書泉グランデでの講義
高校生も十分わかる新しい数論研究 NEW SERIES, 第 1 期 資料1
2015 年10月9日

飯高 茂

1. New seires をはじめるにあたって

書泉グランデでの講義「 高校生も十分わかる新しい数論研究」 ニューシリーズ2015年10月 9,23日 11月 13,27日 (計4回) 時間 6:30-8:00 場所 神田 書泉グランデ 7 階

「高校生も十分わかる新しい数論研究」という題のもとで一般市民向けの数学研究中心の講座を連続して持つことにし実際2014 年に 4 回 2015年2,3月に 4 回 6,7月に 4 回 の講義をした.

高校生も十分わかる, という題で始めたが,始めは高校生の参加は無かった.しかし小学 1 年生の参加があり、熱心に休み無く参加してくれた。また高校生も参加するようになった.

講義内容は古典的な完全数を底を一般の素数にして一般化をこれを究極の完全数と呼びこれを研究する．これを研究した。

これらに対して、フェルマ,オイラー,ラグランジュの理論を一般化しまた Wieferich 素数の理論も一般化された。

これらは新しい研究内容なので参加者に過度の負担を強いるようになった。

そこで、今回からはニューシリーズとして新たに始めることにし今までの講義内容を既知とした取り扱いをせず、詳しい説明をつけて新しい参加者にも十分理解できるよう配慮することにした.

2. 循環小数から

```
?-   1/7 = 0.

142857142857142857142857142857142857142857142857142857

142857142857142857142857142857142857142857142

 25 ?- 1/17=
0.

058823529411764705882352941176470588235294117647058823529411

05882352941176470588235294117647058
```

```
19 ?- lj(1/7,10,X,Y),write(X),nl,write(Y),nl.
[1,4,2,8,5,7]
[3,2,6,4,5,1]
X = [1, 4, 2, 8, 5, 7],
Y = [3, 2, 6, 4, 5, 1].

18 ?- lj(1/17,10,X,Y),write(X),nl,write(Y),nl.
[0,5,8,8,2,3,5,2,9,4,1,1,7,6,4,7]
[10,15,14,4,6,9,5,16,7,2,3,13,11,8,12,1]
X = [0, 5, 8, 8, 2, 3, 5, 2, 9|...],
Y = [10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7|...].

20 ?-   lj(1/13,10,X,Y),write(X),nl,write(Y),nl.
[0,7,6,9,2,3]
[10,9,12,3,4,1]
```

一般に G 進展開なら分母が G と互いに素で 分数が真の既約分数 $\frac{a}{b}$ ならその小数展開は最初から循環し (純循環) 循環節の長さはオイラー関数 $\varphi(b)$ の約数

$\frac{a}{b} = \frac{1}{50}$,

$\varphi(50) = \varphi(2)\varphi(25) = 20$ 20の 約数は 5,4,2,1.25

```
16 ?- lj0(1/50,11,J).
[0,2,4,6,9]
J = [0, 2, 4, 6, 9].

17 ?- lj0(1/50,3,J).
[0,0,0,1,1,2,1,2,0,1,2,2,2,1,1,0,1,0,2,1]
J = [0, 0, 0, 1, 1, 2, 1, 2, 0|...].

18 ?- lj0(1/50,7,J).
[0,0,6,6]
J = [0, 0, 6, 6].

19 ?- lj0(1/100,7,J).
[0,0,3,3]
J = [0, 0, 3, 3].
```

```
J = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8|...].
```

3. オイラー関数

n を法とするとき乗法群$\mathbb{Z}_n{}^*$ の元の個数をオイラー関数と言う

分数の概念だけでもオイラー関数が定義できる.

自然数を分母,分子に持つ分数を考える. 分母が n の真分数は $\dfrac{a}{n}; (1 \leq a \leq n)$ なので合計 n 個ある.

例えば $n = 6$ なら

(1)
$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}$$

$\dfrac{2}{6}, \dfrac{3}{6}, \dfrac{4}{6}, \dfrac{6}{6}$ らは可約分数. $\dfrac{1}{6}, \dfrac{5}{6}$ は既約分数

$\frac{a}{n}$ のうち既約分数になるものの個数を $\varphi(n)$ で表し**オイラー関数**という.

たとえば $n = 12$ なら $\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}$ のみが既約分数だから $\varphi(12) = 4$.

n を自然数とするとき,n を法とした整数の剰余環の乗法群 ${\mathbb{Z}_n}^*$ の元の数が$\varphi(n)$ になっている.

例えば,$\varphi(4) = 2, \varphi(6) = 2, \varphi(29) = 28$ など.

p が素数なら $\varphi(p) = p - 1$. これは p が 素数になる必要十分条件である.

3.1. **オイラー関数の等式.** $\mathrm{GCD}(n,a)=d$ のとき $n=n'd, a=a'd$ と書くと, $\dfrac{a}{n}=\dfrac{a'}{n'}$.

すなわち, n' は n の約数である.このようにして，可約分数 $\dfrac{a}{n}$ は n の約数 n' を分母にもつ既約分数 $\dfrac{a'}{n'}$ になるので,これらは $\varphi(n')$ 個ある. n' が約数のとき $d=n/n'$ も約数なので, 最初の既約分数の個数も合わせて足せばもとの分数の総数 n が得られる.n' をあらためて d と書き換えると次の公式をえる.

$$\sum_{d|n}\varphi(d)=n \tag{2}$$

記号 $d|n$ は d が n の**約数であること**を意味する[1] .

$n = 6$ の場合その約数は 1,2,3,6 であり

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(6) = 2.$$

このとき 1+1+2+2=6.

オイラー関数の等式を使うと,オイラー関数の値が求められる.

p を素数として $n = p^2$ とおく.その約数は $1, p, p^2$ なので

$$\varphi(1) + \varphi(p) + \varphi(p^2) = p^2.$$

$\varphi(1) = 1, \varphi(p) = p - 1$ なので $r > 1$ のとき $\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1} = p^{r-1}(p-1)$.

q を p と異なる素数とし $n = pq$ とおく.その約数は $1, p, q, pq$. オイラー関数の等式によれば

$$\varphi(1) + \varphi(p) + \varphi(q) + \varphi(pq) = pq.$$

これより

$$\varphi(pq) = pq - (p - 1 + q - 1 + 1) = (p-1)(q-1).$$

これを使えば,

$$\varphi(21) = 12, \varphi(5 \cdot 29) = 4 \cdot 28 = 112.$$

などがわかる.

