書泉グランデでの講義
高校生も十分わかる新しい数論研究
New Series, 第2期　予稿4
2016 年3月25日

飯高 茂

平成 28 年 3 月 30 日

1　copm

$s(a) \geq 2$ のとき余関数の値 $\mathrm{co}\varphi(a)$ を下から評価するとき, 平方根ではなくより直接な評価をした方がよい. たとえば, a の最大素因子 $\mathrm{Maxp}(a)$ 用いて下から評価してみよう.

$P = \mathrm{Maxp}(a)$ とおくとき,$a = P^j L$, $P > \mathrm{Maxp}(L)$, と書いてみる.

$\mathrm{copm}(a) = \mathrm{co}\varphi(a) - \mathrm{Maxp}(a)$ と新しい不変量を導入すると

$$\mathrm{copm}(a) = P^{j-1}(L + \overline{P}\rho_0) - P$$

$\mathrm{copm}(a) \leq 51$ の場合をすべて調べる.

1) $j \geq 2$.

下限の評価なので, $j = 2$ のとき計算する.

$$\mathrm{copm}(a) = P(L + \overline{P}\rho_0 - 1).$$

a). $\rho_0 = 1$. すなわち L は素数のとき

$\mathrm{copm}(a) = P(L + \overline{P}\rho_0 - 1) = P(L + P - 2)$.

$P = 3$ のときは $L = 2$ になり $\mathrm{copm}(a) = 9$.

$P = 5$ のときは $L = 3, 2$ になる. それに応じて $\mathrm{copm}(a) = 5(L + 3) = 30, 25$.

$P = 7$ のときは $L = 5, 3, 2$ になる. それに応じて $\mathrm{copm}(a) = 7(L + 5) = 70, 56, 49$.

b). $\rho_0 = 2$. すなわち $L = 4$.

$\mathrm{copm}(a) = P(2P + 1)$. $P = 7, 5, 3$ とすると, それに応じて $\mathrm{copm}(a) = 105, 55, 21$.

$j = 3, P = 3, \rho_0 = 1$. すなわち $a = 3^3 * 2$. すると, $\mathrm{co}\varphi(a) = 3^2 * 2^2 = 36, \mathrm{copm}(a) = 33$

$j = 4, P = 3, \rho_0 = 1$. すなわち $a = 3^4 * 2$. すると, $\mathrm{co}\varphi(a) = 3^3 * 2^2 = 68, \mathrm{copm}(a) = 65$

$j=3, P=5, L=2\rho_0=1$. すなわち $a=5^3*2$. すると, $\mathrm{co}\varphi(a)=5^2*6=150, \mathrm{copm}(a)=145$

2) $j=1$.

a). $\rho_0=1$. すなわち L は素数 P のとき

$L=P, P>P$: となる素数 P について $\mathrm{copm}(a)=P+P-1-P=P-1$. このとき解 $a=PP$ は無数にある.

b). $\rho_0=2$. このとき $L=4$.

$$\mathrm{copm}(a)=2P+2-P=P+2.$$

$P=47,43,41,37,31,23,11,7,5,3$ とすると, それに応じて $\mathrm{copm}(a)=49,45,43,39,33,25,13,9,7,5$.

c). $\rho_0=3$. このとき $L=9$.

$$\mathrm{copm}(a)=3P+6-P=2P+6.$$

$P=23,11,7,5$ とすると, それに応じて $\mathrm{copm}(a)=52,28,20,16$.

d). $\rho_0=4$. このとき $L=8,6$.

$L=8$,

$$\mathrm{copm}(a)=4P+4-P=3P+4.$$

$P=13,11,7,5,3$ とすると, それに応じて $\mathrm{copm}(a)=43,37,25,19,13$.

$L=6$,

$$\mathrm{copm}(a)=4P+2-P=3P+2.$$

$P=17,13,11,7,5$ とすると, それに応じて $\mathrm{copm}(a)=53,41,35,23,17$.

e). $\rho_0=5$. このとき $L=25$.

$$\mathrm{copm}(a)=5P+20-P=4P+20.$$

$P=11,7$ とすると, それに応じて $\mathrm{copm}(a)=64,48$.

f). $\rho_0=6$. このとき $L=10$.

$$\mathrm{copm}(a)=6P+4-P=5P+4.$$

$P=11,7$ とすると, それに応じて $\mathrm{copm}(a)=59,39$.

g). $\rho_0=7$. このとき $L=49, L=15$.

$$\mathrm{copm}(a)=7P+8-P=6P+8.$$

$P=11$ とすると, それに応じて $\mathrm{copm}(a)=108$.

$L=15$. $\rho_0=3+5-1=7$.

$$\mathrm{copm}(a) = 7P + 8 - P = 6P + 8.$$

$P = 7, 11$ に応じて $\mathrm{copm}(a) = 6P + 8 = 50, 74.$.

h). $\rho_0 = 8$. このとき $L = 12, 14, 16$.

$$\mathrm{copm}(a) = L + 8P - 8 - P = L + 7P - 8.$$

$L = 12$ とすると,$\mathrm{copm}(a) = 4 + 7P$.
$P = 5$ とすると,$\mathrm{copm}(a) = 39$

$L = 14$ とすると,$\mathrm{copm}(a) = 6 + 7P$.
$P = 11$ とすると,$\mathrm{copm}(a) = 83$

$L = 16$ とすると,$\mathrm{copm}(a) = 8 + 7P$.
$P = 3, 5, 7$ とすると, それに応じて $\mathrm{copm}(a) = 29, 43, 57$.
i). $\rho_0 = 9$. このとき $L = 21, 27$.
$\mathrm{copm}(a) = 8P - 9 + L$.
$L = 21$ とすると, $\mathrm{copm}(a) = 12 + 8P$. $P = 11$ なら $\mathrm{copm}(a) = 100$.
$L = 27$ とすると, $\mathrm{copm}(a) = 27 + 8P$. $P = 5$ なら $\mathrm{copm}(a) = 67$.

$$\mathrm{copm}(a) = L + 8P - 8 - P = L + 7P - 8.$$

j). $\rho_0 \geq 12$ のとき copm が最小になるのは, $P = 3, j = 1, L = 2^e e \geq 5$ になるに違いない.
$\mathrm{copm}(a) = 2^{2+1} - 3 \geq 2^6 - 3 = 64 - 3 = 61$.

