数学の研究を始めよう 2017/feb
君はオイラー 完全数をみたか ;後編
$P=3$ の場合, ツチノコを探す

飯高 茂

平成 28 年 8 月 19 日

1　オイラーの φ 完全数

オイラーの φ 完全数 についての方程式は次のとおり:

$$P\varphi(a) = \overline{P}a + Pm - P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$$

ここで $\overline{P} = P-1$, かつ $\mathrm{Maxp}(a)$ は a の最大素因子を示す. 本講では $P=3$ の場合のみを扱う.

オイラーの φ 完全数 についての基本定理を再録する.

定理 1 $m \geq 0$ のとき

$$P\varphi(a) = \overline{P}a + Pm - P\overline{Maxp(a)}$$

を満たす解は

⟨*1*⟩ $m=0, e=1$ のとき微小解 $a = Pq_0(P > q_0;$ 素数*)* となる.

⟨*2*⟩ $m = P-1$ のときの微小解 $a = P^e$.

⟨*3*⟩ $e > 1$ のとき a は $(\varphi, m)-$ 完全数

⟨*4*⟩ $e = 1$ のとき $a = Pq$, $q = P+m$ は素数.

2　$P=3$ のとき

$P=3$ のとき狭義の完全数では $q = 2*3^{e-1}+1+m$ が素数という条件がついた. この条件を使うと:

$1+m$ が偶数なら, q は偶数なので $q=2$.

$e>1$ のとき $1+m$ が 3 の倍数なら $q=3$.

狭義の完全数ではこのようになることを踏まえて,

$1+m \equiv 2,4 \mod 6$ なら I_2,I_4 型,
$1+m \equiv 0,3 \mod 6$ なら II_0,II_3 型,
それ以外の $1+m \equiv 1,5 \mod 6$ を III 型という.

この分類を意識しながら広義の完全数について調べる.
φ 完全数 についての方程式において $P=3$ とすると

$$3\varphi(a) = 2a - 3\overline{\mathrm{Maxp}(a)} + 3m.$$

この解が広義のオイラー φ 完全数である. m が小さいときオイラー φ 完全数をすべて決定しよう.

2.1 $P=3, m=-1-2K$

$m+1=-2K$ のときに解がないことを示そう.
実際,

$$3\varphi(a) = 2a - 3(q+2K).$$

これより a は 3 の倍数になり $a=3^eL$, (L は 3 で割れない) の形に書く.
よって,

$$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q+2K.$$

これより q : 偶数になり結局 $q=2$. $a=3^eL$ に矛盾.

このとき 6 を法とすれば, I_2,I_4,II_0 型のどれかになるがこのとき解はない.

3 $P=3, m \geq 0$ のとき

3.1 $P=3, m=0$ のとき

$1+m=1$ なので, III 型
パソコンによる結果

表 1: $P=3, m=0$

e	a	素因数分解
1	6	$3*2$
2	63	3^2*7
3	513	3^3*19
5	39609	3^5*163
6	355023	3^6*487

この結果を踏まえて理論的に検討する.

$m = 0$ のとき $3\varphi(a) - 2a = 3(q-1)$ を満たす. $a = 3^e L(3, L$ は互いに素) と書けるので $2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q - 1$ を満たす.

1) L : 素数なら $2 * 3^{e-1} + 1 = q$. たとえば, $e = 1$ なら $q = 3, a = 6; e = 2$ なら $q = 7, a = 63$ など. これらは上記の表にある.

2) L : 非素数なら $\mathrm{co}\varphi(L) \geq q = \mathrm{Maxp}(L)$ により . $q - 1 \geq 2 * 3^{e-1}q$. これは矛盾.

3.2 $m = 0, e = 1$ のとき微小解

オイラー完全数の基本定理によれば $m = 0, e = 1$ のとき微小解 $a = Pq_0(P > q_0$; 素数) になるが $P = 3, q_0 = 2$, $a = 6$ が解. これは表の冒頭にある.

$e = 1$ のとき, $2 = q - 1 - m$. すなわち $q = 3 + m$: 素数, $L = q, a = 3q$.

表 2: $q = 3 + m$; 素数

m	$q = 3 + m$	$a = 3q$	素因数分解
2	5	15	3*5
4	7	21	3*7
8	11	33	3*11
10	13	39	3*13
14	17	51	3*17
20	23	69	3*23
26	29	87	3*29
28	31	93	3*31

一般に, 方程式

$$3\varphi(a) = 2a - 3\overline{\mathrm{Maxp}(a)} + 3m$$

の解 a は 3 の倍数になり $a = 3^e L, (L$ は 3 で割れない) の形に書ける.

