数学の研究を始めよう 2015/June
擬素数の園に咲く巨大な花たち

飯高 茂

平成 28 年 1 月 28 日

1 ユークリッド陪関数

$\sigma(a)$ とは自然数 a の約数の和でありこれを関数とみてユークリッド関数という．さらに $s(a)$ を a の相異なる素因子の個数とするとき $\widetilde{\sigma}(a) = \dfrac{\sigma(a)}{s(a)}$ とおきこれをユークリッド**陪関数**とよぶ．これらは乗法性を持つ．

素数 p があれば $\sigma(p) = p + 1$ であり a を自然数とすると方程式 $\sigma(a) = a + 1$ の解である．逆に $\sigma(a) = a + 1$ を満たすとき a は素数である．

ユークリッド陪関数で同じような素数の判定法を考える．

素数 p があれば $\widetilde{\sigma}(p) = \frac{p+1}{2}$ なので方程式 $2\widetilde{\sigma}(a) = a + 1$ ができる．今度は逆が成り立たない．$2\widetilde{\sigma}(a) = a + 1$ を満たしても a は素数にならないことが多いのである．

ユークリッド**関数**で言えたことがユークリッド**陪関数**では成り立たない．これは「事件だ」と叫びたくなる事態である．

1.1 擬素数 の不思議

指数 e の擬素数の定義と例を復習しておく．

$r = 2^{e+1} - 3$ が素数のとき $2^e r$ を指数 e の擬素数 $\mathbf{p}_e$ という. 例は次の通り．

- $2^2 \times 5 = 20 = \mathbf{p}_2$
- $2^3 \times 13 = 104 = \mathbf{p}_3$
- $2^4 \times 29 = 464 = \mathbf{p}_4$
- $2^5 \times 61 = 1952 = \mathbf{p}_5$
- $2^8 \times 509 = 130304 = \mathbf{p}_8$
- $2^9 \times 1021 = 522752 = \mathbf{p}_9$
- $2^{11} \times 4093 = 8382464 = \mathbf{p}_{11}$
- $2^{13} * 16381 = 134193152 = \mathbf{p}_{13}$

擬素数の指数 e は始めのうち順に 2,3,4,5 と並んでいる.

擬素数 $\mathbf{p}_e$ は $2\widetilde{\sigma}(a)=a+1$ を満たす.

そこで扱いやすくするため $\widetilde{\vartheta}_2(a)=a-2\widetilde{\sigma}(a)$ とおくとき a が素数なら $\widetilde{\vartheta}_2(a)=-1$ である.

指数 e の擬素数も $\widetilde{\vartheta}_2(a)=-1$ を満たし, 素数と擬素数が方程式 $\widetilde{\vartheta}_2(a)=-1$ の解の全てである. この事実が指数 e の擬素数の重要さを訴えている.

2 $a=mp$ 問題の $\widetilde{\sigma}(a)$ を用いた方程式

m の素因子でない素数 p について $a=mp$ とすると乗法性によって

$\widetilde{\sigma}(a)=\widetilde{\sigma}(mp)=\widetilde{\sigma}(m)\frac{p+1}{2}$.

そこで $p=\frac{a}{m}$ を用いると

$$\frac{2\widetilde{\sigma}(a)}{\widetilde{\sigma}(m)}=\frac{a}{m}+1.$$

ができる. これが $a=mp$ 問題の $\widetilde{\sigma}(a)$ を用いた方程式であり $a=m$ は自明な解.

$m=2$ なら $\widetilde{\sigma}(2)=\frac{3}{2}$ により

$$8\widetilde{\sigma}(a)=3a+6.$$

$m=3$ なら $\widetilde{\sigma}(3)=2$ により

$$3\widetilde{\sigma}(a)=a+3.$$

これらを a の方程式と見て解 a を決定したい.

見かけ上は簡単な問題のようだが, これらの完全解決には現在のところほど遠い.