2 cosm

$a = P^j$

$$\begin{aligned}
\mathrm{co}\sigma(a) =& \frac{P^{j+1} - 1}{\overline{P}} - \frac{P^{j+1}}{P} \\
=& \frac{P^{j+2} - P - P^{j+1}(P-1)}{\overline{P}P} \\
=& \frac{P^{j+1} - 1}{\overline{P}} \\
=& \sigma(P^j)
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathrm{co}\sigma(P^j) = \sigma(P^j).$$

$a = PQ, p > Q$(: 素数) のとき

$$\mathrm{cosm}(a) = P + Q + 1$$

$P = \mathrm{Maxp}(a)$ とおくとき,$a = P^j L$, $P > \mathrm{Maxp}(L)$, と書いてみる.

$$\overline{P} P \mathrm{co}\sigma(a) = P(P^{j+1} - 1)\sigma(L) + P^{j+1} L \overline{P}.$$

$q_0 = (\sigma(L) - L)$ とおくとき次の公式が成り立つ.

$$\mathrm{co}\sigma(a) = \frac{(P^j - 1)L + (P^{j+1} - 1)q_0}{\overline{P}}$$

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{\sigma(P^{j-1})\sigma(P^j)}{P^j} q_0}$$

$$\mathrm{co}\sigma(a) > 2\mu_0\sqrt{a}.$$

$q_0 = 3$,
 $a = 6$, $[2, 3]$
$q_0 = 3$,
 $a = 2p$, $[2, p], p > 2$
$q_0 = 4$
 $a = 15$, $[3, 5]$
$q_0 = 4$
 $a = 3p$, $[3, p], p > 3$
$q_0 = 6$
 $a = 35$, $[5, 7]$
$q_0 = 6$
 $a = 5p$, $[5, p], p > 5$
$q_0 = 8$
 $a = 7p$, $[7, p], p > 7$
$q_0 = 17$
 $a = 20$, $[2^2, 5]$
$q_0 = 18$
 $a = 18$, $[2, 3^2]$
$q_0 = 21$
 $a = 28$, $[2^2, 7]$

3 cosm,copm 数表

表 1: 合成数

n	factor	$s(n)$	φ	σ	maxp	coφ	coσ	copm	cosm
4	$[2^2]$	1	2	7	2	2	3	0	1
9	$[3^2]$	1	6	13	3	3	4	0	1
6	$[2,3]$	2	2	12	3	4	6	1	3
8	$[2^3]$	1	4	15	2	4	7	2	5
25	$[5^2]$	1	20	31	5	5	6	0	1
10	$[2,5]$	2	4	18	5	6	8	1	3
15	$[3,5]$	2	8	24	5	7	9	2	4
49	$[7^2]$	1	42	57	7	7	8	0	1
12	$[2^2,3]$	2	4	28	3	8	16	5	13
14	$[2,7]$	2	6	24	7	8	10	1	3
16	$[2^4]$	1	8	31	2	8	15	6	13
21	$[3,7]$	2	12	32	7	9	11	2	4
27	$[3^3]$	1	18	40	3	9	13	6	10
35	$[5,7]$	2	24	48	7	11	13	4	6
121	$[11^2]$	1	110	133	11	11	12	0	1
18	$[2,3^2]$	2	6	39	3	12	21	9	18
20	$[2^2,5]$	2	8	42	5	12	22	7	17
22	$[2,11]$	2	10	36	11	12	14	1	3
33	$[3,11]$	2	20	48	11	13	15	2	4
169	$[13^2]$	1	156	183	13	13	14	0	1
26	$[2,13]$	2	12	42	13	14	16	1	3
39	$[3,13]$	2	24	56	13	15	17	2	4
55	$[5,11]$	2	40	72	11	15	17	4	6
24	$[2^3,3]$	2	8	60	3	16	36	13	33
28	$[2^2,7]$	2	12	56	7	16	28	9	21
32	$[2^5]$	1	16	63	2	16	31	14	29
65	$[5,13]$	2	48	84	13	17	19	4	6
77	$[7,11]$	2	60	96	11	17	19	6	8
289	$[17^2]$	1	272	307	17	17	18	0	1
34	$[2,17]$	2	16	54	17	18	20	1	3

表 2: 合成数

n	factor	$s(n)$	φ	σ	maxp	coφ	coσ	copm	cosm
51	$[3, 17]$	2	32	72	17	19	21	2	4
91	$[7, 13]$	2	72	112	13	19	21	6	8
361	$[19^2]$	1	342	381	19	19	20	0	1
38	$[2, 19]$	2	18	60	19	20	22	1	3
45	$[3^2, 5]$	2	24	78	5	21	33	16	28
57	$[3, 19]$	2	36	80	19	21	23	2	4
85	$[5, 17]$	2	64	108	17	21	23	4	6
30	$[2, 3, 5]$	3	8	72	5	22	42	17	37
95	$[5, 19]$	2	72	120	19	23	25	4	6
119	$[7, 17]$	2	96	144	17	23	25	6	8
143	$[11, 13]$	2	120	168	13	23	25	10	12
529	$[23^2]$	1	506	553	23	23	24	0	1
36	$[2^2, 3^2]$	2	12	91	3	24	55	21	52
40	$[2^3, 5]$	2	16	90	5	24	50	19	45
44	$[2^2, 11]$	2	20	84	11	24	40	13	29
46	$[2, 23]$	2	22	72	23	24	26	1	3
69	$[3, 23]$	2	44	96	23	25	27	2	4
125	$[5^3]$	1	100	156	5	25	31	20	26
133	$[7, 19]$	2	108	160	19	25	27	6	8
63	$[3^2, 7]$	2	36	104	7	27	41	20	34
81	$[3^4]$	1	54	121	3	27	40	24	37
115	$[5, 23]$	2	88	144	23	27	29	4	6
187	$[11, 17]$	2	160	216	17	27	29	10	12
52	$[2^2, 13]$	2	24	98	13	28	46	15	33
161	$[7, 23]$	2	132	192	23	29	31	6	8
209	$[11, 19]$	2	180	240	19	29	31	10	12
221	$[13, 17]$	2	192	252	17	29	31	12	14
841	$[29^2]$	1	812	871	29	29	30	0	1

表 3: 合成数

n	factor	$s(n)$	φ	σ	maxp	coφ	coσ	copm	cosm
42	$[2,3,7]$	3	12	96	7	30	54	23	47
50	$[2,5^2]$	2	20	93	5	30	43	25	38
58	$[2,29]$	2	28	90	29	30	32	1	3
87	$[3,29]$	2	56	120	29	31	33	2	4
247	$[13,19]$	2	216	280	19	31	33	12	14
961	$[31^2]$	1	930	993	31	31	32	0	1
48	$[2^4,3]$	2	16	124	3	32	76	29	73
56	$[2^3,7]$	2	24	120	7	32	64	25	57
62	$[2,31]$	2	30	96	31	32	34	1	3
64	$[2^6]$	1	32	127	2	32	63	30	61
93	$[3,31]$	2	60	128	31	33	35	2	4
145	$[5,29]$	2	112	180	29	33	35	4	6
253	$[11,23]$	2	220	288	23	33	35	10	12
75	$[3,5^2]$	2	40	124	5	35	49	30	44
155	$[5,31]$	2	120	192	31	35	37	4	6
203	$[7,29]$	2	168	240	29	35	37	6	8
299	$[13,23]$	2	264	336	23	35	37	12	14
323	$[17,19]$	2	288	360	19	35	37	16	18
54	$[2,3^3]$	2	18	120	3	36	66	33	63
68	$[2^2,17]$	2	32	126	17	36	58	19	41
217	$[7,31]$	2	180	256	31	37	39	6	8
1369	$[37^2]$	1	1332	1407	37	37	38	0	1
74	$[2,37]$	2	36	114	37	38	40	1	3
99	$[3^2,11]$	2	60	156	11	39	57	28	46
111	$[3,37]$	2	72	152	37	39	41	2	4
319	$[11,29]$	2	280	360	29	39	41	10	12
391	$[17,23]$	2	352	432	23	39	41	16	18
76	$[2^2,19]$	2	36	140	19	40	64	21	45
185	$[5,37]$	2	144	228	37	41	43	4	6

