超完全数について

飯高 茂

1 究極の完全数

$2^{e+1}-1=\sigma(2^e)$ はユークリッドの公式であるが, $q=\sigma(2^e)-1+m$ が素数のとき $a=2^e q$ を m だけ平行移動した狭義の完全数という.

P を素数とし, 整数 m に関して $\sigma(P^e)+m$ が素数 q のとき $a=P^e q$ を m だけ平行移動した底が P の狭義の究極の完全数と呼ぶ.

m だけ平行移動した場合を考えることは重要であり, これによって問題が奥深くなった.

この場合の方程式も比較的シンプルである.

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa=(P-2)\mathrm{Maxp}(a)-m(P-1). \tag{1}$$

$\mathrm{Maxp}(a)$ は a の最大素因子を指している.

この式を満たす a を m だけ平行移動した底が P の広義の究極の完全数と呼ぶ.

2 $P=2$ のとき

$P=2$ のときは以前に扱ったが考え方を整理するため再度考察する.

3 $m<0$ の場合

3.1 $[P=2, m=-2]$ 完全数

解 $a=650=2*5^2*13$ は異形だが他は正規形.

$2*5^2*13$ はヒトコブラクダを連想させる形なのでヒトコブと呼ぶ.

表 1: $[P=2, m=-2]$ 完全数

a	素因数分解
20	$2^2 * 5$
104	$2^3 * 13$
464	$2^4 * 29$
650	$2 * 5^2 * 13$
1952	$2^5 * 61$
130304	$2^8 * 509$

4 第 1 完全数 6 について

4.1 $m=-12$ のとき

$\sigma(a) = 2a + 12$ を満たす.

表 2: $[P=2, m=-12]$ 完全数

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$
30	$2 * 3 * 5$
42	$2 * 3 * 7$
54	$2 * 3^3$
66	$2 * 3 * 11$
78	$2 * 3 * 13$
102	$2 * 3 * 17$
114	$2 * 3 * 19$
138	$2 * 3 * 23$
174	$2 * 3 * 29$
186	$2 * 3 * 31$
222	$2 * 3 * 37$

$a = 6p, (p \neq 2, 3:$ 素数$)$ が続くので途中略す.

$a = 6p$ を通常解という.

$a = 24 = 2^3 * 3$ と $a = 54 = 2 * 3^3$ はいわゆる擬素数解である.

ここで通常の解 $6p$ と異なる異常な解 $a = 304 = 2^4 * 19$ が出てきた. これをエイリアンという. これは正規形 $2^e q$ なので正規形としての一般の解を探す.

逆に正規形 $2^e q$ が解なら $q = 2^{e+1} - 13$ を満たす.

表 3: $[P = 2, m = -12]$ 完全数 続き

a	素因数分解
282	$2 * 3 * 47$
304	$2^4 * 19$
318	$2 * 3 * 53$
354	$2 * 3 * 59$
366	$2 * 3 * 61$
402	$2 * 3 * 67$

正規形も求めるプログラムを用いて次の解の表がえられた.

表 4: $[P = 2, m = -12; a = 2^e q]$ 正規解

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$
304	$2^4 * 19$
127744	$2^8 * 499$
33501184	$2^{12} * 8179$
8589082624	$2^{16} * 131059$
10384593717069654320312270165377024	$2^{56} * 144115188075855859$

24 を除くと,

$$e \equiv 0 \mod 4, q \equiv 9 \mod 10, a \equiv 4 \mod 10$$

を満たす.

以上見たように, 方程式 $\sigma(a) = 2a + 12$ には解として

通常解 $a = 6p, (2 < 3 < p :$ 素数),

擬素数解 $a = 24 = 2^3 * 3$, $a = 54 = 2 * 3^3$ の他に全く異質のエイリアン解の3 種類の解がある.

この他の形もあるかもしれない.

$$\sigma(a) - 2a = -m$$

の B 型解 $a = \alpha p$ $(p, \alpha:$ 互いに素$)$ があるとする．$\alpha < p$ は素数.

$$\sigma(a) - 2a = \sigma(\alpha p) - 2\alpha p = \sigma(\alpha)(p+1) - 2\alpha p = (\sigma(\alpha) - 2\alpha)p + \sigma(\alpha)$$

なので,$\sigma(a) - 2a = -m$ を思い出すと

$$(\sigma(\alpha) - 2\alpha)p + \sigma(\alpha) = -m$$

ゆえに

$$(\sigma(\alpha) - 2\alpha)p = -\sigma(\alpha) - m$$

ここで p は無数にある素数なので

$\sigma(\alpha) - 2\alpha = 0$ かつ $\sigma(\alpha) = -m$ が成り立つ.

$\sigma(\alpha) - 2\alpha = 0$ により α は完全数.