$a=mp$ という解は必ずあるのでこれを通常解という. これ以外の解を非通常解ということにしているが, その中でも特異な解があればエイリアンという. わけのわからないエイリアンが出るとき,「オモロイ奴がでた」と言って歓迎し, このようなエイリアンがでてきた理由を解明したい.

3 $a = qp$ 問題

m が素数 q のときを考える. 便宜上 $\widetilde{q} = q + 1$ とおく.
$2\widetilde{\sigma}(a) = 2\widetilde{\sigma}(qp) = \widetilde{q}\widetilde{\sigma}(p) = \frac{\widetilde{q}(p+1)}{2} = \frac{(a+q)\widetilde{q}}{2q}$ と変形すると

$$4q\widetilde{\sigma}(a) = \widetilde{q}(a + q). \tag{1}$$

これが $a = qp$ 問題のユークリッド陪関数での方程式である. これを解 a について解く.

$a = qp$ 問題については, 非通常解の形はほぼ解決し非通常解は擬素数から産まれるらしいことを確認した. その証明はまだできていないが 10 パーセントくらいはできた.

パソコンに働いてもらってえた結果は次の通り.

表 1: $a = 7p$ 問題; 非通常解のみ

a	素因数分解	$\widetilde{\sigma}(a)$	素因子の個数
7	[7]	4	1
140	$[2^2, 5, 7] = 7 \times \mathbf{p}_2$	42	4
728	$[2^3, 7, 13] = 7 \times \mathbf{p}_3$	210	5
3248	$[2^4, 7, 29] = 7 \times \mathbf{p}_4$	930	6
13664	$[2^5, 7, 61] = 7 \times \mathbf{p}_5$	3906	7

これ以後は $7 \times \mathbf{p}_e$ が続くと推測できる. 私は推測結果の正しいことを信じつつ, 11,13,17,19,23,29 まで確認した.

しかし例外的な結果もあった.

3.1 $a = 13p$ 問題の非通常解

表 2: $a = 13p$ 問題の非通常解

a	素因数分解
260	$[2^2, 5, 13] = 13 \times \mathbf{p}_2$
6032	$[2^4, 13, 29] = 13 \times \mathbf{p}_4$
25376	$[2^5, 13, 61] = 13 \times \mathbf{p}_5$

$\mathbf{p}_3 = 2^3 \times 13$ は出てこない. $a = 13p$ 問題の 13 が $\mathbf{p}_3 = 2^2 \times 13$ の素因子 13 と重なるからである.

$\widetilde{\sigma}(a)$ を用いた場合の方程式は係数 $m = q$ のとき $\widetilde{\sigma}(a)$ を用いた場合の方程式は $4q\widetilde{\sigma}(a) = \widetilde{q}(a+q)$ である.

そこで, 指数 e の擬素数 $\mathbf{p}_e$ について q と $\mathbf{p}_e$ が互いに素と仮定する.

すると $b = q\mathbf{p}_e$ が解となることを以下で確認しよう.

擬素数は

$$a - 2\widetilde{\sigma}(a) = -1$$

を満たす.

よって $\alpha = \mathbf{p}_e$ とおくとき $2\widetilde{\sigma}(\alpha) = \alpha + 1$ なので

$$\begin{aligned}
4q\widetilde{\sigma}(b) &= 4q\widetilde{\sigma}(q\alpha) \\
&= 2q\widetilde{q}\widetilde{\sigma}(\alpha) \\
&= q\widetilde{q}(\alpha + 1) \\
&= \widetilde{q}b + q\widetilde{q} \\
&= \widetilde{q}(b + q).
\end{aligned}$$

q と $\mathbf{p}_e$ が互いに素であることは $\mathbf{p}_e = 2^e r$ なので $q \neq 2$ かつ $q \neq r$ がその条件である.

$q = 2$ では成り立たず, $q = r$ でもうまく行かない.

$\mathbf{p}_e = 2^e r$ と書ける素数 r は覚える価値がある.

$$r = 5, 13, 29, 61, 509, 1021, \cdots$$

この結果は重要なので定理としておく.