表 4: 合成数

n	factor	$s(n)$	φ	σ	maxp	coφ	coσ	copm	cosm
341	$[11, 31]$	2	300	384	31	41	43	10	12
377	$[13, 29]$	2	336	420	29	41	43	12	14
437	$[19, 23]$	2	396	480	23	41	43	18	20
1681	$[41^2]$	1	1640	1723	41	41	42	0	1
82	$[2, 41]$	2	40	126	41	42	44	1	3
123	$[3, 41]$	2	80	168	41	43	45	2	4
259	$[7, 37]$	2	216	304	37	43	45	6	8
403	$[13, 31]$	2	360	448	31	43	45	12	14
1849	$[43^2]$	1	1806	1893	43	43	44	0	1
60	$[2^2, 3, 5]$	3	16	168	5	44	108	39	103
86	$[2, 43]$	2	42	132	43	44	46	1	3
117	$[3^2, 13]$	2	72	182	13	45	65	32	52
129	$[3, 43]$	2	84	176	43	45	47	2	4
205	$[5, 41]$	2	160	252	41	45	47	4	6
493	$[17, 29]$	2	448	540	29	45	47	16	18
66	$[2, 3, 11]$	3	20	144	11	46	78	35	67
70	$[2, 5, 7]$	3	24	144	7	46	74	39	67
215	$[5, 43]$	2	168	264	43	47	49	4	6
287	$[7, 41]$	2	240	336	41	47	49	6	8
407	$[11, 37]$	2	360	456	37	47	49	10	12
527	$[17, 31]$	2	480	576	31	47	49	16	18
551	$[19, 29]$	2	504	600	29	47	49	18	20
2209	$[47^2]$	1	2162	2257	47	47	48	0	1
72	$[2^3, 3^2]$	2	24	195	3	48	123	45	120
80	$[2^4, 5]$	2	32	186	5	48	106	43	101
88	$[2^3, 11]$	2	40	180	11	48	92	37	81
92	$[2^2, 23]$	2	44	168	23	48	76	25	53
94	$[2, 47]$	2	46	144	47	48	50	1	3

表 5: 合成数

n	factor	$s(n)$	φ	σ	maxp	coφ	coσ	copm	cosm
141	$[3, 47]$	2	92	192	47	49	51	2	4
301	$[7, 43]$	2	252	352	43	49	51	6	8
343	$[7^3]$	1	294	400	7	49	57	42	50
481	$[13, 37]$	2	432	532	37	49	51	12	14
589	$[19, 31]$	2	540	640	31	49	51	18	20
235	$[5, 47]$	2	184	288	47	51	53	4	6
451	$[11, 41]$	2	400	504	41	51	53	10	12
667	$[23, 29]$	2	616	720	29	51	53	22	24

表 6: copm ($s(a) \geq 2$)

n	factor	$s(n)$	φ	σ	maxp	copm	cosm
6	$[2, 3]$	2	2	12	3	1	3
$2p$	$[2, p]$	2			p	1	3
15	$[3, 5]$	2	8	24	5	2	4
$3p$	$[3, p]$	2			p	2	4
35	$[5, 7]$	2	24	48	7	4	6
$5p$	$[5, p]$	2			p	4	4
3095	$[5, 619]$	2	2472	3720	619	4	6
12	$[2^2, 3]$	2	4	28	3	5	13
77	$[7, 11]$	2	60	96	11	6	8
$7p$	$[7, p]$	2			p	6	8
3073	$[7, 439]$	2	2628	3520	439	6	8
20	$[2^2, 5]$	2	8	42	5	7	17
18	$[2, 3^2]$	2	6	39	3	9	18
28	$[2^2, 7]$	2	12	56	7	9	21
143	$[11, 13]$	2	120	168	13	10	12

表 7: copm ($s(a) \geq 2$

n	factor	$s(n)$	φ	σ	maxp	copm	cosm
$11p$	$[11, p]$	2			p	10	12
3091	$[11, 281]$	2	2800	3384	281	10	12
221	$[13, 17]$	2	192	252	17	12	14
3029	$[13, 233]$	2	2784	3276	233	12	14
24	$[2^3, 3]$	2	8	60	3	13	33
44	$[2^2, 11]$	2	20	84	11	13	29
52	$[2^2, 13]$	2	24	98	13	15	33
45	$[3^2, 5]$	2	24	78	5	16	28
323	$[17, 19]$	2	288	360	19	16	18
$17p$	$[17, p]$	2			p	16	18
3077	$[17, 181]$	2	2880	3276	181	16	18
30	$[2, 3, 5]$	3	8	72	5	17	37
437	$[19, 23]$	2	396	480	23	18	20
$19p$	$[19, p]$	2			p	18	20
2983	$[19, 157]$	2	2808	3160	157	18	20
3097	$[19, 163]$	2	2916	3280	163	18	20
40	$[2^3, 5]$	2	16	90	5	19	45
68	$[2^2, 17]$	2	32	126	17	19	41
63	$[3^2, 7]$	2	36	104	7	20	34
36	$[2^2, 3^2]$	2	12	91	3	21	52
76	$[2^2, 19]$	2	36	140	19	21	45

表 8: copm ($s(a) \geq 2$

n	factor	$s(n)$	φ	σ	maxp	copm	cosm
667	$[23, 29]$	2	616	720	29	22	24
$23p$	$[23, p]$	2			p	22	24
3013	$[23, 131]$	2	2860	3168	131	22	24
42	$[2, 3, 7]$	3	12	96	7	23	47
50	$[2, 5^2]$	2	20	93	5	25	38
56	$[2^3, 7]$	2	24	120	7	25	57
92	$[2^2, 23]$	2	44	168	23	25	53
99	$[3^2, 11]$	2	60	156	11	28	46
899	$[29, 31]$	2	840	960	31	28	30
$29p$	$[29, p]$	2			p	28	30
2987	$[29, 103]$	2	2856	3120	103	28	30
48	$[2^4, 3]$	2	16	124	3	29	73
75	$[3, 5^2]$	2	40	124	5	30	44
1147	$[31, 37]$	2	1080	1216	37	30	32
$31p$	$[31, p]$	2			p	30	32
3007	$[31, 97]$	2	2880	3136	97	30	32
116	$[2^2, 29]$	2	56	210	29	31	65
117	$[3^2, 13]$	2	72	182	13	32	52

表 9: copm ($s(a) \geq 2$

n	factor	$s(n)$	φ	σ	maxp	copm	cosm
54	$[2, 3^3]$	2	18	120	3	33	63
124	$[2^2, 31]$	2	60	224	31	33	69
66	$[2, 3, 11]$	3	20	144	11	35	67
1517	$[37, 41]$	2	1440	1596	41	36	38
$37p$	$[37, p]$	2			p	36	38
2923	$[37, 79]$	2	2808	3040	79	36	38
3071	$[37, 83]$	2	2952	3192	83	36	38
88	$[2^3, 11]$	2	40	180	11	37	81
60	$[2^2, 3, 5]$	3	16	168	5	39	103
70	$[2, 5, 7]$	3	24	144	7	39	67
148	$[2^2, 37]$	2	72	266	37	39	81
153	$[3^2, 17]$	2	96	234	17	40	64
2993	$[41, 73]$	2	2880	3108	73	40	42
1763	$[41, 43]$	2	1680	1848	43	40	42
$41p$	$[41, p]$	2			p	40	42

