilon+1}\overline{P}\mathrm{co}\varphi(L)=q-m-1. \tag{6}$$

これを解く: ただし $m\geq -2$ を仮定する.

$L=1$ なら $a=P^{\varepsilon}, q=m+1, P=q$. よって方程式は

$$P^2\varphi(a)-P\overline{P}=0.$$

L : 素数なら $\mathrm{co}\varphi(L) = 1$.

$P^{\varepsilon+1}\overline{P} = q - m - 1$ を変形して $q = P^{\varepsilon+1}\overline{P} + 1 + m$; $q = \varphi(P^{\varepsilon+2}) + 1 + m$: が素数, という条件になる.

$a = P^{\varepsilon}q$ がオイラーの $(*)$ 完全数になる.

L : 非素数なら $\mathrm{co}\varphi(L) \geq \mathrm{Maxp}(a)$ を満たす. よって,

$a = P^{\varepsilon}L$ において $\pi = \mathrm{Maxp}(L)$ とおく.

a) $P > \pi$ のとき. $q = \mathrm{Maxp}(a) = P$ になるので

$$q - m - 1 = P^{\varepsilon+1}\overline{P}\mathrm{co}\varphi(L) \geq P^{\varepsilon+1}\overline{P}\pi > P = q$$

これは矛盾.

b) $P < \pi$ のとき. $q = \mathrm{Maxp}(a) = \pi$ になるので

$$\pi = q = P^{\varepsilon+1}\overline{P}\mathrm{co}\varphi(L) + m + 1 \geq P^{\varepsilon+1}\overline{P}\pi > \pi + m + 1.$$

これは矛盾.

定理 1 $(*)$ 条件を満たすとき

$$P^2\varphi(a) - P\overline{P}a = m + 1 - Maxp(a) \tag{7}$$

の解は $m \geq -2$ のとき $a = P^{\varepsilon}q$ がオイラーの $(*)$ 完全数になる.

4.1 $[P=2, m=0]$ の $(*)$ 完全数の解

表 9: $[P=2, m=0]$

a	素因数分解	q	$q-m-1$
10	$[2,5]$	5	4
136	$[2^3,17]$	17	16
165	$[3,5,11]$	11	10 *
15561	$[3^2,7,13,19]$	19	18 *
16215	$[3,5,23,47]$	47	46 *
32896	$[2^7,257]$	257	256

以上はパソコンで $a < 2,000,000$ の範囲の解.

* は $q-m-1$ が 4 の倍数ではない場合, すなわち $q-m-1 \equiv 2 \bmod 4$ の場合. だから $(*)$ 条件を満たさない場合である.

この結果は非常に興味深い: a : 偶数なら $a = 2^e q, q = 2^{e+1}+1$:素数, とかけるらしい.

a : 奇数の解は 3 個あり,

$a = 65 = [3,5,11]$,$a = 15561 = [3^2,7,13,19]$,$a = 16215 = [3,5,23,47]$

となっている. 奇数の解は他にあるだろうか. このときはまさに $(*)$ 条件を満たさない場合であると言えるか. まだ解析が不十分である.

$m=0$ のときなので $(*)$ 完全数の方程式は

$$4\varphi(a) = 2a - \mathrm{Maxp}(a) + 1$$

1.

a : 偶数 を仮定する. $a = 2^e L, (L: \text{奇数})$ と書けるので

$$2^{e+1}\varphi(L) = 2^{e+1}L - \mathrm{Maxp}(a) + 1.$$

$q = \mathrm{Maxp}(L)$ とすると

$$2^{e+1}(\mathrm{co}\varphi(L)) = q - 1.$$

L : 素数のとき

$\mathrm{co}\varphi(L) = 1$, すなわち L : 素数, $L = q$ となり

$q = 2^{e+1}+1$: 素数. これはもちろんフェルマ素数.

L : 非素数のとき

co$\varphi(L) \geq q$ となり

$$2^{e+1}q \leq 2^{e+1}(\mathrm{co}\varphi(L)) = q-1$$

これは矛盾.

完全数の場合と同じく a:偶数を (オイラーのように) 仮定すれば $a = 2^e q, q = 2^{e+1}+1$:素数, と書けるという結果は美しい結果というしかない.