定理 1 q が素数のとき $a = qp$ 問題の $\widetilde{\sigma}(a)$ を用いた場合の方程式の解として指数 e の擬素数 $\mathbf{p}_e$ と q の積 $b = q\mathbf{p}_e$ がある. ただし q と $\mathbf{p}_e$ が互いに素とする.

ユークリッド関数 $\sigma(a)$ の場合は $a = qp$ 問題の擬素数解は q^3 だけであったが陪関数 $\widetilde{\sigma}(a)$ の場合は, 指数 e の擬素数 $\mathbf{p}_e$ を用いた解 $q \times \mathbf{p}_e$ が出てきた. しかも彼らは隊伍を組んで威風堂々と出てきたのである. これらの擬素数解はたぶん無限にある. しかしその証明はきわめて困難であろう.

4 m 合成数の場合

ここまでは先月号に記載した結果の要旨と重なるところがあった．本号では係数が合成数の場合を扱う．

4.1 $a = 2^4 p$ 問題

表 3: $a = 2^4 p$ 問題; 非通常解のみ

a	素因数分解	$\widetilde{a}$	素因子の個数
16	$[2^4]$	15.5	4

非通常解が極端に少ない．

4.2 $a = 3^2 p$ 問題

表 4: $a = 9p$ 問題; 非通常解のみ

a	素因数分解	$\widetilde{a}$	素因子の個数
9	$[3^2]$	6.5	2
180	$[2^2, 3^2, 5] = 3^2 \times \mathbf{p}_2$	68.25	5
936	$[2^3, 3^2, 13] = 3^2 \times \mathbf{p}_3$	341.25	6
4176	$[2^4, 3^2, 29] = 3^2 \times \mathbf{p}_4$	1511.25	7
17568	$[2^5, 3^2, 61] = 3^2 \times \mathbf{p}_5$	6347.25	8

これより非通常解は $3^2 \times \mathbf{p}_p$ と書けるだろうと推測できる．

4.3 $a = 3^3 p$ 問題

表 5: $a = 27p$ 問題; 非通常解のみ

a	素因数分解	$\widetilde{a}$	素因子の個数
27	$[3^3]$	20	3
540	$[2^2, 3^3, 5] = 3^3 \times \mathbf{p}_2$	210	6
2808	$[2^3, 3^3, 13] = 3^3 \times \mathbf{p}_3$	1050	7
12528	$[2^4, 3^3, 29] = 3^3 \times \mathbf{p}_4$	4650	8
52704	$[2^5, 3^3, 61] = 3^3 \times \mathbf{p}_5$	19530	9

これより非通常解は $3^3 \times \mathbf{p}_p$ と書けるだろうと推測できる．

4.4 $a = 5^2 p$ 問題

表 6: $a = 25p$ 問題; 非通常解のみ

a	素因数分解	$\widetilde{a}$	素因子の個数
25	$[5^2]$	15.5	2
2600	$[2^3, 5^2, 13] = 5^2 \times \mathbf{p}_3$	813.75	6
11600	$[2^4, 5^2, 29] = 5^2 \times \mathbf{p}_4$	3603.75	7
48800	$[2^5, 5^2, 61] = 5^2 \times \mathbf{p}_5$	15135.75	8

これより非通常解は $5^2 \times \mathbf{p}_p$ と書けるだろうと推測できる.

4.5 $a = 7^2 p$ 問題

表 7: $a = 49p$ 問題; 非通常解のみ

a	素因数分解	$\widetilde{a}$	素因子の個数
49	$[7^2]$	28.5	2
980	$[2^2, 5, 7^2] = 7^2 \times \mathbf{p}_2$	299.25	5
5096	$[2^3, 7^2, 13] = 7^2 \times \mathbf{p}_3$	1496.25	6
22736	$[2^4, 7^2, 29] = 7^2 \times \mathbf{p}_4$	6626.25	7
95648	$[2^5, 7^2, 61] = 7^2 \times \mathbf{p}_5$	27830.25	8

以上のパソコンの解を観察した結果は $q = 2$ と $q \geq 3$ で違うとはいえ，係数が素数べきなら $a = q^{\varepsilon} p$ 問題の非通常解は, 擬素数からできていることはほぼ間違いない. 証明はできないが非通常解の形が推測できたことは良かった.

