合流型完全数について

飯高 茂

1 合流型の完全数

高橋氏が $\sigma(a), \varphi(a)$ で完全数を定義したらどうなるでしょう？という疑問をぶつけてきました.

実はこのアイデアは以前に考えてみようとしたことがあります. しかし誰も関心を示さないと思って封印していました.

そこで思いつくままにしてみたら, 意外にも不思議な植物が繁茂する別世界がありました.

平行移動のパラメータ m に対して $q=\sigma(2^e)+m$ が素数のとき $a=2^eq$ とおくとこれは $\sigma(a)=2a-m$ を満たす.

一方平行移動のパラメータを n とおく. $q_0=\varphi(2^{e+2})+1+n=2^{e+1}+1+n$ が素数のとき $a=2^eq_0$ とおく.

$\varphi(a)=2^{e-1}(q_0-1)$ によって $4\varphi(a)=2^{e+1}(q_0-1)=2a-2^{e+1}$.

$q_0=\varphi(2^{e+2})+1+n=2^{e+1}+1+n$ なので,

$$4\varphi(a)=2^{e+1}(q_0-1)=2a-2^{e+1}=2a-(q_0-1-n).$$

$\sigma(a)=2a-m$ から $4\varphi(a)=2a-(q_0-1-n)$ を引くことによって,

$$\sigma(a)-4\varphi(a)=q_0-1-n-m.$$

$q_0=\mathrm{Maxp}(a), \mu=n+m$ を用いて

$$\sigma(a)-4\varphi(a)=Maxp(a)-1-\mu.$$

これを合流型の完全数の方程式, この解を平行移動のパラメータ μ の合流型の完全数という.

2 計算例

表 1: $[P = 2, m = -22]$ 合流型

a	素因数分解
40	$2^3 * 5$
1696	$2^5 * 53$
518656	$2^9 * 1013$

表 2: $[P = 2, m = -20]$ 合流型

a	素因数分解
406	$2 * 7 * 29$
4028	$2^2 * 19 * 53$
34744	$2^3 * 43 * 101$
233368	$2^3 * 31 * 941$

表 3: $[P = 2, m = -18]$ 合流型

a	素因数分解
56	$2^3 * 7$
368	$2^4 * 23$
434	$2 * 7 * 31$
686	$2 * 7^3$
735	$3 * 5 * 7^2$
5372	$2^2 * 17 * 79$
7942	$2 * 11 * 19^2$
38535	$3 * 5 * 7 * 367$
128768	$2^8 * 503$
594814	$2 * 11 * 19 * 1423$

表 4: $[P = 2, m = -14]$ 合流型

a	素因数分解
234856	$2^3 * 31 * 947$
596486	$2 * 11 * 19 * 1427$

表 5: $[P = 2, m = -12]$ 合流型

a	素因数分解
286	$2 * 11 * 13$
518	$2 * 7 * 37$
3404	$2^2 * 23 * 37$
39165	$3 * 5 * 7 * 373$
597322	$2 * 11 * 19 * 1429$

表 6: $[P = 2, m = -10]$ 合流型

a	素因数分解
88	$2^3 * 11$
1888	$2^5 * 59$
30104	$2^3 * 53 * 71$
32128	$2^7 * 251$
521728	$2^9 * 1019$

表 7: $[P = 2, m = -9]$ 合流型

a	素因数分解
50	$2 * 5^2$

表 8: $[P = 2, m = -8]$ 合流型

a	素因数分解
574	$2 * 7 * 41$
236344	$2^3 * 31 * 953$
598994	$2 * 11 * 19 * 1433$

表 9: $[P = 2, m = -6]$ 合流型

a	素因数分解
104	$2^3 * 13$
464	$2^4 * 29$
602	$2 * 7 * 43$
1952	$2^5 * 61$
5644	$2^2 * 17 * 83$
39795	$3 * 5 * 7 * 379$
48248	$2^3 * 37 * 163$
130304	$2^8 * 509$
263408	$2^4 * 101 * 163$
522752	$2^9 * 1021$

表 10: $[P = 2, m = -2]$ 合流型

a	素因数分解
28	$2^2 * 7$
496	$2^4 * 31$
658	$2 * 7 * 47$
8128	$2^6 * 127$
40215	$3 * 5 * 7 * 383$
601502	$2 * 11 * 19 * 1439$

表 11: $[P = 2, m = 2]$ 合流型

a	素因数分解
32	2^5
64	2^6
128	2^7
136	$2^3 * 17$
256	2^8
512	2^9
1024	2^{10}
2048	2^{11}
4096	2^{12}
8192	2^{13}
16384	2^{14}
32768	2^{15}
32896	$2^7 * 257$
65536	2^{16}
131072	2^{17}
262144	2^{18}
524288	2^{19}