2. 奇数の解

この場合は奇数の解があり 相異なる素因子の個数 $s(a)$ が 3,4 の例を与えている.

強引に解釈すれば, 奇数の解は奇数の完全数の類似である.

$s(a) \geq 4$ のときはどうしてよいか皆目わからない.

4.2 $3^e rq$ の型の解

一般に奇数の解の決定は困難な課題である.

ここでは解 $a = 65 = [3, 5, 11]$ に着目して $a = 3^e rq(3 < r < q$: 素数$)$ の場合に解を探すことにする.

$4\varphi(a) = 4\varphi(3^e rq) = 8 * 3^{e-1} * \overline{q} * \overline{r}$,

$2a - \mathrm{Maxp}(a) + 1 = 2 * 3^e rq - q + 1$.

これより, $\Delta = q + r$ を用いると

$$8 * 3^{e-1}(qr - \Delta + 1) = 6 * 3^{e-1} rq - q + 1.$$

$$2 * 3^{e-1} qr = 8 * 3^{e-1}(\Delta - 1) - q + 1.$$

$q_0 = q - 4, r_0 = r - 4$ とおけば

$$q_0 r_0 = qr - 4\Delta + 16.$$

これを前の式に代入して

$$2 * 3^{e-1} qr = 2 * 3^{e-1}(q_0 r_0 + 4\Delta - 16) == 8 * 3^e + 1 - q.$$

$$2 * 3^{e-1} q_0 r_0 = 8 * 3^e + 1 - q.$$

$q_0 = q - 4$ によって

$$2 * 3^{e-1} q_0 r_0 = 8 * 3^e - q_0 - 3.$$

これより

$$q_0(2 * 3^{e-1} * r_0 + 1) = 3(8 * 3^{e-1} - 1).$$

変形して

$$2 * 3^{e-1}(q_0 * r_0 - 12) = 8 * 3^e - 3 = -q_0 - 3.$$

書き直して

$$2 * 3^{e-1}(12 - q_0 * r_0) = q_0 + 3 > 0.$$

ゆえに $12 - q_0 * r_0 > 0$. そこで $12 \geq \dfrac{12}{r_0} > q_0$.

1). $r_0 = 1$ のとき,
$12 > q_0 = q - 4$ により $q < 16$. q は素数なので $q \leq 13$. ゆえに $q_0 \leq 9$.
$2 * 3^{e-1}(12 - q_0) = q_0 + 3$ を q_0 で整理すると

$$24 * 3^{e-1} = 3 + q_0(1 + 2 * 3^{e-1}) \leq 3 + 9(1 + 2 * 3^{e-1}).$$

よって

$$8 * 3^{e-1} \leq 1 + 3(1 + 2 * 3^{e-1}).$$

これより,

$$8 * 3^{e-1} - 1 \leq 3(1 + 2 * 3^{e-1}) = 3 + 2 * 3^e.$$

$$2 * 3^{e-1} \leq 3 + 1 = 4.$$

$$2 * 3^e \leq 12.$$

$3^e \leq 6$ になり $e = 1$.
$2 * 3^{e-1}(12 - q_0) = q_0 + 3$ に $e = 1$ を代入して

$$2(12 - q_0) = q_0 + 3.$$

$21 = 3q_0$ によって $q_0 = 7, q = 11$.
こうして解 $a = 3 * 5 * 11$ を得られた.

2). $r_0 = r - 4 > 1$ のとき,
$r \geq 7$. よって $r_0 \geq 3$.

$4 = 12/3 \geq \dfrac{12}{r_0} > q_0 = q - 4$ によれば $8 > q$.
$7 \geq q$ によって $q = r$. これは $q > r$ に矛盾

$s(a) \geq 4$ のときはどうしてよいか皆目わからない.