5　$m = qr, a = mp$ 問題

次の場合は, 係数 m が相異なる素因子を持つ場合である．この場合はユークリッド関数による特徴付けの問題でもきわめて困難な場合だった．だから思わず身構えてしまう．しかしどんなエイリアンがでても恐れず進むことにしよう．

5.1　$a = 6p$ 問題,$a = 10p$ 問題

表 8: $a = 6p$ 問題; 非通常解のみ

a	素因数分解	$\widetilde{\sigma}(a)$	素因子の個数
6	$[2, 3]$	3	2

このとき方程式は

$$4\widetilde{\sigma}(a) = a + 6.$$

この解は $a = 6$ または $a = 6p(p \geq 5)$ となるらしい．
非通常解は 6 だけらしい．身構えただけ損した気がする．部分的証明もできていない．

表 9: $a = 10p$ 問題; 非通常解のみ

a	素因数分解	$\widetilde{\sigma}(a)$	素因子の個数
10	$[2, 5]$	4.5	2

この解は $a = 10$ または $a = 10p(p \neq 2, 5)$ となるらしい．やはりおとなしい解だ．

5.2 $a = 14p$,$a = 22p$, $a = 26p$ 問題

表 10: $a = 14p$ 問題; 非通常解のみ

a	素因数分解	$\widetilde{\sigma}(a)$	素因子の個数
14	$[2,7]$	6	2
1260	$[2^2,3^2,5,7] = 3^2 \times 7 \times \mathbf{p_2}$	273	6

14 以外の非通常解として $3^2 \times 7 \times \mathbf{p_2}$ がひとつ登場. 通常解は $2 \times 7p$ なので $3^2 \times 7 \times \mathbf{p_2}$ における $7 \times \mathbf{p_2}$ は 2×7 に相当する. これに 3^2 が掛けられているのが不可解である. いよいよ, エイリアンが出てきた.

表 11: $a = 22p$ 問題; 非通常解のみ

a	素因数分解	$\widetilde{\sigma}(a)$	素因子の個数
22	$[2,11]$	9	2
1980	$[2^2,3^2,5,11] = 3^2 \times 11 \times \mathbf{p_2}$	409.5	6

$a = 22p$ 問題の非通常解として $3^2 \times 11 \times \mathbf{p_2}$ がでた.

表 12: $a = 26p$ 問題; 非通常解のみ

a	素因数分解	$\widetilde{\sigma}(a)$	素因子の個数
26	$[2,13]$	10.5	2
2340	$[2^2,3^2,5,13] = 3^2 \times 13 \times \mathbf{p_2}$	477.75	6

5.3　$m = 2q$ のときの非通常解

以上によると $m = 2q$ について, $q \geq 7$ のときに限り, $\alpha = 3^2 \times q \times \mathbf{p}_2$ が解になることが推察できる. 証明はようやくできた.

$$\frac{2\widetilde{\sigma}(a)}{\widetilde{\sigma}(m)} = \frac{a}{m} + 1.$$

について計算する. $\widetilde{\sigma}(m) = \widetilde{\sigma}(2q) = \frac{3\widetilde{q}}{4}$ により

$$\frac{2\widetilde{\sigma}(a)}{\widetilde{\sigma}(m)} = \frac{8\widetilde{\sigma}(a)}{3\widetilde{q}}, \frac{a}{m} + 1 = \frac{a}{2q} + 1$$

によって

$$\frac{8\widetilde{\sigma}(a)}{3\widetilde{q}} = \frac{a}{2q} + 1. \tag{2}$$

この式を $\alpha = 3^2 \times q \times \mathbf{p}_2$ が満たす事を確認できれば良い.

