数学の研究を始めよう 2017/Jan
君はオイラー 完全数をみたか ;中編
$P=2$ のときツチノコに出会う

飯高 茂

平成 28 年 8 月 19 日

1 オイラーの完全数の方程式

自然数 a と互いに素で a 未満の自然数の個数をガウスの定めにしたがって $\varphi(a)$ で示し, これをオイラー関数という.

そこで素数 P を 1 つとりこれを底とし, $\varphi(P^e)+1+m, (e>1)$ が素数になるときこれを q で示し, $a=P^e q$ を (P を底とする) m だけ平行移動した (狭義の) オイラー φ 完全数という. これが定義である.

オイラーの φ 完全数 についての方程式は次のとおり:

$$P\varphi(a)=\overline{P}a+Pm-P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$$

ここで $\overline{P}=P-1$, かつ $\mathrm{Maxp}(a)$ は a の最大素因子を示す.

この方程式を満たす解 a を (P を底とする) m だけ平行移動した広義のオイラー φ 完全数という.

ここでは $P=2$ の場合, 広義のオイラー φ 完全数を調べる. この場合,φ 完全数 についての方程式は次のように簡単になる.

$$2\varphi(a)=a+2m-2\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$$

狭義の オイラーの φ 完全数の定義によれば $P=2$ のとき $q=\varphi(P^e)+1+m=2^{e-1}+1+m$ は素数なので m は偶数になる.

しかし方程式 $2\varphi(a)=a+2m-2\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$ ができた以上, m : 奇数の場合も平等に扱ってやりたい.

このように狭義の完全数ではありえない場合についても探求することは勇気のいることである.

勇気を出して広義の完全数が導入し結果として, 実際に出てくるものは何だろうか. 私はこれらを調べるにあたり心は踊り, ツチノコ [1] を探すような興奮を覚えたのであった.

[1] 日本に生息すると言われる未確認生物. 蛇のようだがもっと太いと言われている.

$P=2$ のとき m だけ平行移動した広義のオイラー φ 完全数を次のように分類した調べる.
I 型. $m \geq 0, m$: 偶数
II 型. $m < 0, m$: 偶数
III 型. $m < 0, m$: 奇数
IV 型. $m \geq 0, m$: 奇数

2 I 型, $m \geq 0, m$: 偶数

2.1 $P=2, m=0; m=2$

広義のオイラー φ 完全数をもっとも簡単な場合からパソコンで調べよう.

表 1: $P=2, m=0; m=2$

$m=0$		$m=2$	
a	素因数分解	a	素因数分解
12	$2^2 * 3$	20	$2^2 * 5$
40	$2^3 * 5$	56	$2^3 * 7$
544	$2^5 * 17$	176	$2^4 * 11$
131584	$2^9 * 257$	608	$2^5 * 19$
		8576	$2^7 * 67$
		33536	$2^8 * 131$

これらの解はすべて $a = 2^e q, (q = 2^{e-1} + 1 + m$: 素数) の形になっている. この形の解を通常解という. $m \geq 0$ の場合は, オイラー完全数の基本定理により広義のオイラー φ 完全数は狭義のオイラー φ 完全数になる. パソコンによる結果は基本定理を裏付ける.
基本定理がある以上, $m \geq 0$ についてパソコンで調べることはない. 次に $m < 0$ の場合についてパソコンで調べる.

3 II 型, $m < 0, m$: 偶数

3.1 $P = 2, m = -2$

表 2: $P = 2, m = -2$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
24	$2^3 * 3$	8
112	$2^4 * 7$	48
1984	$2^6 * 31$	960
32512	$2^8 * 127$	16128

以上の場合は, パソコンによる全数調査の結果. $m = -2; q = 2^{e+1} - 1$: 素数の場合については wxmaxima を用いて, 指数 $e < 21$ について調べると結果はすぐ出る.

表 3: $P = 2, m = -2; q = 2^{e-1} - 1, a = 2^e q$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	24	$2^3 * 3$	8
4	112	$2^4 * 7$	48
6	1984	$2^6 * 31$	960
8	32512	$2^8 * 127$	16128
14	134201344	$2^{14} * 8191$	67092480
18	34359476224	$2^{18} * 131071$	17179607040
20	549754765312	$2^{20} * 524287$	274876858368

以上からこれらはユークリッドの完全数の 4 倍であることがわかる.

3.2 $P = 2, m = -4$

$P = 2, m = -4$ の場合はどうなるだろう.