表 10: copm $(s(a) \geq 2$

n	factor	$s(n)$	φ	σ	maxp	copm	cosm
78	$[2, 3, 13]$	3	24	168	13	41	77
2881	$[43, 67]$	2	2772	2992	67	42	44
$43p$	$[43, p]$	2			p	42	44
3053	$[43, 71]$	2	2940	3168	71	42	44
80	$[2^4, 5]$	2	32	186	5	43	101
104	$[2^3, 13]$	2	48	210	13	43	93
164	$[2^2, 41]$	2	80	294	41	43	89
171	$[3^2, 19]$	2	108	260	19	44	70
72	$[2^3, 3^2]$	2	24	195	3	45	120
172	$[2^2, 43]$	2	84	308	43	45	93
2491	$[47, 53]$	2	2392	2592	53	46	48
$47p$	$[47, p]$	2			p	46	48
2867	$[47, 61]$	2	2760	2976	61	46	48
175	$[5^2, 7]$	2	120	248	7	48	66
98	$[2, 7^2]$	2	42	171	7	49	66
188	$[2^2, 47]$	2	92	336	47	49	101
105	$[3, 5, 7]$	3	48	192	7	50	80

4 φ 完全数

究極の完全数の定義を参考にユークリッド関数の代わりにオイラー関数を使って類似した概念を定義しよう.

$\varphi(P^e), e > 1$ は合成数なので完全数の定義をそのままは使えない. そこで, 1 を加えて $\varphi(P^e)+1$ が素数 q になるとき $a = P^e q$ をもって P を底とする φ **完全数**と定義する.

表 11: $P = 2$ を底とする φ 完全数

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
2	12	$2^2 * 3$	4
3	40	$2^3 * 5$	16
5	544	$2^5 * 17$	256
9	131584	$2^9 * 257$	65536
17	8590065664	$2^{17} * 65537$	4294967296

$e > 4$ なら $e \equiv 1 \mod 4; q \equiv 7; a \equiv 4\ ; \varphi(a) \equiv 6 \bmod 10$ が成り立つ.

5 つのフェルマー素数に応じて 5 つの φ 完全数ができた. これらはフェルマー φ 完全数 と呼ぶ方がよい. 後で一般化されたオイラー φ 完全数がでてくる.

5 φ 弱完全数

$k > 0$ に関して,$e = 1 + 4k, q_k = 2^{4k} + 1, a_k = 2^e q_k$ とおき,
a_k を 2 を底とする φ 弱完全数 という.

表 12: 2 を底とする φ 弱完全数, 法を 100

k	e	q_k	a_k
1	5	17	44
2	9	57	84
3	13	97	24
4	17	37	64
5	21	77	4
6	25	17	44
7	29	57	84
8	33	97	24
9	37	37	64

φ 弱完全数 の末尾 1 桁は 4
φ 弱完全数 の末尾 2 桁は 44,84,24,64,04 が繰り返される
$q = 2^{4k} + 1$ の末尾 1 桁は 7
$q = 2^{4k} + 1$ の末尾 2 桁は 17,57,97,37,77 が繰り返される

5.1 3 を底とするとき

$$q = 2 * 3^{e-1} + 1, a = 3^e q.$$

表 13: $P = 3$ を底とする φ 完全数

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
2	63	$3^2 * 7$	36
3	513	$3^3 * 19$	324
5	39609	$3^5 * 163$	26244
6	355023	$3^6 * 487$	236196
7	3190833	$3^7 * 1459$	2125764
10	2324581983	$3^{10} * 39367$	1549681956
17	11118121262251209	$3^{17} * 86093443$	7412080755407364
18	100063090585419903	$3^{18} * 258280327$	66708726798666276
31	A	$3^{31} * 411782264189299$	$--$
55	B	$3^{55} * 116299474006080119380780339$	$--$
58	C	$3^{58} * 3140085798164163223281069127$	$--$
61	D	$3^{61} * 84782316550432407028588866403$	$--$
66	E	$3^{66} * 20602102921755074907947094535687$	$--$

$A = 254346949651297838759162883153,$
$B = 202883514811363580575813290088026580303113437822618 73,$
$C = 147902082297484050239767887249537915756946039093072 09503,$
$D = 107820617994865872624790789771848037132145023757699 89938009.$
$E = 636669967197883491262127134516306911101006058595257 340533039423$

- $e \equiv 2 \bmod 4$ のとき $q \equiv 7, a \equiv 3 \bmod 10.$
- $e \equiv 1 \bmod 4$ のとき $q \equiv 3, a \equiv 9 \bmod 10.$
- $e \equiv 3 \bmod 4$ のとき $q \equiv 9, a \equiv 3 \bmod 10.$

Proof.
$e \equiv 2 \bmod 4.$
$e = 4k + 2$ となるので, $q = 2(3^{e-1}) + 1 \equiv 1 + 1 = 2 \bmod 5.$ よって $q \equiv 2 + 5 = 7 \bmod 10.$
$a = 3^e q \equiv -4 \times 7 \equiv 3 \bmod 5.$ a は奇数なので $a \equiv 3 \bmod 10.$

$e \equiv 1 \bmod 4.$
$e = 4k + 1$ となるので, $q = 2(3^{e-1}) + 1 \equiv 2 + 1 = 3 \bmod 5.$ よって $q \equiv 3 \bmod 10.$
$a = 3^e q \equiv 3 \times 3 \equiv -1 \bmod 5.$ a は奇数なので $a \equiv 9 \bmod 10.$

$e \equiv 3 \bmod 4.$

$e = 4k + 3$ となるので, $q = 2(3^{e-1}) + 1 \equiv -2 + 1 = 4 \bmod 5$. よって $q \equiv 9 \bmod 10$.
$a = 3^e q \equiv 2 \times -1 \equiv 3 \bmod 5$. a は奇数なので $a \equiv 3 \bmod 10$.

6 φ 完全数の平行移動

m だけ平行移動した φ 完全数の定義は次の通り.

$\varphi(P^e)+1+m, e>1$ が素数 q になるとき $a=P^e q, e \geq 2$ を (P を底とする) m だけ平行移動した φ 完全数の定義とする.

特にこれを満たす a を (φ, m) 完全数とも言う.

6.1 $[P=2, m=2]$

表 14: $P=2, m=2$

$e \bmod 4$	e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
2	2	20	$2^2 * 5$	8
3	3	56	$2^3 * 7$	24
0	4	176	$2^4 * 11$	80
1	5	608	$2^5 * 19$	288
3	7	8576	$2^7 * 67$	4224
0	8	33536	$2^8 * 131$	16640
1	13	33579008	$2^{13} * 4099$	16785408
0	16	2147680256	$2^{16} * 32771$	1073807360
1	17	8590327808	$2^{17} * 65539$	$--$
3	19	137440526336	$2^{19} * 262147$	$--$
1	29	144115189686468608	$2^{29} * 268435459$	$--$

7 φ 完全数の平行移動の方程式

$q=\varphi(P^e)+1+m, e>1$ が素数になるとき $a=P^e q$ とすると,
m が負の場合もいれているので, $q>P$ を仮定する.

$$\begin{aligned}\varphi(a)=\varphi(P^e q) &= P^{e-1}\overline{P}\overline{q} \\ &= P^e\overline{P}(q-1)/P \\ &= P^e q\overline{P}/P - P^{e-1}\overline{P} \\ &= \overline{P}a/P-(q-1-m).\end{aligned}$$

