超完全数の世界

2017年8月25日

於 東京理科大学

飯高 茂

1　完全数の平行移動

$\sigma(a)$ を自然数 a の 約数の和とする. $\sigma(a)=2a$ を満たす a はユークリッドにより完全数と呼ばれた. $\sigma(2^e)=2^{e+1}-1$　はユークリッドの発見した公式である.

$q=\sigma(2^e)-1+m$ が素数のとき $a=2^eq$ を m だけ平行移動した狭義の完全数という.

$m=0$ のときとくにユークリッドの完全数といい実際に完全数となる. これは原論で得られた最良の結果のひとつ.

一般の場合も $\sigma(a)=2a-m$ を満たす. この式を満たす a を m だけ平行移動した (広義) の究極の完全数という.

計算例をあげる.

1.1　完全数の数表

表 1: 完全数の場合,$q=2^{e+1}-1$ は素数

$e \bmod 4$	e	$e+1$	2^e*q	a	$a \bmod 10$
1	1	2	$2*3$	6	6
2	2	3	2^2*7	28	8
0	4	5	2^4*31	496	6
2	6	7	2^6*127	8128	8
0	12	13	$2^{12}*8191$	33550336	6
0	16	17	$2^{16}*131071$	8589869056	6
2	18	19	$2^{18}*524287$	137438691328	8

1.2　$m=1$

$\sigma(a)=2a-1$ を満たす例は $a=2^e(e=1,2,3,\cdots)$. このように e に関係のない素数べきの解を C 型解という.

1.3　$m=2$

2 だけ平行移動した場合, $q=2^{e+1}+1$ が素数になるので $e+1$ は 2 のべき, すなわち $e+1=2^r$ と書くことができる.

一般に $F_r=2^{2^r}+1$ をフェルマ数といい, これが素数になるならフェルマ素数という.

フェルマはフェルマ数はすべて素数になると予想し,死に至るまで考えていた.

表 2: $q=2^{e+1}+1$ が素数

e	$e+1$	$e \bmod 4$	2^e*q	a
0	1	0	3	3
1	2	1	$2*5$	10
3	4	3	2^3*17	136
7	8	3	2^7*257	32896
15	16	3	$2^{15}*65537$	2147516416

$m=0,2$ では反例が見つからない,

$m=2$ のとき解は $2^eq(q:$ 奇素数）　の型しか見当たらない. この形の解を正規形の解, または A 型解という. 次に $m=4$ の場合を扱う.

1.4 $\sigma(a) = 2a - 4$ の場合

$m = 4$ のとき $\sigma(a) = 2a - 4$. この解をパソコンで計算したところ次の表ができた.

表 3: $\sigma(a) = 2a - 4$

a	素因数分解	$\sigma(a)$
5	$[5]$	6
14	$[2, 7]$	24
44	$[2^2, 11]$	84
110	$[2, 5, 11]$	216
152	$[2^3, 19]$	300
884	$[2^2, 13, 17]$	1764
2144	$[2^5, 67]$	4284
8384	$[2^6, 131]$	16764
18632	$[2^3, 17, 137]$	37260

$a = 110, a = 884, a = 18632$ は解だが $s(a) = 3$.

$s(a) = 3$ の解は他に 2 個あるが $2^e rq, (2 < r < q :$ 素数$)$ の形をしている. これらは第 2 正規形の解と呼ばれる. D 型解ともいう.

1.5 $m = -12$ のとき

$m = -12$ のとき方程式は $\sigma(a) = 2a + 12$ を満たす.

表 4: $[P = 2, m = -12]$ 完全数

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$
30	$2 * 3 * 5$
42	$2 * 3 * 7$
54	$2 * 3^3$
66	$2 * 3 * 11$
78	$2 * 3 * 13$
102	$2 * 3 * 17$
114	$2 * 3 * 19$
138	$2 * 3 * 23$
174	$2 * 3 * 29$
186	$2 * 3 * 31$
222	$2 * 3 * 37$

解として $a = 6p, (p \neq 2, 3 :$ 素数$)$ が続くので途中略す.

$a = 6p$ を通常解という. 6:完全数

$a = 24 = 2^3 * 3$ と $a = 54 = 2 * 3^3$ はいわゆる擬素数解である.

以上見たように, 方程式 $\sigma(a) = 2a + 12$ 　には解として

通常解 $a = 6p, (2 < 3 < p :$ 素数$)$ は無限にありこれらを B 型解という.

擬素数解 $a = 24 = 2^3 * 3$, $a = 54 = 2 * 3^3$ の他に全く異質のエイリアン解の 3 種類の解がある.

この他の形もあるかもしれない.