4.3 $[P = 2, m = 2]$

表 10: $[P = 2, m = 2]$

a	素因数分解	q	$q - m - 1$
14	$2 * 7$	7	4
44	$2^2 * 11$	11	8
152	$2^3 * 19$	19	16
2144	$2^5 * 67$	67	64
8384	$2^6 * 131$	131	128

4.4 $[P = 2, m = 4]$

表 11: $[P = 2, m = 4]$

a	素因数分解	q	$q - m - 1$
3	3	3	-2
52	$2^2 * 13$	13	8
592	$2^4 * 37$	37	32

4.5 $[P = 2, m = 6]$

表 12: $[P = 2, m = 6]$

a	素因数分解	q	$q - m - 1$
15	$3 * 5$	5	-2
22	$2 * 11$	11	4
184	$2^3 * 23$	23	16
195	$3 * 5 * 13$	13	6
2272	$2^5 * 71$	71	64

4.6 $[P = 2, m = 8]$

表 13: $[P = 2, m = 8]$

a	素因数分解	q	$q - m - 1$
9	3^2	3	-6
26	$2 * 13$	13	4
68	$2^2 * 17$	17	8
656	$2^4 * 41$	41	32
2336	$2^5 * 73$	73	64
8768	$2^6 * 137$	137	128

4.7 $[P = 2, m = 10]$

表 14: $[P = 2, m = 10]$

a	素因数分解	q	$q - m - 1$
5	5	5	-6
45	$3^2 * 5$	5	-6
76	$2^2 * 19$	19	8
688	$2^4 * 43$	43	42
8896	$2^6 * 139$	139	128

4.8 $[P = 2, m = -2]$

表 15: $[P = 2, m = -2]$

a	素因数分解	q	$q - m - 1$
6	$2 * 3$	3	4
28	$2^2 * 7$	7	8
496	$2^4 * 31$	31	32
8128	$2^6 * 127$	127	128

4.9 $[P = 2, m = -4]$

表 16: $[P = 2, m = -4]$

a	素因数分解	q	$q - m - 1$
20	$2^2 * 5$	5	8
104	$2^3 * 13$	13	16
464	$2^4 * 29$	29	32
1952	$2^5 * 61$	61	64

表 17: $[P = 2, m = -6]$

a	素因数分解	q	$q - m - 1$
12	$2^2 * 3$	3	8
88	$2^3 * 11$	11	16
585	$3^2 * 5 * 13$	13	18
1888	$2^5 * 59$	59	64

4.10 $[P = 2, m = -10]$

表 18: $[P = 2, m = -10]$

a	素因数分解	q	$q - m - 1$
18	$2 * 3^2$	3	12
56	$2^3 * 7$	7	16
368	$2^4 * 23$	23	32
128768	$2^8 * 503$	503	512

4.11 $[P = 2, m = -12]$

表 19: $[P = 2, m = -12]$

a	素因数分解	q	$q - m - 1$
40	$2^3 * 5$	5	16
105	$3 * 5 * 7$	7	18
1696	$2^5 * 53$	53	64
42585	$3 * 5 * 17 * 167$	167	178

4.12 $[P = 2, m = -14]$

表 20: $[P = 2, m = -14]$

a	素因数分解	q	$q - m - 1$
24	$2^3 * 3$	3	16
304	$2^4 * 19$	19	32
127744	$2^8 * 499$	499	512

表 21: $[P=2, m=-16]$

a	素因数分解	q	$q-m-1$
50	$2*5^2$	5	20
272	2^4*17	13	28
7232	2^6*113	113	128
30848	2^7*241	241	256

4.13 $[P=2, m=-16]$

4.14 $[P=2, m=-18]$

表 22: $[P=2, m=-18]$

a	素因数分解	q	$q-m-1$
975	$3*5^2*13$	13	30
1504	2^5*47	47	64
30592	2^7*239	239	256

4.15 $[P=2, m=-4]$ $(*)$ 完全数の解

ここでは $q=2^{e-1}-3$ が素数.

表 23: $[P=2, m=-4]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
20	$[2^2, 5]$	8
104	$[2^3, 13]$	48
464	$[2^4, 29]$	224
1952	$[2^5, 61]$	960
130304	$[2^8, 509]$	
522752	$[2^9, 1021]$	

4.16 $[P=2, m=-6]$ の $(*)$ 完全数

ここでは $q=2^{e-1}-5$ が素数.