かくして $\mathrm{Maxp}(a)=q$ に注意し

$$\varphi(a)=\frac{\overline{P}}{P}a-\overline{\mathrm{Maxp}(a)}+m. \tag{1}$$

が得られた．分母を払った次の式もよく使われる．

$$P\varphi(a)=\overline{P}a-P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}+Pm. \tag{2}$$

が得られた．

これが m だけ平行移動した φ 完全数の方程式 $(*)$ である．

φ 完全数の方程式 $(*)$ で定義された数は必ずしも φ 完全数になるわけではない．

φ 完全数においては $q=\varphi(P^e)+1+m$ が素数になると仮定されているので $1+m$ は P で割れない．

φ 完全数の方程式 $(*)$ 自身を扱うとき $1+m$ は P で割れない, などのことにこだわらない．実際に $m=P-1$ の場合が重要な結果を与えるのである．

7.1 φ 完全数の方程式 $(*)$ の解

8 微小解

$m=0$ のとき $P=Maxp(a)$ とおくと $a=Pq(P>q:)$ 素数, は

$$\varphi(a)=\frac{\overline{P}a}{P}-\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$$

の解になることは一般的に証明できる.

実際, $\varphi(a)=\overline{P}\overline{q}$, $\mathrm{Maxp}(a)=P$ によって

$$\frac{\overline{P}a}{P}-\overline{\mathrm{Maxp}(a)}=\overline{P}q-\overline{P}=\overline{P}\overline{q}=\varphi(a).$$

よって $\varphi(a)=\frac{\overline{P}a}{P}-\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$.

$m=0$ のときの解 $a=Pq(P>q:)$ 素数) を微小解という. 微小解は φ 完全数の方程式 $(*)$ に特有の解である.

9 定理と証明

定理 1 $m\geq 0$ のとき

$$P\varphi(a)=\overline{P}a+Pm-P\overline{Maxp(a)}$$

を満たす解は

1. $m=0$ のとき微小解 $a=Pq(P>q)$ となる.
2. $m=P-1$ のときの微小解 $a=P^e$.
3. $e>1$ のとき a は $(\varphi,m)-$ 完全数
4. $e=1$ のとき $a=Pq$, $q=P+m$ は素数.

Proof.

a は定義式より P の倍数なので $a=P^eL\quad(P,L$ は互いに素) と書ける. よって次式を満たす:

$$P\varphi(a)=P^e\overline{P}\varphi(L),\overline{P}a=P^e\overline{P}L.$$

$L=1$ のとき $a=P^e$, $P\varphi(a)=P^e\overline{P}=\overline{P}a,\mathrm{Maxp}(a)=P$ なので

$$P\varphi(a)=P^e\overline{P},\overline{P}a+Pm-P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}=\overline{P}P^e+Pm-P\overline{P}$$

により $Pm-P\overline{P}=0$. P で除して,$m=P-1$.

$L\geq 2$ のとき $a=P^eL$.

$P\varphi(a)=P^e\overline{P}\varphi(L),\overline{P}a=P^e\overline{P}L$ なので

$$P\varphi(a) - \overline{P}a = -P^e\overline{P}(L - \varphi(L)) = Pm - P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}.$$

P で除して

$$\overline{\mathrm{Maxp}(a)} = P^{e-1}\overline{P}(L - \varphi(L)) + m.$$

(1) L が素数でないとき.

$L - \varphi(L) \geq \mathrm{Maxp}(L)$ を用いて

$$\overline{\mathrm{Maxp}(a)} = P^{e-1}\overline{P}(L - \varphi(L)) + m \geq P^{e-1}\overline{P}(\mathrm{Maxp}(L)).$$

(a) $P > \mathrm{Maxp}(L)$ の場合,$\mathrm{Maxp}(a) = P, \mathrm{Maxp}(L) \geq 2.$

$$\overline{P} = P - 1 = \overline{\mathrm{Maxp}(a)} \geq P^{e-1}\overline{P}(\mathrm{Maxp}(L)) \geq 2\overline{P}.$$

(b) $P < \mathrm{Maxp}(L)$ の場合,$\mathrm{Maxp}(a) = \mathrm{Maxp}(L) \geq 2.$

$$\overline{\mathrm{Maxp}(L)} = \overline{\mathrm{Maxp}(a)} \geq P^{e-1}\overline{P}(\mathrm{Maxp}(L)) \geq \mathrm{Maxp}(L).$$

かくて矛盾.

(2) L が素数 q のとき.

$m \geq 0$ なので

$$\overline{\mathrm{Maxp}(a)} = P^{e-1}\overline{P}(L - \varphi(L)) + m = P^{e-1}\overline{P}(q - \varphi(q)) + m \geq P^{e-1}\overline{P}.$$

$a = P^e q$ なので $\mathrm{Maxp}(a) = P$ または $\mathrm{Maxp}(a) = \mathrm{Maxp}(q) = q.$

(a) $\mathrm{Maxp}(a) = P$ とすると,

$$\overline{P} = \overline{\mathrm{Maxp}(a)} = P^{e-1}\overline{P} + m.$$

これより, $e = 1, m = 0, P > q$. $a = Pq$ は微小解.

(b) $\mathrm{Maxp}(a) = q$ とすると,

$$\overline{q} = \overline{\mathrm{Maxp}(a)} = P^{e-1}\overline{P} + m.$$

これより, $q = P^{e-1}\overline{P} + 1 + m$. $e > 1$ のとき a は $(\varphi, m)-$ 完全数.

$e = 1$ のとき $q = P + m, a = Pq.$

このようにして, $m \geq 0$ の場合にはオイラーの φ 完全数の基本問題は解決した.

しかし解決しても問題がなくなって困る. そこで　$m < 0$ の場合について $P = 2, 3, 5$ に限って詳しく調べることにした. そこには思いのほか豊穣の大地が広がっていた.

10　$P=2$ の場合

$$2\varphi(a)-a=2m+2-2\mathrm{Maxp}(a).$$

a : 偶数なので $a=2^eL, L$:奇数 $q=mboxMaxp(a)$ とおけば

$$2\varphi(a)-a=2^e\varphi(L)-2^eL=-2^e\mathrm{co}\varphi(L)=2m+2-2q$$

これより

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q-1-m.$$

$m=-S$ とおくとき, q : 奇数なので
1. S : 奇数 ならば $q-1+S$ は奇数. よって $e=1$.
2. S : 偶数なら $e\geq 2$.