よって,

$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q - 1$ を満たす.

L : 素数なら $q = 2 * 3^{e-1} + 1 + m$: 素数となる e があれば $a = 3^e q$ が解.

L : 非素数なら $\mathrm{co}\varphi(L) \geq q$ により, $q = 2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) \geq 2 * 3^{e-1}q$. よって

$$q \geq 2 * 3^{e-1}q.$$

これは矛盾.

3.3 $P = 3, m = 2$ のとき

$1 + m = 3$ なので, II_3 型
パソコンでの計算結果は次の通り.

表 3: $m = 2; 3\varphi(a) = 2a - 3\overline{\mathrm{Maxp}(a)} + 6$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	$[3]$	2
9	$[3^2]$	6
15	$[3, 5]$	8
27	$[3^3]$	18
81	$[3^4]$	54
243	$[3^5]$	162
729	$[3^6]$	486
2187	$[3^7]$	1458
6561	$[3^8]$	4374
19683	$[3^9]$	13122

結果は意外なことに $a = 3^e, a = 15 = 3 * 5$ になった. そのわけを考えてみよう.
$m = 2 \geq 0$ なので $q = 2 * 3^{e-1} + 1 + 2$ が素数の場合を調べればよい. オイラー完全数の基本定理が使える.
$e = 1, m = 2$ のとき, $q = 2 + 1 + 2 = 5.a = 15$.
$m = P - 1 = 2$ なので $a = 3^e$ が解である.
また $P = 3, m = 2, q = 3 + 2 = 5$. 基本定理 $\langle 4 \rangle$ により $a = 3 * 5$ が解. これは孤立解.
これ以外の解がないことを確認する.
$q = 2 * 3^{e-1} + 1 + 2 = \varphi(3^e) + 3$ は 3 で割れる素数なので $e > 1$ なら $q = 3$. これから矛盾. $e = 1$ ならば $q = 5, a * 3 * 5 = 15$. これは既出.

3.4 $P=3, m=6$ のとき

$1+m=7$ なので III 型.

しかし $a \leq 10^6$ で解を全数調査した．一見して解が少ないが wxmaxima で $q = 2 * 3^{e-1}+1+6$:素数として探すと解がゾロゾロでてきた.

表 4: $P=3, m=6$

a	素因数分解
117	$3^2 * 13$
4941	$3^4 * 61$

表 5: $P=3, m=6$, $q=2*3^{e-1}+1+6$:素数

e	a	素因数分解
2	117	$3^2 * 13$
4	4941	$3^4 * 61$
10	2324936277	$3^{10} * 39373$
12	188290077741	$3^{12} * 354301$
16	1235347093894941	$3^{16} * 28697821$
18	100063092909942837	$3^{18} * 258280333$
25	478598658467166079446267	$3^{25} * 564859072969$

3 番目の $a = 2324936277$ から急激に巨大化.

ここで $a \equiv 1, 7 \mod 10$ が成り立つ.

3.5 $P = 3, m = 8$ のとき

表 6: $P = 3, m = 8$

a	素因数分解
33	$3 * 11$

$m + 1 = 9 \equiv 3 \bmod 6$. なので II_3 型
$m = 8$ のとき $q = 2 * 3^{e-1} + 9$ 素数となる e を探せば $e = 1, q = 11$; $a = 3 * 11$ が解.
$e > 1$ なら q が 3 の倍数で素数にならないので矛盾.

表 7: $P = 3, m = 10$

a	素因数分解
39	$3 * 13$
153	$3^2 * 17$
783	$3^3 * 29$
42039	$3^5 * 173$

$m + 1 = 11 \equiv 5 \bmod 6$. なので III 型

表 8: $P = 3, m = 10$

e	a	素因数分解
2	153	$3^2 * 17$
3	783	$3^3 * 29$
5	42039	$3^5 * 173$
14	15251247582633	$3^{14} * 3188657$
29	3140085798164918157432082839	$3^{29} * 45753584909933$
35	16687703366621616178907107463873 43	$3^{35} * 333543633993331 49$