表 4: $P = 2, m = -4$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
36	$2^2, 3^2$	12
80	$2^4, 5$	32
416	$2^5, 13$	192
1856	$2^6, 29$	896
7808	$2^7, 61$	3840

e を動かし $q = 2^{e-1} - 3$: 素数の場合に限って表示した.

表 5: $P = 2, m = -4; q = 2^{e-1} - 3$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	8	2^3	4
4	80	$2^4 * 5$	32
5	416	$2^5 * 13$	192
6	1856	$2^6 * 29$	896
7	7808	$2^7 * 61$	3840
10	521216	$2^{10} * 509$	260096
11	2091008	$2^{11} * 1021$	1044480
13	33529856	$2^{13} * 4093$	16760832
15	536772608	$2^{15} * 16381$	268369920
21	2199016964096	$2^{21} * 1048573$	1099507433472

ここでは $a = 2^2 * 3^2$ が $a = 2^e q$ とかけない解でこれらを非通常解という. 私は心の中で「ツチノコ発見」と叫んだ.

3.3 $P = 2, m = -6; m = -8$

表 6: $P = 2, m = -6$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
48	$2^4, 3$	16
100	$2^2, 5^2$	40
352	$2^5, 11$	160
7552	$2^7, 59$	3712
128512	$2^9, 251$	64000

表 7: $P = 2, m = -6; q = 2^{e-1} - 5$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
4	48	$2^4 * 3$	16
5	352	$2^5 * 11$	160
7	7552	$2^7 * 59$	3712
9	128512	$2^9 * 251$	64000
11	2086912	$2^{11} * 1019$	1042432
13	33513472	$2^{13} * 4091$	16752640
19	137436332032	$2^{19} * 262139$	68717903872

$a = 100 = 2^2 * 5^2$ のみが非通常解.

表 8: $P = 2, m = -8$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
196	$2^2, 7^2$	84

全数調査ではわずかな解しかない. e を動かし $q = 2^{e+1} - 7$: 素数の場合を探した. その努力が実を結び $e = 40$ で解が発見された. 何という僥倖!.

表 9: $P = 2, m = -8; q = 2^{e+1} - 7$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
40	604462909799618005958656	$2^{40} * 549755813881$	X

$X = 302231454899259247165440$

3.4 $P=2, m=-10; m=-12$ の場合

表 10: $P=2, m=-10; m=-12$

$m=-10$			$m=-12$		
a	素因数分解	$\varphi(a)$	a	素因数分解	$\varphi(a)$
60	2^2*3*5	16	84	2^2*3*7	24
72	2^3*3^2	24	160	2^5*5	64
224	2^5*7	96	484	2^2*11^2	220
1472	2^6*23	704	6784	2^7*53	3328

$m=-10$ のときの非通常解は $a=60=2^2*3*5$, $a=72=2^3*3^2$.

$m=-12$ のときの非通常解は $a=84=2^2*3*7$, $a=484=2^2*11^2$.
パソコンで非通常解が見つかりそのすべての非通常解が証明であきらかにされればツチノコが発見されその生態が解明されたと思ってみよう.

4　II 型のときの証明

$P=2$ のとき方程式は $2\varphi(a)=a+2m-2(q-1),(q=\mathrm{Maxp}(a))$ により $a=2^eL($ $L:$ 奇数$)$, $S=-m>0$ とおくとき

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q-1+S.$$

$e>1$ を示すために $e=1$ と仮定して矛盾を導く.

S と $q-1$ は偶数なので $\mathrm{co}\varphi(L)$ も偶数.

しかし L は奇数, $\varphi(L)$ は偶数なので $\mathrm{co}\varphi(L)=L-\varphi(L)$ も奇数. これ矛盾した.

かくて $e\geq 2$ が示された.

4.1　$S=2$ のときの証明

まず簡単な場合を扱う.

$S=2$ のとき

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q-1+S=q+1.$$

i). $L:$ 素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L)=1$ により , $2^{e-1}=1+q$. $q=2^{e-1}-1$. これらはメルセンヌ素数. $a=2^eq=4*2^{e-2}q$; 完全数の 4 倍.

2. $L:$ 非素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L)\geq q$ により ,

$$2^e\mathrm{co}\varphi(L)=2(1+q)\geq 2^eq.$$

$(1+q)\geq 2^{e-1}q$ になり矛盾. したがって $m=-2$ の場合はユークリッドの完全数の 4 で出来ていること示された.