$\mathbf{p}_2 = 20$ によって $3^2\mathbf{p}_2$ の素因子は, 2,3,5. その積 は 30.

$q \geq 7$ のとき 30 と互いに素なので,

$$\widetilde{\sigma}(\alpha) = \frac{3^3 - 1}{4} \times \frac{\widetilde{q}}{2} \times \frac{\mathbf{p}_2 + 1}{2}.$$

$$\frac{8\widetilde{\sigma}(\alpha)}{3\widetilde{q}} = \frac{13}{2} \times (\mathbf{p}_2 + 1) = \frac{13 \times 21}{3} = 91.$$

さらに $\frac{\alpha}{2q} + 1 = \frac{3^2\mathbf{p}_2}{2} + 1 = 91$. ともに 91 になるので式 2 が示された.

これは美しい結果である.

6　$m = qr, 2 < q < r$ のとき

この度は係数 m が奇数の場合を扱う.

6.1　$a = 15p$ 問題

表 13: $a = 15p$ 問題; 非通常解のみ

a	素因数分解	$\widetilde{a}$	素因子の個数
15	$[3, 5]$	6	2
1560	$[2^3, 3, 5, 13] = 3 \times 5 \times \mathbf{p}_3$	315	6
6960	$[2^4, 3, 5, 29] = 3 \times 5 \times \mathbf{p}_4$	1395	7
29280	$[2^5, 3, 5, 61] = 3 \times 5 \times \mathbf{p}_5$	5859	8
42300	$[2^2, 3^2, 5^2, 47]$	8463	7

$e > 2$ について, $3 \times 5 \times \mathbf{p}_e$ が解になる. これは理解できる. 非通常解といっても擬素数から来ているではないか. 安心である.

しかし, 最後に出た例はすごい. ガーンと頭を一発張られた思いがする.

$42300 = [2^2, 3^2, 5^2, 47]$ が解として出てきた. これは全く想定外の解なので, オロオロするばかりである. まったく異質の解が現れたので「エイリアンが来た」と叫びたいところである.

6.2 $a = 21p$ 問題

表 14: $a = 21p$ 問題; 非通常解のみ

a	素因数分解	$\widetilde{\sigma}(a)$	素因子の個数
21	$[3, 7]$	8	2
420	$[2^2, 3, 5, 7] = 3 \times 7 \times \mathbf{p}_2$	84	5
2184	$[2^3, 3, 7, 13] = 3 \times 7 \times \mathbf{p}_3$	420	6
9744	$[2^4, 3, 7, 29] = 3 \times 7 \times \mathbf{p}_4$	1860	7
40992	$[2^5, 3, 7, 61] = 3 \times 7 \times \mathbf{p}_5$	7812	8

$e > 1$ について, $3 \times 7 \times \mathbf{p}_e$ が解になる.

もっと先を計算すればエイリアン解があるかもしれない. 最初にエイリアンをみつけることができればスゴイことだ.

表 15: $a = 105p$ 問題; 非通常解のみ

a	素因数分解	$\widetilde{\sigma}(a)$	素因子の個数
105	$[3, 5, 7]$	24	3
10920	$[2^3, 3, 5, 7, 13]$	1260	7
48720	$[2^4, 3, 5, 7, 29]$	5580	8

3,5,7 の積 105 を係数にしてみた.

$e > 1$ について, $3 \times 5 \times 7 \times \mathbf{p}_e$ が解になる.

誰かエイリアン解をみつけてほしい.

7　$m = 4q$ のとき

次に係数が 4 の倍数の場合, とくに因子が 4 のときをやってみた.

表 16: $a = 12p$ 問題; 非通常解のみ

a	素因数分解	$\widetilde{\sigma}(a)$	素因子の個数
12	$[2^2, 3]$	7	3

同様にして $a = 20p$, $a = 44p$,$a = 52p$ 問題 については非通常解はみつからない.
しかし $a = 28p$ 問題では突然多くのエイリアン解がでてきた. これも理屈を超えた話である.