3.6　$P = 3, m = 12$ のとき

表 9: $P = 3, m = 12$

a	素因数分解
171	$3^2 * 19$
837	$3^3 * 31$
5427	$3^4 * 67$
363771	$3^6 * 499$

$m + 1 = 13 \equiv 1 \bmod 1.$ なので III 型

表 10: $P = 3, m = 12$

a	素因数分解	
2	171	$3^2 * 19$
3	837	$3^3 * 31$
4	5427	$3^4 * 67$
6	363771	$3^6 * 499$
7	3217077	$3^7 * 1471$
12	188293266387	$3^{12} * 354307$
14	15251257148571	$3^{14} * 3188659$
28	348898422018537756444255507	$3^{28} * 15251194969987$

以上みたように, $m \geq 0$ なら $q = 2 * 3^{e-1} + 1 + m$: 素数, となるとき $a = 3^e * q$ が解.
III 型のとき $q = 2 * 3^{e-1} + 1 + m$: 素数となる指数 e は無数にあると期待, または想像される. これらの証明をいつかはしたいものだが, できるとは到底思われない. 久遠の夢である.

4 $P=3, m<0$ のとき

4.1 $P=3, m=-2$ のとき

表 11: $P=3, m=-2$

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
1	12	$[2^2, 3]$	4
2	45	$[3^2, 5]$	24
3	459	$[3^3, 17]$	288
4	4293	$[3^4, 53]$	2808

$P=3$ のとき $a=3^e q, (q=2*3^{e-1}+1+m$: 素数) となる解を通常解という．$a=3*2^2$ は非通常解である．

$1+m=-1$ なので III 型．
$m<0$ なので非通常解が出てきた．

表 12: $P = 3, m = -2$; $q = 2 * 3^{e-1} + 1 - 2$ が素数の場合

e	$e \bmod 4$	a	素因数分解	$\varphi(a)$
2	2	45	$3^2 * 5$	24
3	3	459	$3^3 * 17$	288
4	0	4293	$3^4 * 53$	2808
8	0	28691253	$3^8 * 4373$	19123128
9	1	258260643	$3^9 * 13121$	172160640
13	1	1694575624563	$3^{13} * 106288$	1129716020160
21	1	72945992743881219603	$3^{21} * 6973568801$	48630661822280577600

$e > 3$ のとき $e \equiv 0, 1 \bmod 4$.
$3\varphi(a) = 2a - 3(m - q + 1)$, $(q = \mathrm{Maxp}(a))$ を満たす.
$m = -2$ のとき $3\varphi(a) - 2a = 3(-2 - q + 1) = -3(q + 1)$ を満たす.
$a \equiv 0 \mod 3$ により, $a = 3^e L(3, L$ は互いに素).
さらに $2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 1$ を満たす.

1. L が素数.
$\mathrm{co}\varphi(L) = 1$ なので $2 * 3^{e-1} = q + 1$.
$L = 2$ または $L \geq 5$.

a). $L = 2$.
$q = 3$ になるので, $2 * 3^{e-1} = q + 1 = 4$ により起きない.

b). $q \geq 5$. $L = q$ になる. よって $2 * 3^{e-1} = q + 1$ を満たすので $2 * 3^{e-1} - 1$ が素数になる e を探して, $q = 2 * 3^{e-1} - 1$ とおけば
$q = \varphi(3^e) - 1 + 2$, になり $a = 3^e q$ が解.
これは狭義の完全数である.
たとえば, $e = 2$ のとき $q = 2 * 3 - 1 = 5, a = 3^2 * 5$,
$e = 3$ のとき $q = 2 * 9 - 1 = 17, a = 3^3 * 17$.

2. L が非素数.
a). $\mathrm{Maxp}(L) < 3$ のとき $L = 2^f$ と書ける. $q = 3$.
$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = 2^f * 3^{e-1} = q + 1 = 4$ によって, $f = 2, e = 1; a = 3 * 2^2$.
b). $\mathrm{Maxp}(L) > 3$.
$a = 3^e L$ によって, $q = \mathrm{Maxp}(a) = \mathrm{Maxp}(L)$.
よって, $\mathrm{co}\varphi(L) \geq \mathrm{Maxp}(L) = q$.
$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 1 > 2 * 3^{e-1} * q$ により矛盾.