4.2　$S=4$ のときの証明

$m=-4$ なので

$$2\varphi(a)=a-6-2q.$$

$a=2^eL$, $L:$ 奇数, とおくとき

$$2^e\mathrm{co}\varphi(L)=2(3+q).$$

1. $L:$ 素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L)=1$ により , $2^{e-1}=3+q$. $q=2^{e-1}-3$. これらが素数の場合を調べる.

2. $L:$ 非素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L)\geq q$ により ,

$$2^e\mathrm{co}\varphi(L)=2(3+q)\geq 2^eq.$$

$3 + q \geq 2^{e-1}q$ になる. ゆえに $3 \geq (2^{e-1} - 1)q$. $e \geq 2$ のとき $q = 3, e = 2$ になり

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = (3 + q)$$

から

$$\mathrm{co}\varphi(L) = 3.$$

よって,$L = q^2, a = 2^2 * 3^2$ が非通常解.

4.3 $S = 10$ のときの証明

$S = 10$ によって

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 9.$$

$L = q$:素数のとき $2^{e-1} - 9 = q$. これは狭義の完全数の場合.

$L = q^2$ のとき

$$2^{e-1}q = q + 9.$$

$(2^{e-1} - 1)q = 9$ により $e = 2, 3$.
$e = 2$ なら $q = 9$ で矛盾.
$e = 3$ なら $q = 3$ となり,

$$2^2\mathrm{co}\varphi(L) = q + 9 = 12.$$

よって $\mathrm{co}\varphi(L) = 3$, $L = 3^3; a = 2^3 * 3^2$.

$L = q\mu(q > \mathrm{Maxp}(\mu))$ のとき
$\mathrm{co}\varphi(L) = (q - 1)\mu_0 + \mu$. ($\mu_0 = \mathrm{co}\varphi(\mu)$ とおいた.)
i) $\mu_0 = 1$ なら μ:素数. $L = q\mu$ により

$$2^{e-1}(q + \mu - 1) = q + 9.$$

$e = 2$ のとき

$$2(q + \mu - 1) = q + 9.$$

$$q = 9 + 2 - 2\mu.$$

L: 奇数なので $\mu \geq 3$ により
$\mu = 3$ なら $q = 5$. よって, $a = 2^2 * 3 * 5$.

$\mu \geq 4$ のとき解はない.
$e > 2$ のときは矛盾.
ii) $\mu_0 \geq 3$ なら $L = q\mu$ により

$$\mathrm{co}\varphi(L) = (q-1)\varphi(L) = (q-1)\mu_0 + \mu \geq 3(q-1) + \mu \geq 3q + 6.$$

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 9 \geq 2\mathrm{co}\varphi(L) \geq 2(3q + 6).$$

これは矛盾.

5　III 型，　$m < 0, m:$ 奇数

狭義の オイラーの φ 完全数では起こりえない場合, すなわち m : 奇数でかつ負の数のとき調べる. 個々の場合にパソコンによる計算で調べてみよう.

$S = -m > 0$ とおく. $q = \mathrm{Maxp}(a)$ として a の最大素因子 q を導入すると φ 完全数 についての方程式は

$$2\varphi(a) = a - 2S - 2(q-1).$$

a は偶数になるので $a = 2^e L($ L : 奇数) とおくとき

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = S - 1 + q.$$

S : 奇数なので $S - 1 + q$ も奇数. よって $e = 1; a = 2L$.

狭義の オイラーの φ 完全数では $e \geq 2$ が満たされている. S : 奇数という尋常でない場合なので $e = 1$ になったと理解しておく.

したがってこの場合 φ 完全数 についての方程式は次のようにごく簡単になる:

$$\mathrm{co}\varphi(L) = S - 1 + q.$$

5.1　$S = 1$

$S = 1$ のとき φ 完全数 についての方程式 $\mathrm{co}\varphi(L) = q$ を解く.

以前オイラーの余関数を詳しく調べていたので結果は推測できて $L = q^2$ が解. したがって $a = 2q^2$.

したがって $2\varphi(a) = a - 2q$ なら $a = 2q^2$.

この結果は美しい. この証明は後で与える.

5.2　$S = 3$ の場合の計算結果

$S = 3$ のとき φ 完全数 についての方程式を解く.

$a < 1000,000$ の範囲でパソコンによる解の全数調査をする.

結果として解が無数にでるがみな $a = 6p, (p > 3)$ の形をしている. これを通常解という.