ここで 2000 年来の大難問「奇数完全数の不存在」を仮定すると正規形の表示ができるので $\alpha = 2^e r, (r = 2^{e+1} - 1$:素数$)$.

したがって $\sigma(\alpha) = 2\alpha$ なので, $m = -2\alpha$.

完全数の平行移動でできた式 $\sigma(a) - 2a = -m$ に B 型解があるとすると再び完全数が登場した.

私はこの不思議さに言葉を失った．そしてこれを一般の底の場合に考えようと思うに至った.

5 さらなる一般化

底が素数: P , 平行移動 : m の究極の完全数の方程式

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}$$

においての解 $a = \alpha p$ $(p, \alpha:$ 互いに素,$\alpha < p)$ があるとする．p は一般の素数なので無限にある．$q = p$ になる.

$$\begin{aligned}\overline{P}\sigma(a) - Pa &= \overline{P}\sigma(\alpha p) - P\alpha p \\ &= p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha) + \overline{P}\sigma(\alpha).\end{aligned}$$

$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}$ を使って

$$p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha) + \overline{P}\sigma(\alpha) = (P-2)p - m\overline{P}.$$

p でまとめると

$$p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha - (P-2)) = -\overline{P}\sigma(\alpha) - m\overline{P}.$$

さて p の係数 $\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha - (P-2)$ を 0 とおくと $\sigma(\alpha) = -m$.

定義 1 $\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + (P-2)$ のとき
α を底 P の広義の超完全数 *(hyperperfect number)* という.

$\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + (P-2)$ の解 α は正規形と仮定する. (正規形仮説)
$\alpha = P^f r, (r$:素数$)$ となるので,$W = P^{f+1} - 1$ とおくと
$\overline{P}\sigma(\alpha) = W(r+1), P\alpha = (W+1)r.$

$$W = r + P - 2 \tag{2}$$

$r = W - P + 2 = P^{f+1} - 1 - P + 2 = P^{f+1} - P + 1.$

定義 2 $r = P^{f+1} - P + 1$ が素数のとき $\alpha = P^f r$ を狭義の超完全数という.

$\alpha = P^f r$ は完全数の一般化であり, これを超完全数 (hyper perfect number) という.

5.1 先行研究

1970 年に Minoli and Bear は k hyperperfect number を導入した.

定義 3 $k\sigma(\alpha) = (k+1)\alpha + (k-1) = 0$ のとき
α を $k-$*hyperperfect number* という.

命題 1 $P = k+1$ が素数で,$Q = P^i - P + 1$ も素数なら $\alpha = P^{i-1}Q$ は$k-$*hyperperfect number.*

5.2　平行移動した超完全数

底が素数: P , 平行移動 : m の狭義の超完全数の定義:

$r = P^{f+1} - P + 1 + m$ が素数のとき,$\alpha = P^f r$ は完全数の一般化であり, これを底が素数: P , 平行移動 : m の狭義の超完全数という.

次にこの方程式を求める. $W = P^{f+1} - 1$ とおく. 定義により $r = P^{f+1} - P + 1 + m = W - P + m + 2$.

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = \overline{P}\sigma(P^f r) = W(r+1) = Wr + W.$$

$Wr = (P^{f+1} - 1)r = P\alpha - r$ により

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = Wr + W = P\alpha - r + W.$$

$r = W - P + m + 2$ により $W - r = P - 2 - m$ なので次の方程式をえる:

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + P - 2 - m.$$

この解を底が素数: P , 平行移動 : m の広義の超完全数という.

究極の完全数と異なり $\mathrm{Maxp}(\alpha)$ が消えている点に注意したい.

5.3　計算例

$P = 3$ のとき方程式は

$$2\sigma(\alpha) = 3\alpha + 1 - m.$$

表 5: $P = 3, m = 0$;

a	factor
21	$3 * 7$
2133	$3^3 * 79$
19521	$3^4 * 241$
176661	$3^5 * 727$

表 6: $P = 3, m = 2;$

a	factor
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7
6561	3^8
19683	3^9
59049	3^{10}
177147	3^{11}

表 7: $P = 3, m = 4;$

a	factor
7	7
39	$3 * 13$
279	$3^2 * 31$
178119	$3^5 * 733$

表 8: $P = 3, m = 6;$

a	factor
7	7
39	$3 * 13$
279	$3^2 * 31$
178119	$3^5 * 733$

表 9: $P = 3, m = 10$;

a	factor
11	11
35	$5 * 7$
51	$3 * 17$
2403	$3^3 * 89$
20331	$3^4 * 251$
54723	$3 * 17 * 29 * 37$
68643	$3^2 * 29 * 263$
103683	$3 * 17 * 19 * 107$