4.2　$P = 3, m = -3$ のとき

$m + 1 = -2 \equiv 4 \bmod 6$. II_4 型 解なし 解なし

4.3　$P = 3, m = -4$ のとき

表 13: $P = 3, m = -4$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
18	$[2, 3^2]$	6

$m + 1 = -3 \equiv 3 \bmod 6$. なので II_3 型
$m = -4$ のとき $3\varphi(a) - 2a = 3(-4 - q + 1) = -3(q + 3)$ を満たす.
$a \equiv 0 \mod 3$ により, $a = 3^e L, (3, L$ は互いに素) とすると.
$2 * 3^{e-1} \mathrm{co}\varphi(L) = q + 3$ を満たす.
これより $e > 1$ なら $q \equiv 0 \bmod 3$. ゆえに $q = 3$.
$e = 1$ なら $q = -1$ で矛盾.
1. L が素数.
$\mathrm{co}\varphi(L) = 1$ なので $2 * 3^{e-1} = q + 3$.
$e > 1$ のとき $q = 3(2 * 3^{e-2} - 1)$ となり, $e = 2, q = 3$ をえるので矛盾.

2. L が非素数.
a). $\mathrm{Maxp}(L) = 2$ のとき $q = 3$. $L = 2^f$ とおくと

$$2 * 3^{e-1} \mathrm{co}\varphi(L) = 2^f * 3^{e-1} = q + 3 = 6.$$

$f = 1, e = 2$ よって, $a = 2 * 3^2$.

b). $\mathrm{Maxp}(L) = q > 3$ のとき.

$$q + 3 \geq 2 * 3^{e-1} q \geq 2q.$$

これより $q = 3$ となり矛盾.
このとき解は 1 つのみ.

4.4 $P=3, m=-5$ のとき

$m+1=-4\equiv 2 \bmod 6$. I_2 型 解なし

4.5 $P=3, m=-6$ のとき

表 14: $P=3, m=-6$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
24	$[2^3, 3]$	8
75	$[3, 5^2]$	40
351	$[3^3, 13]$	216

$m+1=-5\equiv 1 \bmod 6$ なので III 型

表 15: $P=3, m=-6$ $q=2*3^{e-1}+1-6$ が素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
2	9	3^2	6
3	351	3^3*13	216
5	38151	3^5*157	25272
7	3177711	3^7*1453	2117016
11	20919820671	$3^{11}*118093$	13946429016
13	1694569247271	$3^{13}*1062877$	1129711768632
14	15251171055129	$3^{14}*3188641$	10167444181440
20	8105110288604030529	$3^{20}*2324522929$	5403406856744830752

$m=-6$ のとき $3\varphi(a)-2a=3(-6-q+1)=-3(q+5)$ を満たす.
$a\equiv 0 \mod 3$ により, $a=3^eL, (3, L$ は互いに素) とすると.
$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+5$ を満たす.

$\mathrm{Maxp}(L)=2$ のとき $q=3, L=2^f$.
$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=2^f*3^{e-1}=q+5=8$ を満たす.
よって,$f=3, e=1$. $a=2^3*3$.

$\mathrm{Maxp}(L)>3$ のとき $q=\mathrm{Maxp}(L)$.

1. L が素数.
$2*3^{e-1}=q+5$ を満たす.
$q=2*3^{e-1}-5$:素数 となる e を探す.
たとえば
$e=3$ のとき $q=13$.
2. L が非素数.
$\mathrm{Maxp}(L)=q>3$ のとき. $2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+5$ を満たす.

$$q+5 \geq 2*3^{e-1}q \geq 2q.$$

$q=5$ となるとき $e=1$. $2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+5=10$ を満たす.
$3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=5$; $e=1, \mathrm{co}\varphi(L)=5$.
よって, $L=5^2; a=3*5^2$

4.6　$P = 3, m = -7$ のとき

解なし

4.7　$P = 3, m = -8$ のとき

表 16: $P = 3, m = -8$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
30	$[2, 3, 5]$	8
147	$[3, 7^2]$	84
297	$[3^3, 11]$	180
3807	$[3^4, 47]$	2484

$m + 1 = -7 \equiv 5 \bmod 6$ なので III 型

表 17: $P = 3, m = -8$; $q = 2 * 3^{e-1} + 1 - 8$ が素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	297	$3^3 * 11$	180
4	3807	$3^4 * 47$	2484
6	349191	$3^6 * 479$	232308
7	3173337	$3^7 * 1451$	2114100
10	2324109591	$3^{10} * 39359$	1549367028

$m = -8$ のとき $3\varphi(a) - 2a = 3(-8 - q + 1) = -3(q + 7)$ を満たす.
これより $a \equiv 0 \mod 3$. よって $a = 3^e L, (3, L,$ は互いに素).
よって $2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 5$ を満たす.