表 11: $P = 2, S = 3$

a	素因数分解
$6p, (p > 3)$	$2 * 3 * p$

6　通常解

$S = p$: 奇素数のとき, $p < q$: 奇素数 について $L = pq$ は
$\mathrm{co}\varphi(L) = p + q - 1$, $S - 1 + q = p - 1 + q$ により $\mathrm{co}\varphi(L) = S - 1 + q$ を満たす.
$a = 2pq$ は次式の解でこれが通常解である.

$$2\varphi(a) = a - 2p - 2(q - 1).$$

このように, $S = p$: 奇素数のとき通常解 $a = 2pq$ がある.
$S = p$: 合成数のとき通常解はないが散発的な解はありうる. これらの非通常解を見出すことが興味ある課題である.

6.1　$S = 5, 7$ の場合の計算結果

$S = 5$ のとき $a = 10p, (p > 5) = 2 * 5 * p$.
$a = 10p, (p > 5)$ の形の通常解だけ.

$S = 7$ のとき通常解 $14p = 2 * 7 * p$ 以外に $54 = 2 * 3^3$ が最初にでてきた解で, これが非通常解. これもツチノコにカウントする.
非通常解の決定 (ツチノコ探し) は興味ある課題である.
ツチノコ探しを手作業で行うと手間がかかるのでパソコンによる機械的探索の結果を与える.
すこしずるいが, 時間がないので仕方ない.

6.2 $S \geq 11$ の場合の計算結果

S : 奇数 であるが解の無い場合は記さない. たとえば $S = 9, S = 15$ のとき解はない.

表 12: $P = 2, m < 0,\ S = -m \geq 11$

S	a	素因数分解
11	$22p, (p > 11)$	$2 * 11 * p$
13	$26p, (p > 13)$	$2 * 13 * p$
17	90	$2 * 3^2 * 5$
17	$34p, (p > 19)$	$2 * 17 * p$
21=3*7	126	$2 * 3^2 * 7$
21	250	$2 * 5^3$
23	$46p, (p > 23)$	$2 * 23 * p$
29	198	$2 * 3^2 * 11$
29	$58p, (p > 29)$	$2 * 29 * p$
31	64	2^6
31	150	$2 * 3 * 5^2$
31	$62p, (p > 31)$	$2 * 31 * p$
33=3*11	234	$2 * 3^2 * 13$
37	$74p, (p > 37)$	$2 * 37 * p$
41	306	$2 * 3^2 * 17$
41	$82p, (p > 41)$	$2 * 41 * p$
43	686	$2 * 7^3$
43	$86p, (p > 43)$	$2 * 43 * p$
$45 = 3^2 * 5$	342	$2 * 3^2 * 19$
47	$94p, (p > 47)$	$2 * 47p$
$49 = 7^2$	350	$2 * 5^2 * 7$
51	210	$2 * 3 * 5 * 7$
53	414	$2 * 3^2 * 23$
53	$106p, (p > 53)$	$2 * 53 * p$
$57 = 3 * 19$	294	$2 * 3 * 7^2$
59	270	$2 * 3^3 * 5$
59	$2 * 118p, (p > 59)$	$2 * 59 * p$

パソコンによる計算の結果, $S=17$ のとき $a=2*17*p$ という通常解と非通常解 $a=90=2*3^2*5$ が出てきた.

これらの結果から非通常解は最小の通常解より小さいことが推定できる.

S : 非素数なら通常解の大きさはどのように評価できるかという問題も自然な問いかけであるが証明できそうもない.

7 III 型の場合の証明

以上の結果はパソコンでの計算結果なので次に証明を行う. 証明が完了すればツチノコの生態が解明された, と言ってよい.

$S=1$ のとき.

$$\mathrm{co}\varphi(L)=q$$

が方程式でこれを解けばよい. q は L の最大素因子で, L は奇数.

7.1 $S=1$ のときの証明

i) $s(L)=1$ の場合 $L=q^j$ とおくとき, $\mathrm{co}\varphi(L)=q^{j-1}=q$ により $j=2$.

ii) $s(L)\geq 2$ の場合. $L=q^j\mu,(q>\mathrm{Maxp}(\mu))$ と書き, $\mu_0=\mathrm{co}\varphi(\mu)$ とおくとき $\mathrm{co}\varphi(L)=q^{j-1}(\mu+\overline{q}\mu_0)=q$.

これにより $j=1$. $\mu+\overline{q}\mu_0>q$ が成り立つのでこれはおきない.

よって, 奇素数 q に関して $L=q^2$. よって $a=2q^2$.

$S=3,5$ のときは同様に証明できるので略し, ここでは非通常解の出る最初の例 $S=7$ を扱う.