表 24: $[P=2, m=-6]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
12	$[2^2, 3]$	4
88	$[2^3, 11]$	40
585	$[3^2, 5, 13]$	288
1888	$[2^5, 59]$	928
32128	$[2^7, 251]$	16000
521728	$[2^9, 1019]$	
8378368	$[2^{11}, 4091]$	

4.17 $[P=2, m=-10]$ の $(*)$ 完全数の場合の解

ここでは $q=2^{e-1}-9$ が素数.

表 25: $[P=2, m=-10]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
18	$[2, 3^2]$	6
56	$[2^3, 7]$	24
368	$[2^4, 23]$	176
128768	$[2^8, 503]$	
2087936	$[2^{10}, 2039]$	

4.18 $[P=2, m=-12](*)$ 完全数 の場合の解

表 26: $[P=2, m=-12]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
40	$[2^3, 5]$	16
105	$[3, 5, 7]$	48
1696	$[2^5, 53]$	832
42585	$[3, 5, 17, 167]$	21248
518656	$[2^9, 1013]$	

4.19 $[P=2, m=-14]$ の $(*)$ 完全数の解

4.20 $[P=2, m=-16]$ の $(*)$ 完全数の解

$m=-16$ のときなので $(*)$ 完全数の方程式は、$q=\mathrm{Maxp}(a)$ を用いると

$$4\varphi(a)=2a-q-15$$

a : 偶数 を仮定する.
$a=2^eL, (L:$ 奇数$)$ と書けるので

$$2^{e+1}\varphi(L)=2^{e+1}L-q-15.$$

表 27: $[P=2, m=-14]$

a	素因数分解	q	$q-m-1$
24	$[2^3, 3]$	3	16
304	$[2^4, 19]$	19	42
127744	$[2^8, 499]$	499	502
266133	$[3, 7, 19, 23, 29]$	29	42

表 28: $[P=2, m=-16]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
50	$[2, 5^2]$	20
272	$[2^4, 17]$	128
7232	$[2^6, 113]$	3584

これより

$$2^{e+1}(\mathrm{co}\varphi(L)) = q + 15.$$

L : 素数のとき, $\mathrm{co}\varphi(L) = 1$.

$$2^{e+1} - 15 = q.$$

L : 非素数のとき,$\mathrm{co}\varphi(L) \geq q$. これより

$$q + 15 = 2^{e+1}(\mathrm{co}\varphi(L)) \geq 2^{e+1}q \geq 4q.$$

これより $q + 15 \geq 4q$ なので $q \leq 5$.
$L = q^2$ とおくとき $\mathrm{co}\varphi(L) = q$.

$$q + 15 = 2^{e+1}(\mathrm{co}\varphi(L)) = 2^{e+1}q.$$

$15 = (2^{e+1} - 1)q$ によって $q = 5, L = 25, a = 50$.
これ以外の解はない.

5　$[P = 2, m > 0]$ の場合

5.1　$[P = 2, m = 2](*)$ 完全数

表 29: $[P = 2, m = 2](*)$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
14	$[2, 7]$	6
44	$[2^2, 11]$	20
152	$[2^3, 19]$	72
2144	$[2^5, 67]$	1056
8384	$[2^6, 131]$	4160

5.2　$[P = 2, m = 4](*)$ 完全数

表 30: $[P = 2, m = 4](*)$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	$[3]$	2
52	$[2^2, 13]$	24
592	$[2^4, 37]$	288
23655	$[3, 5, 19, 83]$	11808

$s(a) = 4$ の例は $23655 = [3, 5, 19, 83]$

5.3　$[P = 2, m = 6](*)$ 完全数

$s(a) \geq 3$ の例は $195 = [3, 5, 13]$, 44115$= [3, 5, 17, 173]$

表 31: $[P=2, m=6; (*)$ 完全数]

a	素因数分解	$\varphi(a)$
15	$[3, 5]$	8
22	$[2, 11]$	10
184	$[2^3, 23]$	88
195	$[3, 5, 13]$	96
2272	$[2^5, 71]$	1120
33664	$[2^7, 263]$	16768
44115	$[3, 5, 17, 173]$	22016