計算の結果平行移動でできた完全数の場合解には A,B,C,D の 4 主系列があることがわかる.(しかし証明はない)

2　B 型解 と完全数

$$\sigma(a) - 2a = -m$$

の B 型解 $a = \alpha p(\alpha$: 定数, $p > \alpha$:素数) があるとする.

$$\sigma(a) - 2a = \sigma(\alpha p) - 2\alpha p = \sigma(\alpha)(p+1) - 2\alpha p = (\sigma(\alpha) - 2\alpha)p + \sigma(\alpha)$$

なので,$\sigma(a) - 2a = -m$ を思い出すと

$$(\sigma(\alpha) - 2\alpha)p + \sigma(\alpha) = -m$$

ゆえに

$$(\sigma(\alpha) - 2\alpha)p = -\sigma(\alpha) - m$$

ここで p は無数にある素数なので

$\sigma(\alpha) - 2\alpha = 0$ かつ $\sigma(\alpha) = -m$ が成り立つ. $\sigma(\alpha) - 2\alpha = 0$ により α は完全数.

ここで 2000 年来の大難問「奇数完全数の不存在」を仮定すると正規形の表示ができるので $\alpha = 2^e r, (r = 2^{e+1} - 1$:素数).

したがって $\sigma(\alpha) = 2\alpha$ なので, $m = -2\alpha$.

完全数の平行移動でできた式 $\sigma(a) - 2a = -m$ に B 型解があるとすると再び完全数が登場した.

私はこの不思議さに言葉を失った．そしてこれを一般の底の場合に考えようと思うに至った.

3　究極の完全数

P を素数とし, 整数 m に関して $\sigma(P^e) + m$ が素数 q のとき $a = P^e q$ を m だけ平行移動した底が P の狭義の究極の完全数と呼ぶ.

m だけ平行移動した場合を考えることは重要であり, これによって問題が奥深くなった.

$\overline{P} = P - 1$ とおく.

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)\mathrm{Maxp}(a) - m\overline{P}. \tag{1}$$

$\mathrm{Maxp}(a)$ は a の最大素因子を指している.

この式を満たす a を m だけ平行移動した底が P の広義の究極の完全数と呼ぶ.

底が素数: P , 平行移動 : m の究極の完全数の方程式

4 B 型解

究極の完全数においても B 型解を探す.

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}$$

において B 型解 $a = \alpha p(\alpha$: 定数, $p > \alpha$:素数) があるとする.

p は一般の素数なので無限にある.$q = p$ になる.

$$\begin{aligned}\overline{P}\sigma(a) - Pa &= \overline{P}\sigma(\alpha p) - P\alpha p \\ &= p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha) + \overline{P}\sigma(\alpha).\end{aligned}$$

$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}$ を使って

$$p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha) + \overline{P}\sigma(\alpha) = (P-2)p - m\overline{P}.$$

p でまとめると

$$p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha - (P-2)) = -\overline{P}\sigma(\alpha) - m\overline{P}.$$

さて p の係数 $\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha - (P-2)$ を 0 とおくと $\sigma(\alpha) = -m$.

定義 1 $\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + (P-2)$ のとき
α を底 P の広義の超完全数 *(hyperperfect number)* という.

$\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + (P-2)$ の解 α は正規形と仮定する. (正規形仮説)
$\alpha = P^f r, (r$:素数) となるので,$W = P^{f+1} - 1$ とおくと
$\overline{P}\sigma(\alpha) = W(r+1), P\alpha = (W+1)r.$

$$W = r + P - 2 \tag{2}$$

$r = W - P + 2 = P^{f+1} - 1 - P + 2 = P^{f+1} - P + 1.$

定義 2 $r = P^{f+1} - P + 1$ が素数のとき $\alpha = P^f r$ を狭義の超完全数という.

$\alpha = P^f r$ は完全数の一般化であり, これを超完全数 (hyper perfect number) という.

4.1 先行研究

1970 年に Minoli and Bear は k hyperperfect number を導入した.

定義 3 $k\sigma(\alpha) = (k+1)\alpha + (k-1) = 0$ のとき
α を *$k-$hyperperfect number* という.

命題 1 $P = k+1$ が素数で,$Q = P^i - P + 1$ も素数なら $\alpha = P^{i-1}Q$ は *$k-$hyperperfect number.*


```
Minoli, Daniel (Feb 1981),
   Structural issues for hyperperfect numbers,
   Fibonacci Quarterly, 19 (1): 6?14.
Minoli, Daniel (April 1980),
   Issues in non-linear hyperperfect numbers,
    Mathematics of Computation, 34 (150): 639?645, doi:10.2307/2006107.
Minoli, Daniel (October 1980),
    New results for hyperperfect numbers,
   Abstracts of the American Mathematical Society, 1 (6): 561.
```


ここでフィボナッチ数列の専門誌が出ている.