10 進展開分母の素因数分解と周期(循環節の長さ)

分母が素数 p なら 周期は $p-1$ の約数

分母が数 m なら 周期は $\varphi(m)$ の約数

周期を簡単に知る方法はない.

$1/m$ の 10 進展開での循環節の長さ: m の素因数分解との関連

```
3=[3]      period=1       euler=2
7=[7]      period=6       euler=6
9=[3^2]      period=1     euler=6
11=[11]      period=2     euler=10
13=[13]      period=6     euler=12
17=[17]      period=16    euler=16
19=[19]      period=18    euler=18
21=[3,7]      period=6    euler=12
23=[23]      period=22    euler=22
27=[3^3]      period=3    euler=18
29=[29]      period=28    euler=28
31=[31]      period=15    euler=30
33=[3,11]       period=2  euler=20
37=[37]      period=3     euler=36
39=[3,13]       period=6  euler=24
41=[41]      period=5     euler=40
```

```
51=[3,17]     period=16 euler=32
53=[53]      period=13   euler=52
57=[3,19]     period=18 euler=36
59=[59]      period=58   euler=58
61=[61]      period=60   euler=60
63=[3^2,7]     period=6 euler=36
67=[67]      period=33   euler=66
69=[3,23]     period=22 euler=44
71=[71]      period=35   euler=70
73=[73]      period=8    euler=72
77=[7,11]     period=6  euler=60
79=[79]      period=13   euler=78
```

5 進展開分母の素因数分解と周期(循環節の長さ)

```
2=[2]      period=1       euler=1
3=[3]      period=2       euler=2
4=[2^2]      period=1     euler=2
6=[2,3]      period=2     euler=2
7=[7]      period=6       euler=6
8=[2^3]      period=2     euler=4
9=[3^2]      period=6     euler=6
11=[11]      period=5     euler=10
12=[2^2,3]      period=2  euler=4
13=[13]      period=4     euler=12
14=[2,7]      period=6    euler=6
16=[2^4]      period=4    euler=8
17=[17]      period=16    euler=16
18=[2,3^2]      period=6  euler=6
19=[19]      period=9     euler=18
```

```
29=[29]      period=14   euler=28
31=[31]      period=3    euler=30
32=[2^5]      period=8   euler=16
33=[3,11]      period=10 euler=20
34=[2,17]      period=16 euler=16
36=[2^2,3^2]      period=6        euler=12
37=[37]      period=36   euler=36
38=[2,19]      period=9  euler=18
39=[3,13]      period=4  euler=24
41=[41]      period=20   euler=40
42=[2,3,7]      period=6 euler=12
43=[43]      period=42   euler=42
44=[2^2,11]      period=5         euler=20
46=[2,23]      period=22 euler=22
47=[47]      period=46   euler=46
48=[2^4,3]      period=4 euler=16
```

2 進展開分母の素因数分解と周期(循環節の長さ)

```
3=[3]      period=2       euler=2
5=[5]      period=4       euler=4
7=[7]      period=3       euler=6
9=[3^2]      period=6     euler=6
11=[11]      period=10    euler=10
13=[13]      period=12    euler=12
15=[3,5]      period=4    euler=8
17=[17]      period=8     euler=16
19=[19]      period=18    euler=18
21=[3,7]      period=6    euler=12
23=[23]      period=11    euler=22
25=[5^2]      period=20   euler=20
27=[3^3]      period=18   euler=18
29=[29]      period=28    euler=28
```

```
31=[31]      period=5    euler=30
33=[3,11]      period=10 euler=20
35=[5,7]      period=12  euler=24
37=[37]      period=36   euler=36
39=[3,13]      period=12 euler=24
41=[41]      period=20   euler=40
43=[43]      period=14   euler=42
45=[3^2,5]     period=12         euler=24
47=[47]      period=23   euler=46
49=[7^2]      period=21  euler=42
```

4. オイラー関数

互いに素な自然数 n, m に対して

$$\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m). \tag{3}$$

この性質を**オイラー関数の乗法性**という.

一般に自然数 n の相異なる素因数を $p_1, p_2, \cdots, p_s$ とおくと指数 $e_1, e_2, \cdots, e_s$ により素因数分解

$$n = {p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}\cdots{p_s}^{e_s}$$

できる.これより

$$\varphi(n) = \varphi({p_1}^{e_1})\varphi({p_2}^{e_2})\cdots\varphi({p_s}^{e_s}).$$

$\varphi({p_1}^{e_1}) = {p_1}^{e_1} - {p_1}^{e_1-1}, \cdots$ に注意すると

$$\varphi(n) = n(1 - {p_1}^{-1})(1 - {p_2}^{-1})\cdots(1 - {p_s}^{-1}).$$

をえる.これを**オイラーの公式**という.

例

られた m に対して $\varphi(n) = m$ を満たす n を求めることは簡単でない.

オイラー関数の逆. $\varphi(2) = 1$ であるが $n > 2$ なら $\varphi(n)$ は偶数である.

- $\varphi(n) = 4$ のとき $n = 5, 8, 10, 12.$
- $\varphi(n) = 40$ のとき $n = 41, 55, 75, 82, 88, 100, 110, 132, 150,$[2]
- $\varphi(n) = 400$ のとき $n = 401, 451, 505, 802, 808, 825, 902,$
  $1000, 1010, 1100, 1212, 1500, 1650.$

5. オイラー関数の歴史

オイラー関数はLeonhard Euler によって 1763年に導入された. 導入の動機はフェルマーの小定理を非素数の場合に拡張することであった.

ただし,オイラーは記号 $\varphi(n)$ を用いたことはない.この記号は Gauss の Disquisitiones Arithmeticae で初めて使われ広まった.

$\varphi(n)$ はEuler's phi function と呼ばれる.

1879 年に J. J. Sylvester が totient という言い方を導入しそのため, Euler's totient function と呼ばれることもある.

n の cototient は $n - \varphi(n)$ で定義され,これは 1 以上で,1になるのは n が素数の場合だけである.

6. 高次オイラー関数

広尾学園の高校生が発見した簡明な美しい公式.

自然数 n を素因数分解して

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$$

とおく.

集合 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ についてn の素因子 p に対して p の倍数になる S の元の集合を $S(p)$ で表す.

$S(p) = pS(\frac{n}{p})$ と書くことができる.

たとえば $n = 6, p = 2$ のとき $S(2) = 2\{1, 2, 3\} = \{2, 4.6\}$.

6.1. **オイラー関数.** $W_n = S - \cup_{j=1}^{s} S(p_j)$ は $a < n$ かつ a, n: 互いに素な a の集合である.