5.4 $[P=2, m=8](*)$ 完全数

表 32: $[P=2, m=8](*)$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
9	$[3^2]$	6
26	$[2, 13]$	12
68	$[2^2, 17]$	32
656	$[2^4, 41]$	320
2336	$[2^5, 73]$	1152
8768	$[2^6, 137]$	4352

5.5 $[P=2, m=10](*)$ 完全数

表 33: $[P=2, m=10]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
5	$[5]$	4
45	$[3^2, 5]$	24
76	$[2^2, 19]$	36
688	$[2^4, 43]$	336
8896	$[2^6, 139]$	4416

5.6 $[P=2, m=12](*)$ 完全数

表 34: $[P=2, m=12]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
21	$[3,7]$	12
34	$[2,17]$	16
232	$[2^3,29]$	112
5187	$[3,7,13,19]$	2592
34432	$[2^7,269]$	17152

$s(a) \geq 3$ の例は $5187 = [3,7,13,19]$.

5.7 $[P=2, m=0](*)$ 完全数

表 35: $[P=2, m=0]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
10	$[2, 5]$	4
136	$[2^3, 17]$	64
165	$[3, 5, 11]$	80
15561	$[3^2, 7, 13, 19]$	7776
16215	$[3, 5, 23, 47]$	8096
32896	$[2^7, 257]$	16384

$s(a) \geq 3$ の例は
$165 = [3, 5, 11]$, $15561 = [3^2, 7, 13, 19]$ 16215 $[3, 5, 23, 47]$
$s(a) = 2$ の例は $10 = [2, 5]$
$136 = [2^3, 17]$, $32896 = [2^7, 257]$.

6 $(*)$ 完全数の例

6.1 $[P=2, m=-24]$ 完全数

表 36: $[P=2, m=-24]$,φ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
120	$[2^3, 3, 5]$	32
228	$[2^2, 3, 19]$	72
308	$[2^2, 7, 11]$	120
2116	$[2^2, 23^2]$	1012
5248	$[2^7, 41]$	2560

表 37: $[P=2, m=-24]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
30	$[2, 3, 5]$	8
1312	$[2^5, 41]$	640

6.2 $m=-16$

表 38: $[P=2, m=-16]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
50	$[2, 5^2]$	20
272	$[2^4, 17]$	128
7232	$[2^6, 113]$	3584

表 39: $[P=2, m=-16]$,φ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
108	$[2^2, 3^3]$	36
132	$[2^2, 3, 11]$	40
140	$[2^2, 5, 7]$	48
200	$[2^3, 5^2]$	80
1088	$[2^6, 17]$	512

表 40: $[P=2, m=16]$,φ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
76	$[2^2, 19]$	36

6.3 $m=16$

表 41: $[P=2, m=16]$,φ 完全数

a	素因数分解
76	$2^2 * 19$
134496256	$2^{14} * 8209$
8796164325376	$2^{22} * 2097169$
147573952881734189056	$2^34 * 8589934609$

表 42: $[P=2, m=16]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
7	$[7]$	6

6.4 $m=24$

表 43: $[P = 2, m = 24]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
33	$[3, 11]$	20
58	$[2, 29]$	28
63	$[3^2, 7]$	36
285	$[3, 5, 19]$	144
328	$[2^3, 41]$	160
2848	$[2^5, 89]$	1408

表 44: $[P = 2, m = 24]$,φ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
232	$[2^3, 29]$	112
1312	$[2^5, 41]$	640
11392	$[2^7, 89]$	5632

6.5 $m = -36$

表 45: $[P = 2, m = -36]$,φ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
372	$[2^2, 3, 31]$	120
400	$[2^4, 5^2]$	160
644	$[2^2, 7, 23]$	264
3712	$[2^7, 29]$	1792

表 46: $[P = 2, m = -36]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
100	$[2^2, 5^2]$	40
928	$[2^5, 29]$	448

6.6 $m = 36$

表 47: $[P = 2, m = 36]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解	
82	$[2, 41]$	40
345	$[3, 5, 23]$	176
424	$[2^3, 53]$	208
855	$[3^2, 5, 19]$	432
3232	$[2^5, 101]$	1600