4.2 平行移動した超完全数

底が素数: P , 平行移動 : m の狭義の超完全数 (hyper paerfect numbers) の定義:

定義 4 $r = P^{f+1} - P + 1 + m$ が素数のとき,
$\alpha = P^f r$ を底が素数*:* P *,* 平行移動 *:* m の狭義の超完全数という*.*

次にこの方程式を求める. $W = P^{f+1} - 1$ とおく. 定義により $r = P^{f+1} - P + 1 + m = W - P + m + 2$.

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = \overline{P}\sigma(P^f r) = W(r+1) = Wr + W.$$

$Wr = (P^{f+1} - 1)r = P\alpha - r$ により

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = Wr + W = P\alpha - r + W.$$

$r = W - P + m + 2$ により $W - r = P - 2 - m$ なので次の方程式をえる:

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + P - 2 - m.$$

定義 5 $\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + P - 2 - m$ の解を底が素数*:* P *,* 平行移動 *:* m の広義の超完全数という*.*

究極の完全数と異なり $\mathrm{Maxp}(\alpha)$ が消えている点に注意したい.

4.3 計算例

$P = 3$ のとき方程式は

$$2\sigma(\alpha) = 3\alpha + 1 - m.$$

表 5: $P = 3, m = 0;$

a	factor
21	$3 * 7$
2133	$3^3 * 79$
19521	$3^4 * 241$
176661	$3^5 * 727$

表 6: $P = 3, m = 2;$

a	factor
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7
6561	3^8
19683	3^9
59049	3^{10}
177147	3^{11}

表 7: $P = 3, m = 4$;

a	factor
7	7
39	$3 * 13$
279	$3^2 * 31$
178119	$3^5 * 733$

表 8: $P = 3, m = 6$;

a	factor
7	7
39	$3 * 13$
279	$3^2 * 31$
178119	$3^5 * 733$

表 9: $P = 3, m = 10$;

a	factor
11	11
35	$5 * 7$
51	$3 * 17$
2403	$3^3 * 89$
20331	$3^4 * 251$
54723	$3 * 17 * 29 * 37$
68643	$3^2 * 29 * 263$
103683	$3 * 17 * 19 * 107$

表 10: $P = 3, m = 12;$

a	factor
13	13
57	$3 * 19$
333	$3^2 * 37$
15609	$3 * 11^2 * 43$
179577	$3^5 * 739$

表 11: $P = 3, m = 14;$

a	factor
25	5^2

表 12: $P = 3, m = 17;$

a	factor
17	17
69	$3 * 23$
369	$3^2 * 41$
1221	$3 * 11 * 37$
20817	$3^4 * 257$
149765	$5 * 7 * 11 * 389$
180549	$3^5 * 743$

表 13: $P = 3, m = 18;$

a	factor
19	19
387	$3^2 * 43$
2619	$3^3 * 97$

5　$P = 3$ のときの 究極の完全数

$P = 3$, 平行移動 : m の究極の完全数の方程式は $2\sigma(a) = 3a + q - 2m$ になる.

ここで $a = 21p, (7 < p :$ 素数) ならすべて解としよう.(したがって解は無限にある).

$\sigma(a) = \sigma(21p) = 32(p+1), q = p$ なので,

$$2\sigma(a) - 3a - q = 64(p+1) - 63p - p = 64.$$

$2\sigma(a) - (3a+q) = -2m$ によれば, $m = -32$. したがって $2\sigma(a) = 3a + q + 64$ には解 $a = 21p$ がある.

この 21 こそ $P = 3, m = 0$ での最小の超完全数であった. ($q =$Maxp(a) とした.)

数値例

表 14: $P = 3, m = -32$;

a	factor
231	$3 * 7 * 11$
273	$3 * 7 * 13$
357	$3 * 7 * 17$
399	$3 * 7 * 19$
483	$3 * 7 * 23$
609	$3 * 7 * 29$
651	$3 * 7 * 31$
777	$3 * 7 * 37$

表 15: $P = 3, m = -32$;continue

a	factor
7077	$3 * 7 * 337$
7209	$3^4 * 89$
7287	$3 * 7 * 347$
7329	$3 * 7 * 349$
7413	$3 * 7 * 353$
7539	$3 * 7 * 359$
7707	$3 * 7 * 367$
7833	$3 * 7 * 373$
7959	$3 * 7 * 379$

エイリアン $7209 = 3^4 * 89$ が隠れていた.

表 16: $P = 3, m = -32$;continue

a	factor
772989	$3 * 7 * 36809$
773241	$3 * 7 * 36821$
773469	$3^6 * 1061$
773493	$3 * 7 * 36833$
773787	$3 * 7 * 36847$

エイリアン $773469 = 3^6 * 1061$が隠れていた.

詳しくは著者ホームページ (飯高 茂) HP:iitakashigeru.web.fc 2.com をご覧ください