その個数を $\varphi(n)$ と書く. これがオイラー関数である.

S の集合 T についてその元の個数を $|T|$ で示すと $|S(p_j)| = \frac{n}{p_j}, |S(p_j p_k)| = \frac{n}{p_j p_k}, \cdots$ が成り立つ.

6.2. **包含関係の公式.** 一般に集合 S の部分集合 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ について

$$|\cup_{j=1}^{s} A_j| = \sum_{j=1}^{s} |A_j| - \sum_{j<k}^{s} |A_j \cap A_k| + \cdots$$

証明は s についての数学的帰納法でできる.

6.3. **オイラー関数の表示式.**

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= |W_n| \\
&= |S - \cup_{j=1}^{s} S(p_j)| \\
&= |S| - |\cup_{j=1}^{s} S(p_j)| \\
&= n - \sum_{j=1}^{s} |S(p_j)| + \sum_{j<k}^{s} |S(p_j p_k)| - \cdots \\
&= n - (n/p_1 + n/p_2 + \cdots + n/p_s) + n/(p_1 p_2) + \cdots + n/(p_{s-1} p_s) - \cdot \\
&= n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2) \cdots (1 - 1/p_s).
\end{aligned}$$

と書ける.

そこで $A = (1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2) \cdots (1 - 1/p_s)$ とおくと

$$\varphi(n) = nA.$$

6.4. **和の場合.** $a < n$かつ n と互いに素な a の和を $\psi(n)$ と書き, S の部分集合 T についてその元の和を $|T|_1$ で示すと

$$|S|_1 = \frac{n(n+1)}{2}, |S(p)|_1 = p\frac{n/p(n/p+1)}{2} = \frac{n^2}{2p}+\frac{n}{2} = \frac{n}{2}(\frac{n}{p}+1).$$

$$0 = (1-1)^s = 1 - s + s(s-1)/2 - s(s-1)(s-2)/6 + \cdots$$

に注意すると

$$\begin{aligned}
\psi(n) &= |S - \cup_{j=1}^{s} S(p_j)|_1 \\
&= |S|_1 - |\cup_{j=1}^{s} S(p_j)|_1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{j=1}^{s} |S(p_j)|_1 + \sum_{j<k}^{s} |S(p_j p_k)|_1 - \cdots \\
&= \frac{n}{2}(n+1-n\sum^{s}\frac{1}{p} - s + n\sum\frac{1}{p_j p_k} + \frac{s(s-1)}{2} - \cdots)
\end{aligned}$$

$$\psi(n) = \frac{n\varphi(n)}{2}.$$

これは Wikipedia の英語版に出ている公式である.

6.5. **平方和.** 平方和について考える. $a < n$ かつ n と互いに素な a の平方和を $\psi^{(2)}(n)$ と書く.

一般に部分集合T についてその元の平方和を $|T|_2$ で示すと

$$|S|_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n}{6}(3n+2n^2+1), |S(p_j)|_2 = \frac{n}{6}(3n+\frac{2n^2}{p_j}+p_j)$$

$$\begin{aligned}
\psi^{(2)}(n) &= |S - \cup_{j=1}^{s} S(p_j)|_2 \\
&= |S|_2 - |\cup_{j=1}^{s} S(p_j)|_2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \sum_{j=1}^{s} |S(p_j)|_2 + \sum_{j<k}^{s} |S(p_j p_k)|_2 + \cdots \\
&= \frac{n}{6}(3n + 2n^2 + 1 - (3ns + 2n^2 \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{p_j} + \sum_{j=1}^{s} p_j)
\end{aligned}$$

ここで $B = (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_s)$ とおいた. よって

$$\psi^{(2)}(n) = \frac{n}{6}(2n^2A + B).$$

6.6. n **の根基.** n の根基(radical) $\mathrm{rad}(n) = p_1 p_2 \cdots p_s$ を用いると,

$\frac{B}{\mathrm{rad}(n)} = (-1)^s A = \frac{\varphi(n)}{n}$ が成り立つ.

$$\frac{B}{\mathrm{rad}(n)} = (1/p_1 - 1)(1/p_2 - 1)\cdots(1/p_s - 1) = (-1)^s A.$$

$$nB = \mathrm{rad}(n)(-1)^s nA = \mathrm{rad}(n)(-1)^s \varphi(n).$$

$$\psi^{(2)}(n) = \frac{1}{6}(2n^2\varphi(n) + nB) = \frac{\varphi(n)}{6}(2n^2 + (-1)^s \mathrm{rad}(n)).$$

abc 予想の定式化で登場した n の根基がここにも出てきた.

$$\psi^{(2)}(n) = \frac{\varphi(n)}{6}(2n^2 + (-1)^s \mathrm{rad}(n))$$

これは広尾学園の高校生三谷樹さんがはじめて見出した公

6.7. **立方和.** 三谷さんは立方和についても公式を与えた.
$a < n$かつ nと互いに素な a の立方和を $\psi^{(3)}(n)$ と書く.
T についてその元の立方和を $|T|_3$ で示すと
$|S|_3 = \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}$ が成り立ち $|S(p_j)|_3 = \frac{n^2}{4}(2n + \frac{n^2}{p_j} + p_j)$.

$$\begin{aligned}\psi^{(3)}(n) &= |S - \cup_{j=1}^{s} S(p_j)|_3 \\ &= |S|_3 - |\cup_{j=1}^{s} S(p_j)|_3 \\ &= \frac{n^2}{4}(n^2 A + B). \\ &= \frac{n\varphi(n)}{4}(n^2 + (-1)^s \mathrm{rad}(n)).\end{aligned}$$

よって

$$\psi^{(3)}(n) = \frac{n\varphi(n)}{4}(n^2 + (-1)^s \mathrm{rad}(n)).$$

6.8. **4乗和.** 次に4乗和を考える. $a < n$ かつ n と互いに素な a の4乗和を $\psi^{(4)}(n)$ と書く. 一般に集合 T についてその元の4乗和を $|T|_4$ で示すと

$$|S|_4 = \frac{n}{30}(15n^3+6n^4+10n^2-1), |S(p_j)|_4 = \frac{n}{30}(15n^2+\frac{6n^4}{p_j}+10n^2p_j-p_j^3)$$

さらに $\Gamma_3(n) = (1-p_1^3)(1-p_2^3)\cdots(1-p_s^3)$ を用いると

$$\begin{aligned}\psi^{(4)}(n) &= |S - \cup_{j=1}^{s} S(p_j)|_4 \\ &= |S|_4 - |\cup_{j=1}^{s} S(p_j)|_4 \\ &= \frac{n}{30}(6n^4A + 10n^2B - \Gamma_3(n)) \\ &= \frac{n}{30}(6n^3\varphi(n) + 10n(-1)^s\mathrm{rad}(n)\varphi(n) - \Gamma_3(n)).\end{aligned}$$

かくて次の結果に至る.

