数学の研究をはじめよう 2017/oct
劣完全数の素敵な世界 – 中編

ユークリッドの余関数

飯高 茂

平成 29 年 6 月 4 日

1 $P \geq 3$, 平行移動 $m = -\mu\overline{P}$ の劣完全数

平行移動のパラメータ m が $-\mu\overline{P}$ のとき劣完全数 a を調べる. このとき $\overline{P}\sigma(a) - Pa = \mu\overline{P}$ によって, $\overline{P}(\sigma(a) - \mu) = Pa$ になるので, 分数式で書くと

$$\frac{\overline{P}}{P} = \frac{a}{\sigma(a) - \mu}.$$

$\dfrac{\overline{P}}{P}$ は既約分数なので, 自然数 k があり $a = k\overline{P}, \sigma(a) - \mu = kP$ となる.

$$\sigma(a) - \mu = kP = k(\overline{P} + 1) = k\overline{P} + k = a + k.$$

よって, $\sigma(a) - a = k + \mu$.

2 ユークリッドの余関数

ここで $\sigma(a) - a$ がでてきたので $\mathrm{co}\sigma(a) = \sigma(a) - a$ とおきこれをユークリッドの余関数という. すると, $a = k\overline{P}$ であり $\mu = \sigma(a) - a - k$ によって, $\mu = co\sigma(a) - k$.

$a = k\overline{P}$ により, k は a の約数であり $\mu < 50$ の範囲に限って, a を決定することが目標である..

$\mathrm{co}\sigma(a) = 1$ は a が素数になる必要十分条件である. a の a 以外の約数の和であり, $\mathrm{co}\sigma(a) = a$ は a が完全数になる条件式である.

例 $a = 220$ のとき $a = 22*10 = 2^2*5*11$ を利用して, $\sigma(a) = (2^3-1)*6*12 = 72*7 = 504$ により $\mathrm{co}\sigma(a) = 504 - 220 = 284$ になる.

そこで $\mathrm{co}\sigma(284) = 220$ となる．これは不思議なこととは言えないが稀な出来事である．$\mathrm{co}\sigma$ によって 220 と 284 が入れ替わるのである．

このことはピタゴラスの時代には知られていたという．

3 ユークリッドの余関数の評価

ユークリッドの余関数 $\mathrm{co}\sigma(a)$ のうまい評価式を作らないと劣完全数の決定問題が解けない．

q は素数 とする．$a = q^j$ のとき

$\mathrm{co}\sigma(q^j) = \sigma(q^j) - q^j = \dfrac{q^{j+1}-1}{\overline{q}} - q^j = \dfrac{q^j - 1}{\overline{q}} = \sigma(q^{j-1})$.

よって, $\mathrm{co}\sigma(q^j) = \sigma(q^{j-1})$.

次に q は素数で $a = q^j\alpha, (\alpha$ は q で割れない$)$ とする．

定理 1 $a = q^j\alpha, (j \geq 1, \alpha > 1, q \not| \alpha)$ のとき

1. $co\sigma(q^j\alpha) = \sigma(q^j)co\sigma(\alpha) + \alpha\sigma(q^{j-1})$.

2. $co\sigma(q^j\alpha) \geq \sigma(q^j) + \alpha\sigma(q^{j-1})$.

3. $co\sigma(q^j\alpha) = \sigma(q^j) + \alpha\sigma(q^{j-1})$ なら α は素数.

Proof.

$\sigma(q^j\alpha) = \dfrac{(q^{j+1}-1)\sigma(\alpha)}{\overline{q}}$ なので

$$\begin{aligned}
co\sigma(q^j\alpha) &= \sigma(q^j\alpha) - q^j\alpha \\
&= \frac{(q^{j+1}-1)\sigma(\alpha) - q^j\alpha(q-1)}{\overline{q}} \\
&= \frac{(q^{j+1}-1)(co\sigma(\alpha)+\alpha) - q^j\alpha(q-1)}{\overline{q}} \\
&= \frac{(q^{j+1}-1)co\sigma(\alpha) + (q^j-1)\alpha)}{\overline{q}} \\
&= \sigma(q^j)co\sigma(\alpha) + \sigma(q^{j-1})\alpha
\end{aligned}$$

以上によって,

$$co\sigma(q^j\alpha) = \sigma(q^j)co\sigma(\alpha) + \sigma(q^{j-1})\alpha.$$

$A = \sigma(q^j) + \sigma(q^{j-1})\alpha$ とおくとき

$$\begin{aligned} co\sigma(q^j\alpha) - A &= \sigma(q^j)co\sigma(\alpha) + \sigma(q^{j-1})\alpha - A \\ &= \sigma(q^j)(co\sigma(\alpha) - 1) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

$co\sigma(q^j\alpha) = A$ が成り立つなら,$co\sigma(\alpha) - 1 = 0$. このとき α は素数.