11　$P=2, m=-S$: 奇素数

S : 奇素数とする. $S<p$ を満たす素数 p をとり $a=2Sp$ とする. これが φ 完全数になる. 実際、

$$2\varphi(a)-a+2\mathrm{Maxp}(a)-1=2\overline{S}\overline{p}-2Sp+2p-2$$
$$=2(2-p-S)-2p+2=-2S$$

よって
$$2\varphi(a)=a-2\mathrm{Maxp}(a)-1-2S.$$

逆にこの式を満たすとき, a は偶数. そこでいつものように $a=2^eL, L$:奇数, とおけば $2^e\varphi(L)=2^eLa-2\overline{\mathrm{Maxp}(a)}-2S$ により

$$2^{e-1}co\varphi(L)=\mathrm{Maxp}(L)-1+S.$$

$e>1$ とすると, 左辺は偶数. $L>2$ とすると $\mathrm{Maxp}(L)-1+S$ は奇数. よって, $e=1$.

$$co\varphi(L)=\mathrm{Maxp}(L)-1+S.$$

L : 素数なら $co\varphi(L)=1=\mathrm{Maxp}(L)-1+S$. これは矛盾.
L : 素数でないなら $co\varphi(L)-\mathrm{Maxp}(L)>0$.
かくて
$$co\varphi(L)-\mathrm{Maxp}(L)=-1+S.$$

新しい不変量 $\mathrm{copm1}(L)=co\varphi(L)-\mathrm{Maxp}(L)+1$ を新たに導入すると $\mathrm{copm1}(L)=S$ となる.
$copm(a)$ の数表をみながら,$\mathrm{copm1}(L)$ 値が素数になるものを抜き出す:

$S=3$ なら $\mathrm{copm1}=3$. このとき $L=3p$ となるので, $a=6p$; 通常解.
$S=5$ なら $\mathrm{copm1}=5$. このとき $L=5p$ となるので, $a=10p$. 通常解.

$S = 7$ なら $\mathrm{copm1} = 7$. このとき $L = 3^3, a = 2 \times 3^3$. または $L = 7p$ となるので, $a = 14p$. 通常解.

$S = 11$ なら $\mathrm{copm1} = 11$. このとき $L = 11p$ となるので, $a = 22p$. 通常解.

$S = 13$ なら $\mathrm{copm1} = 13$. このとき $L = 13p$ となるので, $a = 26p$.

$S = 17$ なら $\mathrm{copm1} = 17$. このとき $L = 45 = [3^2, 5], a = 90$:非通常解. または $L = 17p$ となるので, $a = 34p$. 通常解.

$S = 31$ なら $\mathrm{copm1} = 31$. このとき $L = 75 = [3, 5^2], a = 150$:非通常解. または $L = 31p$ となるので, $a = 62p$. 通常解

$S = 41$ なら $\mathrm{copm1} = 41$. このとき $L = 343 = [3^2, 17], a = 486$:非通常解. または $L = 41p$ となるので, $a = 2 * 41p$. 通常解

$S = 43$ なら $\mathrm{copm1} = 43$. このとき $L = 343 = [7^3], a = 486$:非通常解. または $L = 43p$ となるので, $a = 2 * 43p$. 通常解

12 $P=2, S=-m$: 偶数

表 15: $P=2, m=-2$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
24	$[2^3, 3]$	8
112	$[2^4, 7]$	48
1984	$[2^6, 31]$	960
32512	$[2^8, 127]$	16128

表 16: $P=2, m=-2; q=2^{e+1}-1$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	24	$2^3 * 3$	8
4	112	$2^4 * 7$	48
6	1984	$2^6 * 31$	960
8	32512	$2^8 * 127$	16128
14	134201344	$2^{14} * 8191$	67092480
18	34359476224	$2^{18} * 131071$	17179607040
20	549754765312	$2^{20} * 524287$	274876858368

表 17: $P = 2, m = -4$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
36	$[2^2, 3^2]$	12
80	$[2^4, 5]$	32
416	$[2^5, 13]$	192
1856	$[2^6, 29]$	896
7808	$[2^7, 61]$	3840

表 18: $P = 2, m = -4; q = 2^{e+1} - 3$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	8	2^3	4
4	80	$2^4 * 5$	32
5	416	$2^5 * 13$	192
6	1856	$2^6 * 29$	896
7	7808	$2^7 * 61$	3840
10	521216	$2^{10} * 509$	260096
11	2091008	$2^{11} * 1021$	1044480
13	33529856	$2^{13} * 4093$	16760832
15	536772608	$2^{15} * 16381$	268369920
21	2199016964096	$2^{21} * 1048573$	1099507433472

$a = 36 = 2^2 * 3^2$ のみが非通常解. それ以外は $a = 2^e q$ とかける解.

表 19: $P = 2, m = -6$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
48	$[2^4, 3]$	16
100	$[2^2, 5^2]$	40
352	$[2^5, 11]$	160
7552	$[2^7, 59]$	3712
128512	$[2^9, 251]$	64000

表 20: $P = 2, m = -6; q = 2^{e+1} - 5$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
4	48	$2^4 * 3$	16
5	352	$2^5 * 11$	160
7	7552	$2^7 * 59$	3712
9	128512	$2^9 * 251$	64000
11	2086912	$2^{11} * 1019$	1042432
13	33513472	$2^{13} * 4091$	16752640
19	137436332032	$2^{19} * 262139$	68717903872

$a = 100 = 2^2 * 5^2$ のみが非通常解. それ以外は $a = 2^e q$ とかける解.

表 21: $P=2, m=-8$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
196	$[2^2, 7^2]$	84

表 22: $P=2, m=-8; q=2^{e+1}-7$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
40	604462909799618005958656	$2^40 * 549755813881$	X

X=302231454899259247165440

表 23: $P = 2, m = -10$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
60	$[2^2, 3, 5]$	16
72	$[2^3, 3^2]$	24
224	$[2^5, 7]$	96
1472	$[2^6, 23]$	704

表 24: $P = 2, m = -14; q = 2^{e+1} - 13$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	8	2^3	4
4	80	$2^4 * 5$	32
5	416	$2^5 * 13$	192
6	1856	$2^6 * 29$	896
7	7808	$2^7 * 61$	3840
10	521216	$2^{10} * 509$	260096
11	2091008	$2^{11} * 1021$	1044480
13	33529856	$2^{13} * 4093$	16760832
15	536772608	$2^{15} * 16381$	268369920
21	2199016964096	$2^{21} * 1048573$	1099507433472

表 25: $P = 2, m = -10; q = 2^{e+1} - 9$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
5	224	$2^5 * 7$	96
6	1472	$2^6 * 23$	704
10	515072	$2^10 * 503$	257024
12	8351744	$2^12 * 2039$	4173824
18	34357379072	$2^18 * 131063$	17178558464

表 26: $P = 2, m = -12; q = 2^{e+1} - 11$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
5	160	$2^5 * 5$	64
7	6784	$2^7 * 53$	3328
11	2074624	$2^11 * 1013$	1036288
19	137433186304	$2^19 * 262133$	68716331008

表 27: $P = 2, m = -14; q = 2^{e+1} - 13$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
5	96	$2^5 * 3$	32
6	1216	$2^6 * 19$	576
10	510976	$2^10 * 499$	254976
14	134004736	$2^14 * 8179$	66994176
18	34356330496	$2^18 * 131059$	17178034176

表 28: $P = 2, m = -16; q = 2^{e+1} - 15$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
5	32	2^5	16
6	1088	$2^6 * 17$	512
8	28928	$2^8 * 113$	14336
9	123392	$2^9 * 241$	61440
11	2066432	$2^11 * 1009$	1032192
15	536379392	$2^15 * 16369$	268173312
17	8587968512	$2^17 * 6552$	4293918720

表 29: $P = 2, m = -12$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
84	$[2^2, 3, 7]$	24
160	$[2^5, 5]$	64
484	$[2^2, 11^2]$	220
6784	$[2^7, 53]$	3328

表 30: $P = 2, m = -14$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
96	$[2^5, 3]$	32
676	$[2^2, 13^2]$	312
1216	$[2^6, 19]$	576

表 31: $P = 2, m = -16$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
108	$[2^2, 3^3]$	36
132	$[2^2, 3, 11]$	40
140	$[2^2, 5, 7]$	48
200	$[2^3, 5^2]$	80
1088	$[2^6, 17]$	512
28928	$[2^8, 113]$	14336

表 32: $P=2, m=-32$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
460	$[2^2, 5, 23]$	176
532	$[2^2, 7, 19]$	216
3844	$[2^2, 31^2]$	1860
24832	$[2^8, 97]$	12288

表 33: $P=2, m=-31; q=2^{e+1}-31$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
8	24832	$2^8 * 97$	12288
12	8261632	$2^{12} * 2017$	4128768
14	133709824	$2^{14} * 8161$	66846720
18	34351611904	$2^{18} * 131041$	17175674880
20	549723308032	$2^{20} * 524257$	274861129728

この場合の計算を行う.