6.9. **5乗和.** 次に5乗和を考える. $a < n$ かつ n と互いに素な a の5乗和を $\psi^{(5)}(n)$ と書く.

集合 T についてその元の5乗和を $|T|_5$ で示すと

$$|S|_5 = \frac{n^2}{12}(2n^4+6n^3+5n^2-1), |S(p_j)|_5 = \frac{n^2}{12}(6n^3+\frac{2n^4}{p_j}+5n^2p_j-p_j^3)$$

$$\begin{aligned}\psi^{(5)}(n) &= |S - \cup_{j=1}^{s} S(p_j)|_5 \\ &= |S|_5 - |\cup_{j=1}^{s} S(p_j)|_5 \\ &= \frac{n^2}{12}(2n^4A + 5n^2B - \Gamma_3(n)) \\ &= \frac{n^2}{12}(2n^3\varphi(n) + 5n(-1)^s \mathrm{rad}(n)\varphi(n) - \Gamma_3(n)).\end{aligned}$$

こうして次の結果が出る.

$$\psi^{(5)}(n) = \frac{n^2}{12}(2n^3\varphi(n) + 5n(-1)^s \mathrm{rad}(n)\varphi(n) - \Gamma_3(n))$$

$n = 3$ として検算しよう.
$\psi^{(5)}(3) = 1 + 2^5 = 33.$
一方$2n^3\varphi(n) + 5n(-1)^s \mathrm{rad}(n)\varphi(n) - \Gamma_3(n) = 2 * 3^3 * 2 -$

6.10. m **乗和 の公式.** 集合 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ について, S の集合 T についてその元の m 乗和を $|T|_m$ で示す.

$$S_m(n) = |S|_m = \sum_{k=1}^{n} k^m = 1 + 2^m + \cdots + n^m$$

とおく.

$S_m(n)$ の公式はベルヌーイ数 B_k を用いると表すことができる.

7. ベルヌーイ数 B_k

一般に数列 $\{c_n\}$ について $f(x)=\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ を母関数,$h(x)=\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{j!} x^j$ を指数型母関数という.

$\frac{t}{e^t-1}$ 指数型母関数のテーラー展開の係数としてベルヌーイ数 B_k が定義される.

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}.$$

これは指数型母関数の応用である.

B_k を一般に明示的に与えることは困難だが簡単な場合は次のようになる.

$$B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}, B_2=\frac{1}{6}, B_3=0, B_4=-\frac{1}{30}, B_5=0, B_6=\frac{1}{42}, B_7=0.$$

偶数項の分子の性質がとりわけ興味深い. $k = 12$ のときの分子 691 は素数. 分子に素数の多いことは注目に値する.

7.1. B_k の諸性質. 漸化式

$$B_k = -\sum_{q=0}^{k-1} \binom{k}{q} \frac{B_q}{(k-q+1)}$$

ベルヌーイ多項式

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!}.$$

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} B_{2n} \frac{(2\pi)^{2n}}{2 \times (2n)!}.$$

これより $\zeta(2n) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}(Euler)$ など

$$\zeta(-n) = -1 \frac{B_{n+1}}{n+1}, n > 0$$

$n = 1$ とすると $\sum_{k=1}^{\infty} = -\frac{1}{12}(Euler)$ これは最近物理で人

7.2. $B_{2k+1} = 0$ **の証明.** $\dfrac{t}{e^t - 1} = 1 - \dfrac{t}{2} + F(t)$ により $F(t)$ を定義する.

$a_k = (-1)^k \binom{m+1}{k} B_k$ を使うと

$$F(t) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^k.$$

これが偶関数になることを以下で確認する.

$$F(t) = \frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2} = \frac{2 + t + (t-2)e^t}{2(e^t - 1)}$$

により

$$F(-t) = \frac{2 - t - (t+2)e^{-t}}{2(e^{-t} - 1)} = \frac{(2-t)e^t - (t+2)}{2(1 - e^t)} = F(t).$$

$F(t)$ が偶関数になるので $a_{2k+1} = 0$.

8. べき乗和 の公式

m 乗和 $S_m(n) = |S|_m = \sum_{k=1}^{n} k^m$ は n について $m+1$ 次式であり $a_k = (-1)^k \binom{m+1}{k} B_k$ を使うと次の公式が成り立つ.

$$S_m(n) = \frac{n}{m+1} \sum_{k=0}^{m} a_k n^{m-k}.$$

はじめの数項は次のようになる.

$$S_m(n) = \frac{n}{m+1}(n^m + \frac{m+1}{2}n^{m-1} + \frac{m(m+1)}{12}n^{m-2} - \frac{(m+1)m(m-1)(m}{24 \times 30}$$

$m = 3$ のとき検算

$$S_3(n) = \frac{n}{4}(n^3 + 2n^2 + n) = \frac{n^2}{4}(n+1)^2.$$

8.1. **べき乗和公式の証明.** 以下英語版 Wikipedia を参考にその証明を与える.

$\{B_j\}$ について その指数型母関数は簡単になる.

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{j=0}^{\infty}B_j\frac{z^j}{j!}$$

これより

$$\frac{1}{e^z-1}=\sum_{j=0}^{\infty}B_j\frac{z^{j-1}}{j!}$$

m 乗和 $S_m(n)$ について その指数型母関数を $G(z,n)$ とおくとき

$$G(z,n)=\sum_{m=0}^{\infty}S_m(n)\frac{z^m}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}k^m\frac{z^m}{m!}$$

$$\sum_{k=1}^{n} e^{kz} = \sum_{k=1}^{n} W^k = \sum_{k=0}^{n} W^k - 1 = \frac{W^{n+1} - 1}{W - 1} - 1 = W \times \frac{W^n - 1}{W - 1}$$

これより

$$G(z,n) = W \times \frac{W^n - 1}{W - 1} = \frac{e^{nz} - 1}{1 - e^{-z}} = (e^{nz} - 1) \times \frac{1}{1 - e^{-z}}.$$

$e^{nz} - 1 = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!}(nz)^q$ と $\frac{1}{1-e^{-z}} = -\sum_{j=1}^{\infty} B_j \frac{(-z)^{j-1}}{j!}$ と を代入すると

$$\begin{aligned} G(z,n) &= -\sum_{j=1}^{\infty} B_j \frac{(-z)^{j-1}}{j!} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!}(nz)^q \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} B_j (-1)^j \sum_{q=1}^{\infty} \frac{z^{q+j-1} n^q}{j!q!}. \end{aligned}$$