7.2 $S=7$ のときの証明

$$\mathrm{co}\varphi(L)=S-1+q=6+q$$

が方程式でこれを解けばよい. q は L の最大素因子で, L は奇数.

$L=q^j,(j\geq 2)$ とおくとき, $\mathrm{co}\varphi(L)=q^{j-1}=q+6$ によって, $j=3, q^2-q=6$.

これより $q=3$. 非通常解 $a=2*3^3$ がでる.

$L=q\mu,(q>\mathrm{Maxp}(\varphi(\mu)))$ の場合. $\mu_0=\mathrm{co}(\mu)$ とおくとき $\mathrm{co}\varphi(L)=(q-1)\mu_0+\mu$ となる.

i) $\mu_0=1$.

$\mathrm{co}\varphi(L)=q+\mu-1$ なので $q+\mu-1=q+6$. よって, $\mu=7$. $q>7$ が条件で $a=2*7q=14q$. これは通常解.

μ が非素数なら, μ は奇数なので 1) $\mu_0 = 3, \mu = 9$,2) $\mu_0 = 5, \mu = 25$, 3) $\mu_0 = 7, \mu = 49, 35$ 等.

1) $\mu_0 \geq 3, \mu$:非素数のとき, $\mu \geq 9$.

$$\mathrm{co}\varphi(L) \geq 3q + 6, \mathrm{co}\varphi(L) = q + 6 \geq 3q + 6.$$

これは不成立.

7.3 $S = 17$ のときの証明

$$\mathrm{co}\varphi(L) = S - 1 + q = 16 + q$$

が方程式でこれの解を求める.

$L = q^j, j \geq 2$ とおくとき, $\mathrm{co}\varphi(L) = q^{j-1} = q + 16$, によって, $q^{j-1} - q = 16$.

これより $j = 3, q(q-1) = 16$. 不成立

i) $\mu_0 = 1$. μ が素数になるので

$q + \mu - 1 = q + 16$. よって, $\mu = 17$. $q > \mu = 17$ が条件で $a = 2 * 17q = 34q$. これは通常解.

ii) $\mu_0 > 2$. μ が非素数なので

1) $\mu_0 = 3, \mu = 9$ のとき,

$$\mathrm{co}\varphi(L) = 3q + 6, \mathrm{co}\varphi(L) = q + 16.$$

$3q + 6 = q + 16$ により $2q = 10$. したがって $q = 5, a = 2 * 3^2 * 5$.

7.4 $S = 21$ のときの証明

$$\mathrm{co}\varphi(L) = S - 1 + q = 20 + q$$

が方程式でこれの解を求める.

$L = q^j, (j \geq 2)$ とおくとき, $\mathrm{co}\varphi(L) = q^{j-1} = q + 20$, によって, $q^{j-1} - q = 20$.

これより $j = 3, q(q-1) = 20$. これは解けて $q = 5, a = 2 * 5^3$.

i) $\mu_0 = 1$. μ が素数になるので $q + \mu - 1 = q + 20$. よって, $\mu = 21$. これは素数でない.

μ が非素数なら

1) $\mu_0 = 3, \mu = 9$ のとき,

$$\mathrm{co}\varphi(L) = 3q + 6, \mathrm{co}\varphi(L) = q + 20.$$

$3q + 6 = q + 20$ により $2q = 14$. したがって $q = 7, a = 2 * 3^2 * 7$.

8 IV 型 m : 正の奇数

m : 奇数, 負の数 の場合が済んだので m : 奇数, 正の数の場合を扱う. この場合は意外なことにきわめて簡単になる. 小さなツチノコを数多く発見した思いがした.

$P = 2, m = 1, 3, 5, \cdots$

表 13: $P = 2, m = 1, 3, 5, \cdots$

m	$a =$ 素因数分解
1	6=2*3
3	10=2*5
5	14=2*7
9	22=2*11
11	26=2*13
13	none(13+2=15, 非素数)
15	34=2*17
17	38=2*19
19	none(19+2=21, 非素数)
21	46=2*23
23	none((23+2=25, 非素数)

$m + 2 = q$ のとき解は $a = 2q$ のみ
この場合は解が完全に決まるが面白いものはでてこない.
以下証明.
$\mathrm{co}\varphi(L) = q - 1 - m$ を解く.
L が素数なら $\mathrm{co}\varphi(L) = 1 = q - 1 - m$ なので $q = m + 2$.
L が非素数なら $\mathrm{co}\varphi(L) \geq q$ なので $q \leq \mathrm{co}\varphi(L) = q - 1 - m$. 矛盾.