$a=2^eL, (L:$ 奇数$)$ として

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+31$$

を解けばよい.

L : 非素数の場合.

$q=\mathrm{Maxp}(L)$ なので $s(L)=1$ の場合を扱う.

$L=q^2$ とする. $\mathrm{co}\varphi(L)=q$ によって, $2^{e-1}q=q+31$. これより $e=2, q=31; a=2^2*31^2$.

$L=q^j\mu, q>\mathrm{Maxp}(\mu)$ とする.

$\mu_0=\mathrm{co}\varphi(\mu)>0$ とおく.

$\mu_0=1$ とする.

μ は素数なので $\mathrm{co}\varphi(L)=q+\mu-1$.

かくて方程式は

$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=2^{e-1}(q+\mu-1)=q+31$

$e=1$ なら $q+\mu-1=q+31$ により $\mu-1=31$; これは矛盾.

$e=2$ なら $2(q+\mu-1)=q+31$ により $q=33-2\mu$.

$\mu=3$ のとき $q=27=3^3$; これは矛盾.

$\mu=5$ のとき $q=23$. $L=5*23, a=2^2*5*23$.

$\mu=7$ のとき $q=19$. $L=7*19, a=2^2*7*19$.

$\mu=11$ のとき $q=11$; これは矛盾.

$e \geq 3$ なら $3(q+\mu-1) < q+31$ により $2q < 34-3\mu \leq 25$. これより $q \leq 11$.

$$2^{e-1}(q+\mu-1) = q+31$$

$q=11$ のとき $2^{e-1}(11+\mu-1) = 42 = 2*21$. 4 で割れないから矛盾.
$q=7$ のとき $2^{e-1}(7+\mu-1) = 38 = 2*19$. 4 で割れないから矛盾.
$q=5$ のとき $2^{e-1}(5+\mu-1) = 36$. 4 で割れて $\quad 2^{e-3}(5+\mu-1) = 9$. これは矛盾.

$\mu_0 = 2$ とする. $\mu = 4$ となり矛盾.
$\mu_0 = 3$ とする. $\mu = 9, L = 3^2 * q$.
$2^{e-1}(6+3q) = q+31$ により $e=1$ のとき, $6+3q = q+31$; $2q = 25$.
$e=2$ のとき, $2(6+3q) = q+31$; $5q = 31-12 = 19$. これは矛盾.

13 $P = 3, m \neq 0$ のとき

$$P\varphi(a) = \overline{P}a - P\overline{\mathrm{Maxp}(a)} + Pm$$

において $P = 3$ とすると

$$3\varphi(a) = 2a - 3\overline{\mathrm{Maxp}(a)} + 3m.$$

$3\varphi(a) = 2a - 3\overline{\mathrm{Maxp}(a)} + 6.$

13.1 $P = 3, m = 2$ のとき

表 34: $m = 2; 3\varphi(a) = 2a - 3\overline{\mathrm{Maxp}(a)} + 6$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	[3]	2
9	$[3^2]$	6
15	$[3, 5]$	8
27	$[3^3]$	18
81	$[3^4]$	54
243	$[3^5]$	162
729	$[3^6]$	486
2187	$[3^7]$	1458
6561	$[3^8]$	4374
19683	$[3^9]$	13122

$m \geq 0$ なので $q = 2 * 3^{e-1} + 1 + 2$ が素数の場合を調べればよい.

$m = P - 1 = 2$ なら $a = 3^e$ が解である.

$m \geq 0$ なので, $m = p - 1 = 2$ のとき べき根解 $a = 3^e$.

また微小解 $a = 3 * 2, 3 > 2$ をもつ.

$P = 3, m = 2, q = 3 + 2 = 5$, $a = 3 * 5$ が孤立解.

$q = 2 * 3^{e-1} - 1 - 2 = \varphi(3^e) - 3$ が素数のとき解になるが これは 3 の倍数なので解にはならない.

13.2 $P=3, m=-2$ のとき

$3\varphi(a)=2a-3(m-q+1)$, $(q=\mathrm{Maxp}(a))$ を満たす.

$m=-2$ のとき $3\varphi(a)-2a=3(-2-q+1)=-3(q+1)$ を満たす.

$a\equiv 0 \mod 3$ により, $a=3^eL(3, L$ は互いに素).

$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+1$ を満たす.

1. L が素数.

$\mathrm{co}\varphi(L)=1$ なので

$2*3^{e-1}=q+1$.

$L=2$ または $L\geq 5$.

a). $L=2$.

$q=3$ になるので, $2*3^{e-1}=q+1=4$ により起きない.

b). $q\geq 5$. $L=q$ になる. よって $2*3^{e-1}=q+1$ を満たすので $2*3^{e-1}-1$ が素数になる e を探して, $q=2*3^{e-1}-1$ とおけば $a=3^eq$ が解.

たとえば, $e=2$ のとき $q=2*3-1=5$,

$e=3$ のとき $q=2*9-1=17$.

2. L が非素数.

a). $\mathrm{Maxp}(L)<3$ のとき $L=2^f$, $q=3$.

$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=2^f*3^{e-1}=q+1=4$ によって, $f=2, e=1; a=3*2^2$.

b). $\mathrm{Maxp}(L)>3$.

$a=3^eL$ によって, $q=\mathrm{Maxp}(a)=\mathrm{Maxp}(L)$.

よって, $\mathrm{co}\varphi(L)\geq\mathrm{Maxp}(L)=q$.

$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+1>2*3^{e-1}*q$ により矛盾.

表 35: $P=3, m=-2$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
12	$[2^2, 3]$	4
45	$[3^2, 5]$	24
459	$[3^3, 17]$	288
4293	$[3^4, 53]$	2808

表 36: $P=3, m=-2$; $q=2*3^{e-1}+1-2$ が素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
2	45	3^2*5	24
3	459	3^3*17	288
4	4293	3^4*53	2808
8	28691253	3^8*4373	19123128
9	258260643	$3^9*13121$	172160640
13	1694575624563	$3^{13}*106288$	1129716020160
21	72945992743881219603	$3^{21}*6973568801$	48630661822280577600
24	53177628717632577039093	$3^{24}*188286357653$	35451752478233431668408
28	348898422018217481349886053	$3^{28}*15251194969973$	232598948012129736371620728

13.3 $P=3, m=-4$ のとき

表 37: $P=3, m=-4$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
18	$[2, 3^2]$	6

$m=-4$ のとき $3\varphi(a)-2a=3(-4-q+1)=-3(q+3)$ を満たす.
$a\equiv 0 \mod 3$ により, $a=3^eL, (3, L,$ は互いに素) とすると.
$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+3$ を満たす.