7.1 $a = 28p$ 問題

$m = 28$ のとき形勢は一変した.

表 17: $a = 28p$ 問題; 非通常解のみ

a	素因数分解	$\widetilde{\sigma}(a)$	素因子の個数
28	$[2^2, 7]$	14	3
9272	$[2^3, 19, 61]$	2325	5
14552	$[2^3, 17, 107]$	3645	5
74992	$[2^4, 43, 109]$	18755	6

擬素数 $\mathbf{p}_e$ は全く出てこない代わりにエイリアンが沢山でてきそうだ. これらの解は $a = 2^e qr$ の形をしている. そこで $a = 2^e qr$ の形の解を探してみた.

8　$a = 2^e qr$ の形の解

$m = 28$ のとき, $\widetilde{\sigma}(m) = \widetilde{\sigma}(28) = 14$ により

$$4\widetilde{\sigma}(a) = a + 28.$$

$a = 2^e qr$ とおくと,

$$\frac{(2^{e+1}-1)}{2}\widetilde{qr} = 2^e qr + 28.$$

これより

$$(2^{e+1}-1)\widetilde{qr} = 2^{e+1}qr + 56.$$

$\Gamma = 2^{e+1} - 1, \Delta = q + r$ とおくと

$$\Gamma(qr + \Delta + 1) = (\Gamma + 1)qr + 56.$$

これより,

$$qr = \Delta\Gamma + \Gamma - 56.$$

$q_0 = q - \Gamma, r_0 = r - \Gamma$ とおくとき

$$q_0 r_0 = \Gamma^2 + \Gamma - 56.$$

e を順次与えて $\Gamma = 2^{e+1} - 1$ について $D = \Gamma^2 + \Gamma - 56$ を計算してこれを 2 因子の積 $q_0 r_0$ に書いてから $q = q_0 + \Gamma, r = r_0 + \Gamma$ がともに素数となるものを探せばよい.

その結果大量のエイリアンがでてきた. これも実に意外なことであった.

表 18: $a = 28p$ 問題;$a = 2^e qr$ の解のみ表示

a	素因数分解	$\sigma(a)$
14552	$2^3 * 17 * 107$	29160
9272	$2^3 * 19 * 61$	18600
74992	$2^4 * 43 * 109$	150040
35019968	$2^6 * 131 * 4177$	70039992
15317696	$2^6 * 137 * 1747$	30635448
6019264	$2^6 * 163 * 577$	12038584
53032832	$2^7 * 317 * 1307$	106065720
3365232128	$2^9 * 1277 * 5147$	6730464312
26882784256	$2^{10} * 2557 * 10267$	53765568568
17374747648	$2^{10} * 3691 * 4597$	34749495352
125619603976192	$2^{12} * 8209 * 3736003$	251239207952440
12659380301824	$2^{12} * 8377 * 368947$	25318760603704
2306054088064335872	$2^{15} * 65539 * 1073790961$	4612108176128671800
629790585358898692096	$2^{18} * 524347 * 4581813997$	1259581170717797384248
377932005921713291264	$2^{18} * 524387 * 2749298113$	755864011843426582584
24836343187798491136	$2^{18} * 525817 * 180182707$	49672686375596982328
20788512594675367936	$2^{18} * 526117 * 150730507$	41577025189350735928
5639357032256241664	$2^{18} * 531163 * 40500637$	11278714064512483384
4101321319457226752	$2^{18} * 533837 * 29307259$	8202642638914453560
450362539696193536	$2^{18} * 655357 * 2621467$	900725079392387128
433541693141942272	$2^{18} * 664099 * 2490337$	867083386283884600
290631842389557248	$2^{18} * 961187 * 1153441$	581263684779114552

この解を a の末尾にしたがって並べ替えてみた.

突然出てきたこの多くの巨大な解はどうだろう. 擬素数の園を求めて探検した. そして出会った園には巨大な花たちが咲き誇り圧倒された気分になった.