ここで $m = q + j - 1$ とおくとき $j = m + 1 - q \leq m$ により $m \geq j$.

$$\frac{B_j(-1)^j z^{q+j-1} n^q}{j!q!} = \frac{B_j(-1)^j z^m n^{m+1-j}}{j!(m+1-j)!}$$

$\binom{m+1}{j} = \frac{m!(m+1)}{(m+1-j)!j!}$ に注意すると

$$\frac{B_j(-1)^j z^m n^{m+1-j}}{j!(m+1-j)!} = B_j(-1)^j z^m n^{m+1-j} \binom{m+1}{j} \frac{1}{m!(m+1)}.$$

これを用いて $G(z,n)$ を求める.

$$\begin{aligned} G(z,n) &= \sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{j=1}^{m} B_j(-1)^j n^{m+1-j} \binom{m+1}{j}) \frac{z^m}{m!(m+1)} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{n}{m+1} \sum_{j=1}^{m} B_j(-1)^j n^{m-j} \binom{m+1}{j}) \frac{z^m}{m!} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n}{m+1} \sum_{j=1}^{m} a_j n^{m-j} \frac{z^m}{m!} \end{aligned}$$

よって$G(z,n)=\sum_{m=0}^{\infty}S_m(n)\frac{z^m}{m!}$により

$$S_m(n)=\frac{n}{m+1}\sum_{j=1}^{m}a_j n^{m-j}$$

9. $\psi^{(m)}(n)$ の公式

n の素因子 $p = p_j$ について

$$|pS(\frac{n}{p})|_m = \frac{n}{m+1}\sum_{k=0}^{m} a_k n^{m-k} p^{k-1}$$

これを展開すると $a_3 = 0$ によって

$$\frac{n}{m+1}(\frac{n^m}{p} + a_1 n^{m-1} + p a_2 n^{m-2} + p^3 a_4 n^{m-4}) + \cdots$$

n の素因子 $p = p_j, q = p_L$ について

$$|pqS(\frac{n}{pq})|_m = \frac{n}{m+1}\sum_{k=0}^{m} a_k n^{m-k} p^{k-1} q^{k-1}$$

$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$ について $\Gamma(r,n) = \prod_{j=1}^{s}(1-p_j^r)$ とおく.

強いて言えば, $\Gamma(-1,n) = \prod_{j=1}^{s}(1-1/p_j) = A$,$\Gamma(1,n) = B$.

$$
\begin{aligned}
\psi^{(m)}(n) &= |S - \cup_{j=1}^{s} S(p_j)|_m \\
&= |S|_m - |\cup_{j=1}^{s} S(p_j)|_m \\
&= S_m(n) - \sum_{j=1}^{s} |S(p_j)|_m + \sum_{j<L}^{s} |S(p_j p_L)|_m + \cdots \\
&= \frac{n}{m+1}(\sum_{k=0}^{m} a_k n^{m-k} - \sum_{j=1}^{s}(\sum_{k=0}^{m} a_k n^{m-k} p_j^{k-1}) - \sum_{j<L}^{s}\sum_{k=0}^{m} a_k n^{m-k} \\
&= \frac{n}{m+1}(An^m + a_2 B n^{m-2} + a_4 \Gamma(3,n) n^{m-4} + a_6 \Gamma(5,n) n^{m-6} + \cdot
\end{aligned}
$$

$$
\psi^{(m)}(n) = \frac{n}{m+1}(An^m + a_2 B n^{m-2} + a_4 \Gamma(3,n) n^{m-4} + a_6 \Gamma(5,n) n^{m-6} + \cdots).
$$

$m=5$ として検算
$a_2=\frac{m(m+1)}{12}=\frac{5}{2}, a_4=-\frac{m(m+1)(m-1)(m-2)}{30}=-\frac{1}{2}$ により

$$\psi^{(m)}(n)=\frac{n^2}{12}(2\varphi(n)n^3+5Bn^2-\Gamma(3,n)).$$

$$\psi^{(m)}(n)=\frac{n^2}{12}(2\varphi(n)n^3+5\varphi(n)\mathrm{rad}(n)n-\Gamma(3,n)).$$

$m=6$ とすると新しい公式をえる.
$a_2=\frac{m(m+1)}{12}=\frac{5}{2}, a_4=-\frac{m(m+1)(m-1)(m-2)}{30}=-\frac{1}{2}$ により

10. $\psi(n)$ の乗法性の問題

n, m が互いに素なら

$$\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$$

が成立しこれを $\varphi(n)$ の乗法性という.

乗法性は $\psi(n)$ などでは成り立たない.

一般に関数 $F(n)$ が乗法性を持たないとする. 自然数 n の素因数分解

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$$

を利用して

$$\tilde{F}(n) = F(p_1^{e_1})F(p_2^{e_2}) \cdots F(p_s^{e_s})$$

とおくとこれは乗法性を持つ.

$\tilde{F}(n)$ は単に n 倍なのでこれで割って新しい関数$\tilde{\varphi}(n) = \frac{\varphi(n)}{2^s}$ を導入しこれを オイラー関数の陪関数 (associated function) という.

ごく簡単な場合の値を計算してみよう:

$$\tilde{\varphi}(2) = \frac{1}{2}, \tilde{\varphi}(3) = 1, \tilde{\varphi}(4) = 1, \tilde{\varphi}(5) = 2, \tilde{\varphi}(6) = \frac{1}{2}$$

陪関数の値は分母が2べきの有理数になる.

11. 完全数

a を自然数とするときその約数の和を $\sigma(a)$ と書く.

$\sigma(a) = 2a$ を満たす数を 完全数といい, 6,28,496,8128 などがあり古代の数学者ユークリッドによって考えられた.

これらを素因数分解すると

$$6 = 2*(2^2-1), 28 = 2^2*(2^3-1), 496 = 2^4*(2^5-1), 8128 = 2^6*(2^7-1)$$

などとなる.

$a = 2^e q (q = 2^{e+1} - 1 : \text{素数})$ と書かれる数は完全数になることはユークリッドによって知られていた. そこでこれらをユークリッドの完全数という.