表 12: $[P = 2, m = 3]$ 合流型

a	素因数分解
98	$2 * 7^2$

表 13: $[P = 2, m = 4]$ 合流型

a	素因数分解
742	$2 * 7 * 53$
40845	$3 * 5 * 7 * 389$
370352	$2^4 * 79 * 293$

表 14: $[P = 2, m = 6]$ 合流型

a	素因数分解
44	$2^2 * 11$
105	$3 * 5 * 7$
152	$2^3 * 19$
2144	$2^5 * 67$
8384	$2^6 * 131$
35432	$2^3 * 43 * 103$
52118	$2 * 11 * 23 * 103$
239816	$2^3 * 31 * 967$
604846	$2 * 11 * 19 * 1447$

表 15: $[P=2, m=8]$ 合流型

a	素因数分解
374	$2*11*17$

表 16: $[P=2, m=10]$ 合流型

a	素因数分解
52	2^2*13
592	2^4*37
826	$2*7*59$
1485	3^3*5*11
4484	$2^2*19*59$
240808	$2^3*31*971$
489392	$2^4*73*419$
606518	$2*11*19*1451$

表 17: $[P=2, m=12]$ 合流型

a	素因数分解
854	$2*7*61$
6052	$2^2*17*89$
21645	$3^2*5*13*37$
41685	$3*5*7*397$
607354	$2*11*19*1453$

表 18: $[P = 2, m = 15]$ 合流型

a	素因数分解
7688	$2^3 * 31^2$

表 19: $[P = 2, m = 16]$ 合流型

a	素因数分解
35343	$3^3 * 7 * 11 * 17$
42105	$3 * 5 * 7 * 401$
242296	$2^3 * 31 * 977$

表 20: $[P = 2, m = 18]$ 合流型

a	素因数分解
26	$2 * 13$
68	$2^2 * 17$
418	$2 * 11 * 19$
656	$2^4 * 41$
938	$2 * 7 * 67$
2336	$2^5 * 73$
3135	$3 * 5 * 11 * 19$
8768	$2^6 * 137$
74613	$3 * 7 * 11 * 17 * 19$
133376	$2^8 * 521$
528896	$2^9 * 1033$
566864	$2^4 * 71 * 499$
609862	$2 * 11 * 19 * 1459$

表 21: $[P = 2, m = 19]$ 合流型

a	素因数分解
4636	$2^2 * 19 * 61$

表 22: $[P = 2, m = 22]$ 合流型

a	素因数分解
45	$3^2 * 5$
76	$2^2 * 19$
688	$2^4 * 43$
994	$2 * 7 * 71$
8896	$2^6 * 139$
49432	$2^3 * 37 * 167$
133888	$2^8 * 523$
243784	$2^3 * 31 * 983$

表 23: $[P = 2, m = 24]$ 合流型

a	素因数分解
1022	$2 * 7 * 73$
3772	$2^2 * 23 * 41$
42945	$3 * 5 * 7 * 409$
679604	$2^2 * 23 * 83 * 89$

表 24: $[P = 2, m = 26]$ 合流型

a	素因数分解
34	$2 * 17$
232	$2^3 * 29$
34432	$2^7 * 269$

3　底が素数 P の合流型の完全数

$q=\sigma(P^e)+m$ が素数のとき $a=P^e q$ は

$$\overline{P}\sigma(a)=Pa+(P-2)q-m\overline{P}$$

を満たす.

$q_0=\varphi(P^{e+2})+1+n$ が素数の時 $a=P^e q_0$ について計算する.

$\varphi(a)=\varphi(P^e q_0)=\overline{P}P^{e-1}(q_0-1)$ により

$$P^2\varphi(a)=\overline{P}P^{e+1}(q_0-1)=\overline{P}Pa-\overline{P}P^{e+1}.$$

$q_0=\overline{P}P^{e+1}+1+n$ により

$$P^2\varphi(a)=\overline{P}Pa-(q_0-1-n).$$

$\overline{P}\sigma(a)=Pa+(P-2)q-m\overline{P}$ に $\overline{P}$ を掛けると

$$\overline{P}^2\sigma(a)=\overline{P}Pa+\overline{P}(P-2)q-m\overline{P}^2.$$

よって

$$\overline{P}^2\sigma(a)-P^2\varphi(a)=.$$

$$\begin{aligned}\overline{P}^2\sigma(a)-P^2\varphi(a)&=\overline{P}Pa+\overline{P}(P-2)q-m\overline{P}^2-(\overline{P}Pa-(q-1-n))\\&=\overline{P}(P-2)q-m\overline{P}^2+q-1-n.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\overline{P}^2\sigma(a)-P^2\varphi(a)=\overline{P}(P-2)q-m\overline{P}^2+q-1-n.$$