例 $a = 220 = 4 * 5 * 11, \alpha = 5 * 11$ のとき $\mathrm{co}\sigma(\alpha) = 5 + 11 + 1 = 17$,
$\mathrm{co}\sigma(2^2\alpha) = \sigma(2^2)\mathrm{co}\sigma(\alpha) + \alpha\sigma(2) = 7 * 17 + 55 * 3 = 284 = 4 * 71$.
$\beta = 71$ とおけば $\mathrm{co}\sigma(284)$ =$\mathrm{co}\sigma(4\beta) = \sigma(2^2)\mathrm{co}\sigma(\beta) + \beta\sigma(2) = 220$.
(220,284) を友愛数という.

3.1 オイラー余関数

これは次のオイラー余関数の結果の類似である.
オイラー余関数 は $a - \varphi(a)$ で定義され $\mathrm{co}\varphi(a)$ がその記号である.

定理 2 $a = q^j\alpha, (\alpha > 1, q \not| \alpha)$ のとき

1. $co\varphi(q^j\alpha) = q^{j-1}(\alpha + \overline{q}co\varphi(\alpha))$,
2. $co\varphi(q^j\alpha) \geq q^{j-1}(\alpha + \overline{q})$.
3. $co\varphi(q^j\alpha) = q^{j-1}(\alpha + \overline{q})$ なら α は素数.

証明は読者に委ねる.
次の公式を見比べてみよう.

$$co\varphi(q^j\alpha) = q^{j-1}\overline{q}co\varphi(\alpha) + \alpha q^{j-1},$$

$$co\sigma(q^j\alpha) = \sigma(q^j)\mathrm{co}\sigma(\alpha) + \alpha\sigma(q^{j-1}),$$

両者は類似性の高い公式とみることができる.

次に co$\varphi(a)$ および co$\sigma(a)$ の数表を載せておく.

co$\sigma(a)$ と異なり co$\varphi(a) = a - \varphi(a)$ がオイラー余関数の定義であるがその値が 1 になるとき素数の判定ができる, という意味で類似している.

表 1: a が素数でないときの co$\varphi(a)$ および co$\sigma(a)$ の数表

a	factor	$\varphi(a)$	$\sigma(a)$	co$\varphi(a)$	co$\sigma(a)$
4	$[2^2]$	2	7	2	3
9	$[3^2]$	6	13	3	4
6	$[2,3]$	2	12	4	6
25	$[5^2]$	20	31	5	6
8	$[2^3]$	4	15	4	7
10	$[2,5]$	4	18	6	8
49	$[7^2]$	42	57	7	8
15	$[3,5]$	8	24	7	9
14	$[2,7]$	6	24	8	10
21	$[3,7]$	12	32	9	11
121	$[11^2]$	110	133	11	12
27	$[3^3]$	18	40	9	13
35	$[5,7]$	24	48	11	13
22	$[2,11]$	10	36	12	14
169	$[13^2]$	156	183	13	14
16	$[2^4]$	8	31	8	15
33	$[3,11]$	20	48	13	15
12	$[2^2,3]$	4	28	8	16
26	$[2,13]$	12	42	14	16
39	$[3,13]$	24	56	15	17
55	$[5,11]$	40	72	15	17
289	$[17^2]$	272	307	17	18
65	$[5,13]$	48	84	17	19
77	$[7,11]$	60	96	17	19
34	$[2,17]$	16	54	18	20
361	$[19^2]$	342	381	19	20
18	$[2,3^2]$	6	39	12	21
51	$[3,17]$	32	72	19	21
91	$[7,13]$	72	112	19	21

4 $m = \mu\overline{P}$ の場合

$a = k\overline{P}$ であり $\mu = co\sigma(a) - k$ によって, $\mu < 50$ の場合に a を決定することが目標である.

P は奇素数なので, a は偶数になることを注意する. まず, a の素因数分解が簡単な場合から考える.

1) $a = p^j, j > 0$ のとき. $a = k\overline{P}$ は偶数なので,$p = 2$. よって $a = 2^j$.
$\mathrm{co}\sigma(2^j) = \sigma(2^{j-1}) = 2^j - 1$ なので,

$$\mu = co\sigma(a) - k = 2^j - 1 - k$$

ここで議論を簡単にするため, $P = 3$ の場合とする. $a = 2k, k = 2^{j-1}$ なので

$$\mu = co\sigma(a) - k = 2^j - 1 - k = 2^j - 1 - 2^{j-1} = 2^{j-1} - 1.$$

次の数表ができた.

表 2: $k = 2^{j-1}, a = 2k = 2^j$; μ の値

a	j	$k = 2^{j-1}$	μ	m
4	2	2	1	-2
8	3	4	3	-6
16	4	8	7	-14
32	5	16	15	-30
64	6	32	31	-62
128	7	64	63	-126

2) $a = 2^j\alpha, (\alpha > 1, j \geq 1, \alpha$: 奇数) のとき. $P = 3$ を仮定しているので $k = 2^{j-1}\alpha$ となる.

