離心率と惑星ナイン

飯高 茂

2016 年 9 月 3 日

1　楕円と離心率

楕円は高校数学の数学 III で学習する. 楕円には離心率という重要な概念があり, 離心率が同じ 2 つの楕円は相似である. また 2 つの放物線はすべて相似である. これは $e = 1$ の楕円は放物線になることが分かれば理解できるであろう.

楕円は 2 点 F', F からの距離の和 $PF' + PF$ が 1 定値 r となる図形として定義される.

大切な離心率は楕円の学習のおまけとして触れられているのが高校数学の普通の書き方である.

極座標での楕円の定義では

$$r = \frac{a}{1 + e\cos\theta}$$

となり, 離心率 e があらわに出てくるが教科書としては終わりの方で扱われているにすぎない.

ところで, 太陽と地球は万有引力の法則にしたがうとして微分方程式を作ると自然に極座標を用いた楕円の定義式が導かれる.

私はこのことを知ってはいたが理解がはなはだ不十分だった.　太陽を中心にし地球は楕円軌道を描くが太陽は 2 焦点 F', F の一方焦点 F に鎮座する. しかしもう一方の焦点 F' には何もない. という解説を読んだ. そして古希を過ぎた今になってようやくこのことを理解したことを大いに恥じとした.

そこで疑問に思ったことは,「太陽を 1 焦点 F とするとき 2 焦点 F', F の距離は実際どのくらいか」ということである.

簡単な計算の結果 2 焦点 F', F 間の距離は約 510 万キロであった. 地球から, 2 焦点 F', F の中点までの平均距離を天文単位というがこれが約 1 億 5000 万キロなので 2 焦点 F', F 間の距離はこの約 34 分の 1 である.

高校で楕円の離心率を学習するとき,「太陽の周りを回る地球は楕円軌道を描くが焦点となる太陽のほかに別の焦点があり,510 万キロ離れている. しかし別の焦

点を見ることはできない, なぜなら物理的実体がないからだ.」ということを知ると高校生は学問の深遠さに大きく心を揺さぶられるに違いない

2　楕円の定義と離心率

2 点 $F'(-f,0), F(f,0)$ から点 $P(x,y)$ までの距離の和が一定値 r (3 角形の条件から $r>2f$) となるときの点の軌跡が楕円であり, そのときの離心率 e は $\dfrac{2f}{r}$ で定義される.

この離心率の定義は明快である．高校教科書でもこのように最初から離心率を持ち出せば生徒にもよく理解できるに違いない.

定義から

$$PF'+PF=r$$

なので $PF'=r-PF$ を二乗すると

$$PF'^2=r^2-2PF\cdot r+PF^2.$$

これより

$$PF'^2-PF^2=r^2-2PF\cdot r.$$

$PF'^2=(x+f)^2+y^2, PF^2=(x-f)^2+y^2$ なので,
$PF'^2-PF^2=4fx$ により

$$4fx-r^2=-2PF\cdot r.$$

これを二乗して

$$16f^2x^2-8fxr^2+r^4=4PF^2\cdot r^2.$$

$4PF^2\cdot r^2=4(x^2-2fx+f^2+y^2)\cdot r^2$ により

$$16f^2x^2-8fxr^2+r^4=(4x^2-8fx+4f^2+4y^2)\cdot r^2,$$

を変形して

$$4(r^2-4f^2)x^2+4r^2y^2=r^2(r^2-4f^2).$$

$r>2f$ により $r^2(r^2-4f^2)>0$ で割るとき

$$\frac{4x^2}{r^2}+\frac{4y^2}{r^2-4f^2}=1.$$

$a^2 = \dfrac{r^2}{4}, b^2 = \dfrac{r^2 - 4f^2}{4}$ によって正の数 a, b を導入すると $a \geq b$ になり

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

定義により $a = \dfrac{r}{2}, b = \dfrac{\sqrt{r^2 - 4f^2}}{2}$. これより $4b^2 = 4a^2 - 4f^2$.

ゆえに

$$f = \sqrt{a^2 - b^2}, r = \frac{a}{2}.$$

これより,$e = \dfrac{2f}{r} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. これが離心率の公式である.