11.1. **オイラーによる証明.** 偶数の完全数はユークリッドの完全数に限ることはオイラーがはじめて証明した. 没後に公表された彼の証明をリライトすると次のとおり.

a を偶数の完全数とし, $a = 2^e L(L : \text{奇数})$ の形に書く.

$$\sigma(a) = \sigma(2^e)\sigma(L) = (2^{e+1} - 1)\sigma(L), 2 \times a = 2^e L = 2^{e+1} L$$

となるので

$(2^{e+1} - 1)\sigma(L) = 2^{e+1} L$ により

$$\frac{2^{e+1} - 1}{2^{e+1}} = \frac{L}{\sigma(L)}.$$

左辺は既約分数だから $L = c(2^{e+1} - 1), \sigma(L) = 2^{e+1} c$ を満たす自然数 c がある.

1). $c = L$ なら $2^{e+1} - 1 = 1$ になり $e = 0$. a は奇数となり仮定に反する.

2). $c = 1$ なら $\sigma(L) = L + 1$ になるので L は素数.

証明のキーは $\sigma(L) = L + 1$ は L が素数 p になる必要十分条件になることである.

11.2. $2p$ **の特徴づけ.** $a = 2p, p \neq 2$ のとき関数 $\sigma(a)$ の乗法性を用いて

$$\sigma(a) = \sigma(2p) = \sigma(2)\sigma(p) = 3(p+1) = 3(\frac{a}{2}+1)$$

となるので整理すると

$$2\sigma(a) = 3(a+2).$$

$a = 2p$ のときにあった p がうまく消えている.

そこでこの逆問題を考える.すなわちこの式を a についての方程式と考えこれを満たす解 a をすべて求めよう.

方程式の解 a としては $2p$ がある. これらに限るか? という問題を考える.

式から a は偶数になることがわかる. これは大きなアドバンテージである.

それゆえ $a = 2^e L(L:$奇数$)$ と書けるのでこれを代入する.

$L = 1$ のとき.

$$2^{e+1} - 1 = 3 \cdot 2^{e-1} + 3.$$

よって $2^{e-1} = 3 + 1 = 4$. ゆえに $e = 3; a = 8$.

$L > 1$ のとき. $\sigma(L) \geq L + 1$ を用いて

$$3(2^{e-1}L) + 3 = (2^{e+1} - 1)\sigma(L) \geq (2^{e+1} - 1)(L + 1).$$

$3(2^{e-1}L)+3 \geq (2^{e+1}-1)(L+1) = (4\cdot 2^{e-1}-1)L+4\cdot 2^{e-1}-1.$

整理すると

$$3(2^{e-1}L) + 3 \geq (4 \cdot 2^{e-1} - 1)L + 4 \cdot 2^{e-1} - 1.$$

ゆえに

$$-4(2^{e-1} - 1) \geq (2^{e-1} - 1)L.$$

$e > 1$ とすると $2^{e-1} - 1 > 0$ なのでこれで割ると $-4 \geq L$ となり大なる矛盾.

以上によって,方程式の解は$a = 2p$ (通常解という) のほかに $a = 8$ があることがわかった.

通常解 $2p$ 以外の解 $8 = 2 \times 4$ の形を見ると, 4 が「ボクも素数に入れて」と叫んでいるようである. そこで 4 を擬素数とみて$a = 2 \times 4$ を擬素数解という.

できてみると証明はやさしいがオイラーの証明と似ているところがカワイイ.

11.3. $a = P^{\varepsilon}p$ **の特徴づけ.** 素数 P の累乗 P^{ε} をとる. $p \neq P$ を満たす素数 p をとり $a = P^{\varepsilon}p$ とおく.

$$\sigma(a) = \sigma(P^{\varepsilon}p) = \sigma(P^{\varepsilon})\sigma(p) = \frac{P^{\varepsilon+1}-1}{\overline{P}}(p+1)$$

となる. 分母を払ってから,P^{ε} を乗ずると

$$\begin{aligned}\overline{P}P^{\varepsilon}\sigma(a) &= (P^{\varepsilon+1}-1)(a+P^{\varepsilon}) \\ &= a(P^{\varepsilon+1}-1)+\delta.\end{aligned}$$

ここで $\delta = P^{\varepsilon}(P^{\varepsilon+1}-1)$ とおく. すなわち

$$\overline{P}P^{\varepsilon}\sigma(a) = a(P^{\varepsilon+1}-1)+\delta$$

が基本方程式である.

この解は擬素数解 $a = P^{2\varepsilon+1}$ と通常解$a = P^{\varepsilon}p$ ($p \neq P$ となる素数) となることが証明できる.

係数 m として,素数 P の累乗 P^{ε} をとる. $p \neq P$ を満たす素数 p をとり $a = P^{\varepsilon}p$ とおく.

$$\sigma(a) = \sigma(P^{\varepsilon}p) = \sigma(P^{\varepsilon})\sigma(p) = \frac{P^{\varepsilon+1}-1}{\overline{P}}(p+1)$$

となる. 分母を払ってから,P^{ε} を乗ずると

$$\begin{aligned}\overline{P}P^{\varepsilon}\sigma(a) &= (P^{\varepsilon+1}-1)(a+P^{\varepsilon}) \\ &= a(P^{\varepsilon+1}-1)+\delta.\end{aligned}$$

ここで $\delta = P^{\varepsilon}(P^{\varepsilon+1}-1)$ とおいた. すなわち

$$\overline{P}P^{\varepsilon}\sigma(a) = a(P^{\varepsilon+1}-1)+\delta$$

が基本方程式である.

11.4. **方程式を解く．** この逆,すなわちこれを満たす解 a を決定しよう.

P を法として考えると $a \equiv 0 \bmod P$ がただちにわかる.

$a = P^e L$ とかける. ここで L は P の倍数ではない.

$\sigma(a) = \frac{P^{e+1}-1}{P}\sigma(L)$ により

基本式

$$P^{\varepsilon}(P^{e+1}-1)\sigma(L) = P^{e}(P^{\varepsilon+1}-1)L + \delta$$

をえる.

$L = 1$ のとき

$P^{\varepsilon}(P^{e+1}-1) = P^{e}(P^{\varepsilon+1}-1) + \delta$ になり,整理すると $P^e = P^{2\varepsilon+1}$

これより $e = 2\varepsilon + 1$. すなわち, $a = P^{2\varepsilon+1}$ となり擬素数解になる.

$L > 1$ のとき $\sigma(L) \geq L + 1$ を満たすので

これを整理すると

$$L(P^{\varepsilon} - P^{e}) \geq \delta_1 - \delta.$$

ここで $\delta_1 = P^{\varepsilon}(P^{e+1} - 1)$ とおいた.