1. L が素数.
$2 * 3^{e-1} + 1 - 8 = q$. たとえば $e = 3$ とすると, $q = 11; a = 3^3 * 11$.

2. L が非素数. $\mathrm{Maxp}(L) = 2$ のとき $q = 3, L = 2^f$.
$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = 2^f * 3^{e-1} = q + 7 = 10 = 2 * 5$ を満たすことはできない.

$\mathrm{Maxp}(L) > 3$ のとき $q = \mathrm{Maxp}(L)$.
$\mathrm{co}\varphi(L) \geq \mathrm{Maxp}(L) = q$. よって

$$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) + 1 = q + 8 \geq 2 * 3^{e-1} q.$$

$q+8 \geq 2*3^{e-1}*q \geq 2*q$. よって, $q \leq 8$ なので $q=7,5$.

a) $q=7$.

$$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+7=2*7.$$

$e=1$ になり $\mathrm{co}\varphi(L)=7$. $L=7^2$ または $L=3*5=15$.
すると $L=7^2$ なら $L=7^2, e=1, a=3*7^2$. $L=15$ なら L が 3 の倍数になり矛盾.

b) $q=5$.

$$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+7=12.$$

$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=12=2^2*3$ により
$3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=2*3$. したがって, $e=1$ なら $\mathrm{co}\varphi(L)=6$ により, $L=10$; $a=2*3*5$.

4.8 $P=3, m=-9$ のとき

$m = 1-9 = -8 \equiv 4 \bmod 6$. I_4 型. 解なし

4.9 $P=3, m=-10$

表 18: $P=3, m=-10$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
36	$[2^2, 3^2]$	12
42	$[2, 3, 7]$	12

$m+1 = -9 \equiv 3 \bmod 6$ なので II_3 型
$m=-10$ のとき $3\varphi(a) - 2a = 3(-10-q+1) = -3(q+9)$ を満たす.
$a \equiv 0 \mod 3$ により, $a = 3^e L, (3, L,$ は互いに素) とすると.
$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q+9$ を満たす.

$\mathrm{Maxp}(L) = 2$ のとき $q=3, L=2^f$.
$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = 2^f * 3^{e-1} = q+9 = 12 = 3*2^2$ を満たす.
ゆえに $e-1=1, f=2; a = 2^2 * 3^2$.

$\mathrm{Maxp}(L) > 3$ のとき $q = \mathrm{Maxp}(L)$.

1. L が素数.
$2*3^{e-1}+1-10 = q$. これを満たす素数 q はない.

2. L が非素数. $\mathrm{co}\varphi(L) \geq q$ によって

$$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q+9 \geq 2*3^{e-1}q.$$

$q+9 \geq 2*3^{e-1}*q \geq 2*q$. よって, $q \leq 9$ なので $q=7,5$.

a) $q=7$.

$$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q+9 = 16 = 2^4.$$

$e=1$ になり $\mathrm{co}\varphi(L) = 8$. $L=16$ または $L=14, 12$.
$\mathrm{Maxp}(L) = q = 7$ によれば L は $q=7$ の倍数. よって $L=14$. $e=1$ により $a = 2*3*7$.

b) $q=5$.

$$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 9 = 14.$$

よって

$3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = 7$. したがって, $e = 1$ なら $\mathrm{co}\varphi(L) = 7$ により, $L = 7^2$. $\mathrm{Maxp}(L) = q = 5$ に反する.

4.10 $P = 3, m = -11$ のとき

解なし

5 $P = 3, m = -4 - 6k$

$m = -10$ のとき解が 2 つしかない.

この理由を考えるために $m = -10$ を法 6 で一般化すると $m = -4 - 6K$ または $m = -7 - 6K$ である.

$m = -4 - 6K$ のときは解がわずかながら見つかる. このとき東の丘という.

$m = -7 - 6K$ のときは解がまったく見つからない. このとき, 西の丘と言うことにした.

私は東の丘には、ツチノコが少数ずついるが西の丘には、ツチノコが全然いない. それを証明しよう.

この場合の型を調べる.

$m = -4 - 6K$ ならば $m + 1 = -3 - 6K \equiv 3 \bmod 6$ なので II_3 型

$m = -7 - 6K$ ならば $m + 1 = -6 - 6K \equiv 0 \bmod 6$ なので II_0 型. この場合は起きない

5.1 $P = 3, m = -16$

表 19: $P = 3, m = -4 + 6K = -16, K = -2$

a	素因数分解
54	$2 * 3^3$
78	$2 * 3 * 13$
105	$3 * 5 * 7$

$m + 1 = -15 \equiv 3 \bmod 6$ なので II_3 型