$x^2 + \dfrac{a^2y^2}{b^2} = a^2$ について,

$$a^2 = \frac{f^2}{e^2},\ \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - f^2}{a^2} = 1 - e^2$$

を用いて式変形すると,

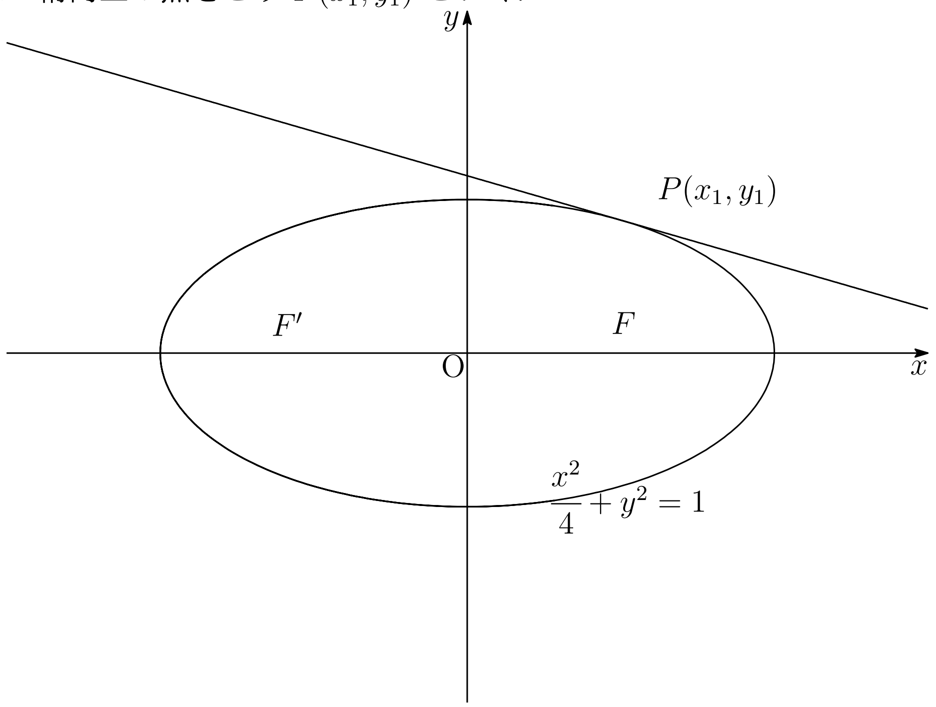
$$x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{f^2}{e^2}$$

をえる. この式から, 離心率が同じ楕円はみな相似であることがわかる.

3　楕円とビリヤード

周囲が楕円のビリヤード台があるとしよう. 焦点 F におかれた玉をキューでつくと玉は周囲の壁にぶつかり必ずもう 1 つの焦点 F' を通る.

これは 2 焦点のもつ著しい性格である. これを次に証明する. 長軸、短軸の上にない楕円上の点をとり $P(x_1, y_1)$ とおく.



P から 2 焦点 F,F' までの距離 PF', PF を求めよう.

$$PF'^2 = (x_1 + f)^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 f + f^2.$$

P は楕円上の点なので

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

を満たす.

$$\frac{y_1^2}{b^2} = 1 - \frac{x_1^2}{a^2},$$

により

$$y_1^2 = b^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2}.$$

$$y_1^2 + f^2 = a^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2}.$$

$e = \dfrac{2f}{r} = \dfrac{f}{a}$ により $ea = f$.

$$
\begin{aligned}
x_1^2+y_1^2+2x_1f+f^2 &= a^2+\frac{f^2x_1^2}{a^2}+2eax_1\\
&= a^2+2eax_1+e^2x_1^2\\
&= (a+ex_1)^2
\end{aligned}
$$

これより $PF'=a+ex_1$. 同様にして $PF=a-ex_1$.

P での接線 L が x 軸と交わる点を $T(x',0)$ とおく.

接線 L の方程式は

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$$

なので, $y=0$ とおいて x' を求める. $\dfrac{x'x_1}{a^2}=1$ により $x'=\dfrac{a^2}{x_1}$.

$TF'=\dfrac{a^2}{x_1}+f, TF=\dfrac{a^2}{x_1}-f$ なので

$$TF':TF=(a^2+fx_1):(a^2-fx_1)=(a+ex_1):(a-ex_1)=PF':PF.$$

F' から接線 L に垂線を引きその足を H', F から接線 L に垂線を引きその足を H とおくとき, $\triangle TH'F'$ と $\triangle THF$ は相似なので $H'F':HF=TF':TF$.

よって,

$$H'F':HF=TF':TF=PF':PF.$$

したがって直角 3 角形 $\triangle PH'F'$ と $\triangle PHF$ は相似. ゆえに

$$\angle H'PF'=\angle HPF$$

これは , F から P に至った玉は接線 L で跳ね返されて F' を通ることを意味する.

初等幾何を用いて解析幾何的計算をすることにより, この美しい結果が示された.

ところで, ビリヤード台の外周は長方形である. 楕円がビリヤード台の外周となるものは数学者の妄想の産物らしい.