$\delta_1 - \delta = P^{\varepsilon}(P^{e+1} - P^{\varepsilon+1})$ により

$$L(P^{\varepsilon} - P^{e}) \geq P^{\varepsilon}(P^{e+1} - P^{\varepsilon+1}).$$

$e > \varepsilon$ なら左辺: $L(P^{\varepsilon} - P^{e}) < 0$. しかし右辺 $P^{\varepsilon}(P^{e+1} - P^{\varepsilon+1}) > 0$ なのであっさり矛盾.

$e = \varepsilon$ なら

$$P^{\varepsilon}(P^{e+1} - 1)\sigma(L) = P^{e}(P^{\varepsilon+1} - 1)L + \delta$$

において 左辺:$P^{\varepsilon}(P^{e+1} - 1)\sigma(L) = \delta\sigma(L)$ 右辺 $P^{e}(P^{\varepsilon+1} - 1)L + \delta = \delta L + \delta$.

よって $\delta\sigma(L) = \delta L + \delta$. δ を払うと $\sigma(L) = L + 1$. すなわち L は素数. したがって $n = L$ とおけば $n = P^{\varepsilon}m$ となりこ

$e < \varepsilon$ なら基本式

$$P^{\varepsilon}(P^{e+1}-1)\sigma(L) = P^{e}(P^{\varepsilon+1}-1)L + \delta$$

を P^e で式を除して

$$P^{\varepsilon-e}(P^{e+1}-1)\sigma(L) = (P^{\varepsilon+1}-1)L + \delta P^{-e}.$$

$\delta P^{-e} = P^{\varepsilon-e}(P^{\varepsilon+1}-1)$ は P の倍数なのでこれらを P を法としてみれば $L \equiv 0 \mod P$.

これは L と P が互いに素であることに矛盾.

11.5. $a = 6p$ **の特徴づけ.** 素因子が 1 個の場合には方程式の解の完全解決ができた. 次に簡単な素因子が2個, とくに $a = 6p$ の場合を考える. $pneq2, 3$ と仮定する. 6 はいわゆる完全数である.

$\sigma(a) = \sigma(6)\sigma(p) = 12(p+1) = 2a+12$ により $\sigma(a) = 2a+12$ ができる.

そこで方程式 $\sigma(a) = 2a + 12$ の解をすべて求めたい.

この式を使うだけでは a が偶数とは言えない. 奇数完全数は存在するか? という 2000 年来の懸案より難しそうである.

解をコンピュータで探索すると

通常解 $a = 6p(p \neq 2, 3$:素数$)$ と擬素数解 $a = 6 * 2^2, 6 * 3^3$ の他にわけのわからない解が出てきた. このような解をエイリアン解と呼ぶ.

TABLE 1. $\sigma(a) = 2a + 12$ のエイリアン解

a	素因数分解
304	$2^4 * 19$
127744	$2^8 * 499$

エイリアン解は 2 個しか出てこなかったが $2^e p, (p = 2^{e+1} - 13$: 素数) の形をしている. そこでその形に拘ってエイリアン解を探す

TABLE 2. $q = 2^{e+1} - 13$

e	$q = 2^e - 13$
12	8179
16	131059
56	144115188075855859

エイリアン解は末尾が 9. また指数 e 4の倍数である.

これらはユークリッド完全数を -12 だけ平行移動した形をしている.

エイリアン解は完全数の場合のように,無数にあるに違いない. 完全数は無限にあるという予想は,完全なるものが無数にあるという意味で美しい. 数学のコンテキストにおいてこれらのエイリアン解は無数にあるという予想は実に恐ろしい.

TABLE 3. $q = 2^{e+1} - 13; e = 4m$

e	$q = 2^{e+1} - 13; e = 4m$ 素因数分解
4	(19)=19
8	(499)=499
12	(8179)=8179
16	(131059)=131059
20	(2097139)=11*190649
24	(33554419)=197*170327
28	(536870899)=23*23342213
32	(8589934579)=1237*1549*4483
36	(137438953459)=5507*24957137
40	(2199023255539)=11*19*10521642371
44	(35184372088819)=59*596345289641
48	(562949953421299)=229*919*17729*150881
52	(9007199254740979)=149*6045100170967 1
56	(144115188075855859)=144115188075855859

$a = p^e q^f (p < q)$ となる解を求める. $X = p^e, Y = q^f$ とおけば

$$a = XY, \sigma(a) = \frac{(pX-1)(qY-1)}{\rho'}$$

と書ける. ここで $\rho' = \overline{pq}; \overline{p} = p-1, \overline{q} = q-1$ とおいた.

$\sigma(a) = \frac{(pX-1)(qY-1)}{\rho'}, 2a+12 = 2XY+12$ を用いて

$$(pX-1)(qY-1) = 2\rho'(XY+6).$$

さてここからは $p = 2$ を仮定する.

$A = 2X-1, B = qY-1$ とおくことにより

$$AB = 2\rho'(XY+6), AB = 2qXY - (2X+qY) + 1.$$

$2q - 2\overline{q} = 2$ なので次の基本式をえる:

$$2XY = 12\overline{q} + 2X + qY - 1.$$

$q^2(2X-q)=2Xq^2-q^3$ を移項して

$$12\overline{q}+q^3-1\geq 2X(q^2-1)=2X\overline{q}\tilde{q}.$$

ここで $\tilde{q}=q+1$ とおいた. さらに $q^3-1=\overline{q}(q^2+q+1)$ によって, 上の不等式から

$$q^2+q+1+12\geq 2X\tilde{q}.$$

$q^2+q+1+12\geq 2X\tilde{q}\geq (q+1)\tilde{q}=q^2+2q+1$ によって $12\geq q$. q は奇素数なので $q=11,7,5,3$.
$q^2+q+1+12\geq 2X\tilde{q}$ によって

$$X\leq \frac{q^2+q+1+12}{2\tilde{q}}.$$

(i) $q = 3$.

$X \leq \frac{q^2+q+1+12}{2\tilde{q}} = \frac{25}{8} < 3.5$ により $X = 2$.

$2XY = 12\overline{q} + 2X + qY - 1$ に代入すると$4Y = 12 * 2 + 2 * 2 + 3Y - 1 = 27 - 3Y$ を得るので

$Y = 27, Y = 3^f$ により $f = 3, a = 2 * 3^3$. これは擬素数解.