表 10: $P = 3, m = 12$;

a	factor
13	13
57	$3 * 19$
333	$3^2 * 37$
15609	$3 * 11^2 * 43$
179577	$3^5 * 739$

表 11: $P = 3, m = 14$;

a	factor
25	5^2

表 12: $P=3, m=17$;

a	factor
17	17
69	$3*23$
369	3^2*41
1221	$3*11*37$
20817	3^4*257
149765	$5*7*11*389$
180549	3^5*743

表 13: $P=3, m=18$;

a	factor
19	19
387	3^2*43
2619	3^3*97

6 究極の完全数と超完全数

底 P, 平行移動 m の究極の完全数の方程式

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa=(P-2)q-m\overline{P}.$$

において, $a=P^erq$ を解とする. ここで最大素因子 q に関係しない解を探す. これは いわゆる B 型の解なのである.

$N=P^{e+1}-1, A=(r+1)(q+1), B=rq, \Delta=r+q$ とおくとき

$\overline{P}\sigma(a)-Pa=NA-(N+1)B=N(\Delta+1)-B$ なので究極の方程式から

$$N(\Delta+1)-B=(P-2)q-m\overline{P}.$$

$N(r+q+1)-rq=(P-2)q-m\overline{P}$ を q について整理すると

$$q(N-r-P+2)+N(r+1)+m\overline{P}=0.$$

ここで, $N-r-P+2=0$ および $N(r+1)+m\overline{P}=0$ が成り立つとして関係式を決定数する. $N-r-P+2$ から $r=N-P+2=P^{e+1}-P+1$ になりこれが素数. この素数を 超メルセンヌ素数という.

$P=3$ のとき $r=3^{e+1}-2$ が素数のとき底 $P=3$ の超メルセンヌ素数という.

素数の場合だけを取り出す.

```
e=1,factor(7)=7
e=3,factor(79)=79
e=4,factor(241)=241
e=5,factor(727)=727
e=8,factor(19681)=19681


% P=5
e=4,factor(3121)=3121
e=6,factor(78121)=78121
e=14,factor(30517578121)=30517578121
(%o4) done

P=7
e=1,factor(43)=43
e=2,factor(337)=337
e=5,factor(117643)=117643
e=8,factor(40353601)=40353601
```

$N(r+1)+m\overline{P}=0$　を書き直すと $-m=(1+P+\cdots+P^e)(r+1)$.
この m について次の方程式の解を求める.

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa=(P-2)q-m\overline{P}.$$

計算例

$P=3, e=1$ の場合 $r=7, -m=4*8=-32$ なので方程式は

$$2\sigma(a)-3a=q+2*32.$$

```
231,factor(231)=3*7*11
273,factor(273)=3*7*13
357,factor(357)=3*7*17
399,factor(399)=3*7*19
483,factor(483)=3*7*23
609,factor(609)=3*7*29
651,factor(651)=3*7*31
777,factor(777)=3*7*37
```

解は $a=3*7*p$ の形である.

$P=3, e=3$ の場合 $r=79$ $-m=40*80=-3200$ なので方程式は

$$2\sigma(a)-3a=q+2*3200.$$

その解は恐るべきものだった.

```
58851,factor(58851)=3^2*13*503
177039,factor(177039)=3^3*79*83
189837,factor(189837)=3^3*79*89
206901,factor(206901)=3^3*79*97
215433,factor(215433)=3^3*79*101
219699,factor(219699)=3^3*79*103
228231,factor(228231)=3^3*79*107

816939,factor(816939)=3^3*79*383
829737mfactor(829737)=3^3*79*389
```

中略

```
1960227,factor(1960227)=3^3*79*919
1981557,factor(1981557)=3^3*79*929
1998621,factor(1998621)=3^3*79*937
```

最初の解 $a=58851=3^2*13*503$ が理解できない. それ以外は通常解 3^3*79*q である.

$m=-3200$ A 型解

```
26,factor(3812798739293)=3812798739293
34,factor(25015772549496653)=25015772549496653
44,factor(1477156353275416846121)=1477156353275416846121
```

$P=7, e=1$ の場合 $r=43, -m=8*44=-352$ なので方程式は

$$6\sigma(a)-7a=5q-4*m=5q+4*352.$$

```
14147,factor(14147)=7*43*47
15953,factor(15953)=7*43*53
17759,factor(17759)=7*43*59
18361,factor(18361)=7*43*61
20167,factor(20167)=7*43*67
21371,factor(21371)=7*43*71
21973,factor(21973)=7*43*73
```

通常解 $7*43*q$

A 型解

```
8,factor(6725249)=6725249
20,factor(93090977347213649)=93090977347213649
28,factor(5366509593021966621139249)=5366509593021966621139249
```