4　放物線と焦点

$a>0$ に対して横置きの放物線の方程式を $y^2=4ax$ とするとき $F(a,0)$ が焦点, $x=-a$ が準線 H である.

焦点 F と準線 H から等距離にある点 $\mathrm{P}(x,y)$ の集合が放物線になる. これが幾何学的な放物線の定義である.

これを確認しよう.

$\mathrm{P}(x,y)$ と準線 $\mathrm{H}: x=-a$ から等距離にある点 P までの距離は $x+a$,.

$\mathrm{P}(x,y)$ と焦点 $F(a,0)$ までの距離の二乗は $\mathrm{PF}^2=(x-a)^2+y^2$ なので

$$(x+a)^2=(x-a)^2+y^2.$$

これより

$$x^2+2ax+a^2=x^2-2ax+a^2+y^2.$$

よって, 放物線 C: $y^2=4ax$ をえる.

放物線 C 上の点 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$ $(x_1>0, y_1>0)$ から x 軸と平行な半直線 PQ をとる.

P での接線 L は $yy_1=2a(x+x_1)$ となる.

L と x 軸との交点を $\mathrm{T}(x',0)$ とおけば

$$0=yy_1=2a(x'+x_1)$$

により $x'=-x_1$. TF$=a-x'=a+x_1$.

ここで PF を計算する. $y_1^2=4ax_1$ に注意すると

$$\begin{aligned}PF^2=&(x_1-a)^2+y_1^2\\=&(x_1-a)^2+4ax_1\\=&(x_1+a)^2.\end{aligned}$$

よって, $PF^2=(x_1+a)^2$.

$x_1+a>0$ によって, $PF=x_1+a$.

TF$=a-x'=a+x_1$ によって TF=PF.

したがって △ PTF は二等辺 3 角形. よって, 角度が等しくなって $\angle T=\angle P$.

P を通り x 軸と平行な半直線 PR をとると, TF // PR. TP 上の点 T' について

$$\angle RPT'=\angle FTP.$$

によって,

$$\angle TPF = \angle RPT'.$$

これより, QP を通る線は P において跳ね返されると, F を通ることがわかる.

5　惑星の運動

図 1: ケプラー 1571–1630 ドイツの天文学者,

諸惑星の持つ楕円としてのデータ

地球のとき $f = au * 0.017 = 15000 * 0.017 = 255, 2f = 510.$

au:天文単位, 2 焦点間の距離は 510 万キロ.

a^3/T^2 が一定値 (ここでは 1) になるというのがケプラの第 3 法則. 次の表からわかるように準惑星までいれてもほぼ 1 になりその誤差 千分の 1 以下である. しかし存在が確定していないナインは 1.524.

表 1: 諸惑星の運動: 距離は au (au=天文単位, 約 15000 万キロ)

name	a	e	f	b	T	a^3/T^2
惑星	長半径	離心率	焦点	短半径	公転周期	ケプラ 3
水星	0.387	0.205	0.079335	0.378	0.241	0.997
金星	0.723	0.007	0.005061	0.722	0.615	0.999
地球	1	0.017	0.017	0.999	1	1
火星	1.524	0.093	0.141732	1.517	1.881	1.000
木星	5.202	0.0483	0.2512566	5.195	11.86	1.000
土星	9.5367	0.054	0.5149818	9.522	29.46	0.999
天王星	19.189	0.047	0.901883	19.167	84.01	1.000
海王星	30.07	0.001	0.03007	30.069	164.79	1.000
冥王星	39.48	0.249	9.83052	38.23	248	1.000
エリス	67.67	0.442	29.91014	60.70	557	0.998
マケマケ	45.8	0.159	7.2822	45.21	310	0.999
ハウメア	43.3	0.189	8.1837	42.52	285	0.999
ケレス	2.767	0.08	0.22136	2.758	4.6	1.001
セドナ	544.07	0.86	467.9002	277.63	12691	0.999
ナイン	700	0.6	420	560	15000	1.524

5.1 準惑星

冥王星は準惑星である. エリス, マケマケ, ハウメア, セドナは近年発見された太陽系外縁天体で 準惑星に属する.

ケレスは火星と木星の間にある最大の小惑星, 準惑星に数えられる.

ナインは存在が予言された未知の第 9 惑星, 誰も見た人はいない. ハワイにある日本の望遠鏡すばるにより発見することが試みられている. 姿は見えなくても離心率は推定されている.

Wikipedia によると, 惑星 ナインは、太陽系外縁に存在すると提唱されている大型の天体である。軌道の大部分がエッジワース・カイパーベルトの外側を周る太陽系外縁天体の一群を研究する過程で、2014 年にその存在が提唱された。