圧倒されながらも, a の末尾の数が 2,4,6,8 になることに注目しグループ分けした. 素数 q, r の末尾の数はどんな分布になるだろうか.

表 19: $a = 2^e qr$ の解のみ

a	素因数分解	$\sigma(a)$
14552	$2^3 * 17 * 107$	29160
9272	$2^3 * 19 * 61$	18600
74992	$2^4 * 43 * 109$	150040
53032832	$2^7 * 317 * 1307$	106065720
125619603976192	$2^{12} * 8209 * 3736003$	251239207952440
2306054088064335872	$2^{15} * 65539 * 1073790961$	4612108176128671800
4101321319457226752	$2^{18} * 533837 * 29307259$	8202642638914453560
433541693141942272	$2^{18} * 664099 * 2490337$	867083386283884600
6019264	$2^6 * 163 * 577$	12038584
12659380301824	$2^{12} * 8377 * 368947$	25318760603704
3779320059217132912264	$2^{18} * 524387 * 2749298113$	7558640118434265825 84
5639357032256241664	$2^{18} * 531163 * 40500637$	11278714064512483384
15317696	$2^6 * 137 * 1747$	30635448
26882784256	$2^{10} * 2557 * 10267$	53765568568
629790585358898692096	$2^{18} * 524347 * 4581813997$	1259581170717797384248
24836343187798491136	$2^{18} * 525817 * 180182707$	49672686375596982328
20788512594675367936	$2^{18} * 526117 * 150730507$	41577025189350735928
450362539696193536	$2^{18} * 655357 * 2621467$	900725079392387128
35019968	$2^6 * 131 * 4177$	70039992
3365232128	$2^9 * 1277 * 5147$	6730464312
17374747648	$2^{10} * 3691 * 4597$	34749495352
290631842389557248	$2^{18} * 961187 * 1153441$	581263684779114552

注目したい性質:

- a の末尾の数が 2 のとき ,(q, r) の末尾の数は (3,7),(7,7),(9,1),(3,9),(7,9).
- a の末尾の数が 4 のとき ,(q, r) の末尾の数は (3,7),(7,7).
- a の末尾の数が 6 のとき, (q, r) の末尾の数は (7,7).
- a の末尾の数が 8 のとき,(q, r) の末尾の数は (1,7),(7,7)..

ただし (3,7),(7,3) は (3,7) のみ記載. 後は同様.

8.1 $a = mp$(m 完全数) 問題

$m = 28$ の場合, 意外な結果がでてきたことに驚嘆した. 28 と言えば言わずと知れた第二の完全数である. そこで, 一般に m を完全数として問題を解くことにしよう.

$\widetilde{\sigma}(m) = \frac{\sigma(m)}{4} = \frac{m}{2}$ により

$$\frac{4\widetilde{\sigma}(a)}{m} = \frac{a}{m} + 1.$$

したがって

$$4\widetilde{\sigma}(a) = a + m.$$

$a = 2^e qr$ とおくと $\sigma(a) = (2^{e+1} - 1)\widetilde{qr}$ により

これより

$$(2^{e+1} - 1)\widetilde{qr} = 2^{e+1} qr + 2m.$$

$\Gamma = 2^{e+1} - 1, \Delta = q + r$ とおくと

$$\Gamma(qr + \Delta + 1) = (\Gamma + 1)qr + 2m.$$

これより,

$$qr = \Delta\Gamma + \Gamma - 2m.$$

$q_0 = q - \Gamma, r_0 = r - \Gamma$ とおくとき

$$q_0 r_0 = \Gamma^2 + \Gamma - 2m.$$

こうしてまた同じアルゴリズムが得られた.

これを使うことで第 3 の完全数 $m = 496$ についてはきわめて多くのエイリアン解が発見された.

しかし $m = 6$ では解が非通常解が出てこない. このときは解は無いと想像するが証明の手立てがない.