定理 1 の公式を $q = 2$ として使う.

$$co\sigma(2^j\alpha) = \sigma(2^j)co\sigma(\alpha) + \sigma(2^{j-1})\alpha.$$

$$\mu = co\sigma(a) - k = \sigma(2^j)co\sigma(\alpha) + \sigma(2^{j-1})\alpha - 2^{j-1}\alpha$$

$\sigma(2^{j-1})\alpha - 2^{j-1}\alpha = (2^j - 1)\alpha - 2^{j-1}\alpha = (2^{j-1} - 1)\alpha$ なので次の計算式ができた.

$$\mu = (2^{j+1} - 1)co\sigma(\alpha) + (2^{j-1} - 1)\alpha.$$

これが μ を与える公式である.

$j=1$ のとき $k=\alpha, a=2\alpha$ であり,

$$\mu = 3co\sigma(\alpha).$$

α が素数の場合は, $\mu = 3co\sigma(\alpha) = 3, m = -6$.

表 3: $a=2\alpha, \mu = 3co\sigma(\alpha)$, μ

a	α	k	$co\sigma(\alpha)$	μ	m
6	3	3	1	3	-6
18	9	9	4	12	-24
10	5	5	1	3	-6
30	15	15	9	27	-54
50	25	25	6	18	-36
14	7	7	1	3	-6
42	21	21	11	33	-66
22	11	11	1	3	-6
26	13	13	1	3	-6
34	17	17	1	3	-6
54	27	27	13	39	-78
66	33	33	15	45	-90
98	49	49	8	24	-48
242	121	121	12	36	-72

$a=2\alpha$, $(\alpha > 2)$ のとき, $\mu = 3, 12, 18, 24, 27, 36, 45, \cdots$ $-m < 50$ とすると, $\mu = 3, 12, 18, 24, 27$.

$j = 2$ のとき公式は $a = 4\alpha, k = 2\alpha$.

$$\mu = 7co\sigma(\alpha) + \alpha.$$

α が素数なら, $\mu = 7 + \alpha$.

表 4: $a = 4\alpha, 7co\sigma(\alpha) + \alpha$, μ の決定

a	α	k	$co\sigma(\alpha)$	μ	m
12	3	6	1	10	-20
36	9	18	4	37	-74
20	5	10	1	12	-24
60	15	30	9	78	-156
100	25	50	6	67	-134
28	7	14	1	14	-28
84	21	42	11	98	-196
44	11	22	1	18	-36
52	13	26	1	20	-40
68	17	34	1	24	-48
108	27	54	13	118	-236
132	33	66	15	138	-276

$\mu < 30$ の場合は $a = 12, \mu = 10$; $a = 20, \mu = 12$; $a = 28, \mu = 14$; $a = 44, \mu = 18$; $a = 52, \mu = 20$; $a = 68, \mu = 24$.

$j = 3$ のとき公式は

$$\mu = 15co\sigma(\alpha) + 3\alpha.$$

α が素数なら, $\mu = 15 + 3\alpha$.

以上の表から次の結果が導かれる. m を与える a が無いときは記さない.

表 5: $a = 8\alpha, \mu = 15co\sigma(\alpha) + 3\alpha$, μ の決定

a	α	k	$co\sigma(\alpha)$	μ	m
24	3	12	1	24	-48
72	9	36	4	87	-174
40	5	20	1	30	-60
120	15	60	9	180	-360
200	25	100	6	165	-330
56	7	28	1	36	-72
168	21	84	11	228	-456
88	11	44	1	48	-96
104	13	52	1	54	-108

5 $2\sigma(a) = 3a - m$, m :偶数の場合

$2\sigma(a) = 3a - m, (m = 2\mu)$ を満たす a とその素因数分解

```
m=-48;factor(24)=2^3*3,factor(68)=2^2*17,factor(98)=2*7^2
m=-48; factor(24)=2^3*3, factor(68)=2^2*17, factor(98)=2*7^2
m=-40; factor(52)=2^2*13
m=-36 ; factor(44)=2^2*11, factor(50)=2*5^2
m=-30; factor(32)=2^5
m=-28; factor(28)=2^2*7
m=-24;factor(18)=2*3^2,factor(20)=2^2*5
m=-20; factor(12)=2^2*3
m=-14;factor(16)=2^4

m=-6;
factor(6)=2*3,factor(8)=2^3,factor(10)=2*5,factor(14)=2*7

(factor(2p)=2*p が無限に続く.p:奇素数)

m=-2 ;factor(4)=2^2
m=0; factor(2)=2
```

5.1 $P = 5$ の場合

$P = 5$ の場合の結果だけをあげておく. (m は 4 の倍数 $-m$ は 100 以下の場合)

```
m=-92,factor(32)=2^5
m=-84,factor(28)=2^2*7
m=-68,factor(20)=2^2*5
m=-52,factor(12)=2^2*3
m=-44,factor(16)=2^4
m=-20,factor(8)=2^3
m=-8,factor(4)=2^2
```

臆病なまでに解が少ない.