7 $P = 2$: $(*)$ 完全数

表 48: $[P = 2, m = 0]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解
10	$2 * 5$
136	$2^3 * 17$
165	$3 * 5 * 11$
15561	$3^2 * 7 * 13 * 19$
16215	$3 * 5 * 23 * 47$
32896	$2^7 * 257$
1600125	$3 * 5^3 * 17 * 251$

表 49: $[P = 2, m = 2]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解
14	$2 * 7$
44	$2^2 * 11$
152	$2^3 * 19$
2144	$2^5 * 67$
8384	$2^6 * 131$
297075	$3 * 5^2 * 17 * 233$

表 50: $[P = 2, m = 4]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解
3	3
52	$2^2 * 13$
592	$2^4 * 37$
Macro 10	$3 * 5 * 19 * 83$

表 51: $[P=2, m=6,(*)$ 完全数

a	素因数分解
15	$3*5$
22	$2*11$
184	2^3*23
195	$3*5*13$
2272	2^5*71
33664	2^7*263
44115	$3*5*17*173$
527872	2^9*1031

7.1 $[P=2, m=-2]$,(∗) 完全数

表 52: $[P=2, m=-2],(*)$ 完全数

a	素因数分解
6	$2*3$
28	2^2*7
496	2^4*31
8128	2^6*127

7.2 $[P=2, m=-4]$,(∗) 完全数

表 53: $[P=2, m=-4],(*)$ 完全数

a	素因数分解
20	2^2*5
104	2^3*13
464	2^4*29
1952	2^5*61
130304	2^8*509
522752	2^9*1021

表 54: $[P=2, m=-4]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解
20	$2^2 * 5$
104	$2^3 * 13$
464	$2^4 * 29$
1952	$2^5 * 61$
130304	$2^8 * 509$
522752	$2^9 * 1021$
8382464	$2^{11} * 4093$
134193152	$2^{13} * 16381$
549754241024	$2^{19} * 1048573$
8796086730752	$2^{21} * 4194301$
140737463189504	$2^{23} * 16777213$
144115187270549504	$2^{28} * 536870909$

7.3 $[P=2, m=-6]$,$(*)$ 完全数

表 55: $[P=2, m=-6]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解
12	$2^2 * 3$
88	$2^3 * 11$
1888	$2^5 * 59$
32128	$2^7 * 251$
521728	$2^9 * 1019$
8378368	$2^{11} * 4091$
34359083008	$2^{17} * 262139$
549753192448	$2^{19} * 1048571$
2251799645913088	$2^{25} * 67108859$
9223372026117357568	$2^{31} * 4294967291$
2361183241263023915008	$2^{35} * 68719476731$

表 56: $[P=2, m=-8]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解
151115727449904501489664	$2^{38} * 549755813881$

7.4 $[P=2, m=-8]$,$(*)$ 完全数

7.5 $[P=2, m=-10]$,$(*)$ 完全数

表 57: $[P=2, m=-10]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解
18	$2 * 3^2$
56	$2^3 * 7$
368	$2^4 * 23$
128768	$2^8 * 503$

7.6 $[P=2, m=-12]$,$(*)$ 完全数

表 58: $[P=2, m=-12]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解
40	$2^3 * 5$
105	$3 * 5 * 7$
1696	$2^5 * 53$
42585	$3 * 5 * 17 * 167$

表 59: $[P=2, m=-14]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$
304	$2^4 * 19$
127744	$2^8 * 499$
266133	$3 * 7 * 19 * 23 * 29$

表 60: $[P=2, m=-16]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解
50	$2 * 5^2$
272	$2^4 * 17$
7232	$2^6 * 113$
30848	$2^7 * 241$

表 61: $[P=2, m=-18]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解
975	$3 * 5^2 * 13$
1504	$2^5 * 47$
30592	$2^7 * 239$

7.7 $[P=2, m=-14]$,$(*)$ 完全数

7.8 $[P=2, m=-16]$,$(*)$ 完全数

7.9 $[P=2, m=-18]$,$(*)$ 完全数

7.10 $[P=2, m=-20]$,$(*)$ 完全数

表 62: $[P=2, m=-20]$,$(*)$ 完全数

a	素因数分解
208	$2^4 * 13$
495	$3^2 * 5 * 11$
6976	$2^6 * 109$