(ii) $5 \leq q \leq 11$

$q = 5$ のとき $X \leq \frac{q^2+q+1+12}{2\tilde{q}} = \frac{43}{12} < 4.$ よって $X = 2.$ さらに$2X \geq q + 1$ を思い出せば$4 = 2X \geq q + 1 = 6.$ 矛盾

$q = 7$ のとき $X \leq \frac{q^2+q+1+12}{2\tilde{q}} = \frac{69}{16} < 5.$ よって $X = 2, 4.$ さらに基本式に戻り

$$Y(2X - q) = 12\overline{q} + 2X - 1$$

$X = 4$ なら $Y = 12 * 6 + 2 * X - 1 = 79.$ $Y = 7^f$ に反する.

$q = 11$ のとき $x \leq \frac{q^2+q+1+12}{2\tilde{q}} = \frac{121}{24} + 1 < 5.2.$ よって $X = 2, 4.$

しかし $2X > q = 11$ に反する.

ii) $Y = q.$

$q(2X - q) = 12\overline{q} + 2X - 1$ によって,$2X = 12 + q + 1.$ これより $q = 2^{e+1} - 13.$ $e = 3$ にとき $q = 3.$ ゆえに $a = 2 * 3^3.$ これは擬素数解.

$q = 2^{e+1} - 13$ が素数になる場合を探す.

11.7. $a = 28p$ **の特徴づけ.** 第2の完全数 28 が係数の場合を計算する.

TABLE 4. $m = 28$:素数

(a)	素因数分解
(84)	$2^2 * 3 * 7$
(140)	$2^2 * 5 * 7$
(224)	$2^5 * 7 *$
(308)	$2^2 * 7 * 11$
(364)	$2^2 * 7 * 13$
(476)	$2^2 * 7 * 17$
(532)	$2^2 * 7 * 19$
(644)	$2^2 * 7 * 23$
(812)	$2^2 * 7 * 29$
(868)	$2^2 * 7 * 31$
(1036)	$2^2 * 7 * 37$
(1148)	$2^2 * 7 * 41$
(1204)	$2^2 * 7 * 43$
(1316)	$2^2 * 7 * 47$

TABLE 5. $m = 28{:}2 < a < 1,500,000$,* 擬素数解

(a)	素因数分解
224	$2^5 * 7$ *
1372	$2^2 * 7^3$ *
4544	$2^6 * 71$
9272	$2^3 * 19 * 61$
14552	$2^3 * 17 * 107$
25472	$2^7 * 199$
74992	$2^4 * 43 * 109$
495104	$2^9 * 967$

TABLE 6. $s(a) = 2; a = 2^e q$;:エイリアン解

(a)	素因数分解
4544	$2^6 * 71$
25472	$2^7 * 199$
495104	$2^9 * 967$

TABLE 7. $s(a) = 3, a = 2^e q_1 * q_2$;:エイリアン解

(a)	素因数分解
9272	$2^3 * 19 * 61$
14552	$2^3 * 17 * 107$
74992	$2^4 * 43 * 109$

11.8. $a = 496p$ の特徴づけ. 第3の完全数 496

TABLE 8. $m = 496::2 < a < 1,500,000$,* 擬素数解

(a)	素因数分解
2892	$2^2 * 3 * 241$
6104	$2^3 * 7 * 109$
15872	$2^9 * 31 *$
170612	$2^2 * 13 * 17 * 193$
458144	$2^5 * 103 * 139$
476656	$2^4 * 31^3 *$
857312	$2^5 * 73 * 367$
1006496	$2^5 * 71 * 443$

11.9. $a = 8128p$ の特徴づけ．第4の完全数 8128

TABLE 9. $m = 8128{:}2 < a < 1,500,000$,* 擬素数解

a	素因数分解
48684	$2^2 * 3 * 4057$
112952	$2^3 * 7 * 2017$
353672	$2^3 * 11 * 4019$
396112	$2^4 * 19 * 1303$
1040384	$2^{13} * 127 *$
1243808	$2^5 * 47 * 827$

12. $a = mp$ の特徴づけ

TABLE 10. $a = mp$

a	素因数分解
m= 5	
125	5^3
m = 6	
24	$2^3 * 3$
54	$2 * 3^3$
304	$2^4 * 19$
m = 7	
343	7^3
m = 8	
128	2^7
m = 9	
243	3^5
m = 10	
40	$2^3 * 5$

TABLE 11. $a = mp$

a	素因数分解
$\mathrm{m} = 20$	
160	$2^5 * 5$
500	$2^2 * 5^3$
$\mathrm{m} = 21$	
189	$3^3 * 7$
1029	$3 * 7^3$
$\mathrm{m} = 22$	
88	$2^3 * 11$
2662	$2 * 11^3$
$\mathrm{m} = 23$	
12167	23^3
$\mathrm{m} = 24$	
216	$2^3 * 3^3$
384	$2^7 * 3$

TABLE 12. $a = mp$

a	素因数分解
$\mathrm{m} = 32$	
2048	$2^1 1$
m	33
297	$3^3 * 11$
3993	$3 * 11^3$
$\mathrm{m} = 34$	
136	$2^3 * 17$
9826	$2 * 17^3$
$\mathrm{m} = 35$	
875	$5^3 * 7$
1715	$5 * 7^3$
$\mathrm{m} = 36$	
288	$2^5 * 3^2$
972	$2^2 * 3^5$

TABLE 13. $2\varphi(a) - a = 1$,

a	素因数分解
3	3
15	$3 * 5$
255	$3 * 5 * 17$
65535	$3 * 5 * 17 * 257$

TABLE 14. $2\varphi(a) - a = 3$,

a	素因数分解
$w = 2\varphi(a) - a = 3$	
5	5
9	3^2
21	$3 * 7$
45	$3^2 * 5$
285	$3 * 5 * 19$
765	$3^2 * 5 * 17$

TABLE 15. $2\varphi(a) - a = 5$,

TABLE 16. $2\varphi(a) - a = 7$,

a	素因数分解
33	$3 * 11$
345	$3 * 5 * 23$
67065	$3 * 5 * 17 * 263$

TABLE 17. $2\varphi(a) - a = -3$,

a	素因数分解
195	$3 * 5 * 13$
5187	$3 * 7 * 13 * 19$

TABLE 18. $2\varphi(a) - a = -5$,

a	素因数分解
165	$3 * 5 * 11$
64005	$3 * 5 * 17 * 251$

TABLE 19. $2\varphi(a) - a = -6$,

a	素因数分解
18	$2 * 3^2$

TABLE 20. $2\varphi(a) - a = -9$,

a	素因数分解
105	$3 * 5 * 7$
585	$3^2 * 5 * 13$
15561	$3^2 * 7 * 13 * 19$

TABLE 21. $2\varphi(a) - a = -10$,

a	素因数分解
50	$2 * 5^2$