1. L が素数.
$\mathrm{co}\varphi(L)=1$ なので $2*3^{e-1}=q+3$.
$e=1$ なら $q=-1$ となり矛盾.
$e>1$ なら $q=3(2*3^{e-2}-1)$ となり, $e=2, q=3$ をえるので矛盾.

2. L が非素数.
a). $\mathrm{Maxp}(L)=2$ のとき $q=3$. $L=2^f$ とおくと

$$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=2^f*3^{e-1}=q+3=6.$$

$f=1, e=2$ よって, $a=2*3^2$.

b). $\mathrm{Maxp}(L)=q>3$ のとき.

$$q+3\geq 2*3^{e-1}q\geq 2q.$$

これより $q=3$ となり矛盾.
このとき解は 1 つのみ.

13.4 $P=3, m=-6$ のとき

表 38: $P=3, m=-6$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
24	$[2^3, 3]$	8
75	$[3, 5^2]$	40
351	$[3^3, 13]$	216

表 39: $P=3, m=-6 \quad q=2*3^{e-1}+1-6$ が素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
2	9	3^2	6
3	351	3^3*13	216
5	38151	3^5*157	25272
7	3177711	3^7*1453	2117016
11	20919820671	$3^{11}*118093$	13946429016
13	1694569247271	$3^{13}*1062877$	1129711768632
14	15251171055129	$3^{14}*3188641$	10167444181440
20	8105110288604030529	$3^{20}*2324522929$	5403406856744830752

$m=-6$ のとき $3\varphi(a)-2a=3(-6-q+1)=-3(q+5)$ を満たす.
$a \equiv 0 \mod 3$ により, $a=3^eL, (3, L$ は互いに素) とすると.
$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+5$ を満たす.

$\mathrm{Maxp}(L)=2$ のとき $q=3, L=2^f$.
$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=2^f*3^{e-1}=q+5=8$ を満たす.
よって,$f=3, e=1$. $a=2^3*3$.
$\mathrm{Maxp}(L)=2$ のとき $q=3, L=2^f$.

$\mathrm{Maxp}(L)>3$ のとき $q=\mathrm{Maxp}(L)$.

1. L が素数.
$2*3^{e-1}=q+5$ を満たす.
$q=2*3^{e-1}-5$:素数 となる e を探す.
たとえば
$e=3$ のとき $q=13$.
2. L が非素数.
$\mathrm{Maxp}(L)=q>3$ のとき. $2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+5$ を満たす.

$$q+5 \geq 2*3^{e-1}q \geq 2q.$$

$q=5$ となるので $2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+5=10$ を満たす.
$3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=5$; $e=1, \mathrm{co}\varphi(L)=5$.
よって, $L=5^2; a=3*5^2$

13.5 $P=3, m=-8$ のとき

表 40: $P=3, m=-8$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
30	$[2,3,5]$	8
147	$[3,7^2]$	84
297	$[3^3,11]$	180
3807	$[3^4,47]$	2484

表 41: $P=3, m=-8$; $q=2*3^{e-1}+1-8$ が素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	297	3^3*11	180
4	3807	3^4*47	2484
6	349191	3^6*479	232308
7	3173337	3^7*1451	2114100
10	2324109591	$3^10*39359$	1549367028

$m=-8$ のとき $3\varphi(a)-2a=3(-8-q+1)=-3(q+7)$ を満たす.
$a\equiv 0 \mod 3$ により, $a=3^eL, (3, L,$ は互いに素$)$ とすると.
$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+5$ を満たす.

$\mathrm{Maxp}(L)=2$ のとき $q=3, L=2^f$.
$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=2^f*3^{e-1}=q+7=10=2*5$ を満たすことはできない.

$\mathrm{Maxp}(L)>3$ のとき $q=\mathrm{Maxp}(L)$.

1. L が素数.
$2*3^{e-1}+1-8=q$. たとえば $e=3$ とすると, $q=11; a=3^3*11$.

2. L が非素数. $\mathrm{Maxp}(L)\geq q$. よって

$$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)+1=q+8\geq 2*3^{e-1}q.$$

$q+8\geq 2*3^{e-1}*q\geq 2*q$. よって, $q\leq 8$ なので $q=7,5$.

a) $q=7$.

$$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+7=2*7.$$

$e = 1$ になり $\mathrm{co}\varphi(L) = 7$. $L = 7^2$ または $L = 3 * 5 = 15$.
すると $L = 7^2$ なら $L = 7^2, e = 1, a = 3 * 7^2$.
$L = 15$ なら L が 3 の倍数になり矛盾.

b) $q = 5$.

$$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 7 = 12.$$

$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = 12 = 2^2 * 3$ により
$3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = 2 * 3$. したがって, $e = 1$ なら $\mathrm{co}\varphi(L) = 6$ により, $L = 10$; $a = 2 * 3 * 5$.

表 42: $P = 3, m = -10$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
36	$[2^2, 3^2]$	12
42	$[2, 3, 7]$	12

$m = -10$ のとき $3\varphi(a) - 2a = 3(-10 - q + 1) = -3(q + 9)$ を満たす.
$a \equiv 0 \mod 3$ により, $a = 3^e L, (3, L,$ は互いに素) とすると.
$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 9$ を満たす.

$\mathrm{Maxp}(L) = 2$ のとき $q = 3, L = 2^f$.
$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = 2^f * 3^{e-1} = q + 9 = 18 = 2 * 3^2$ を満たす.
ゆえに $e - 1 = 1, f = 2; a = 2^2 * 3^2$.

$\mathrm{Maxp}(L) > 3$ のとき $q = \mathrm{Maxp}(L)$.

1. L が素数.
$2 * 3^{e-1} + 1 - 10 = q$. これを満たす素数 q はない.

2. L が非素数. $\mathrm{co}\varphi(L) \geq q$ によって

$$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 9 \geq 2 * 3^{e-1}q.$$

$q + 9 \geq 2 * 3^{e-1} * q \geq 2 * q$. よって, $q \leq 9$ なので $q = 7, 5$.

a) $q = 7$.

$$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 9 = 16 = 2^4.$$

$e = 1$ になり $\mathrm{co}\varphi(L) = 8$. $L = 16$ または $L = 14, 12$.
$\mathrm{Maxp}(L) = q = 7$ によれば L は $q = 7$ の倍数.
$L = 14, a = 2 * 3 * 7$.

b) $q = 5$.

$$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 9 = 14.$$

よって
$3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = 7$. したがって, $e = 1$ なら $\mathrm{co}\varphi(L) = 7$ により, $L = 7^2$. $\mathrm{Maxp}(L) = q = 5$ に反する.

表 43: $P = 3, m = -12$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
189	$[3^3, 7]$	108
363	$[3, 11^2]$	220
3483	$[3^4, 43]$	2268

表 44: $P = 3, m = -12$; $q = 2 * 3^{e-1} + 1 - 12$ が素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	189	$3^3 * 7$	108
4	3483	$3^4 * 43$	2268
5	36693	$3^5 * 151$	24300
7	3164589	$3^7 * 1447$	2108268
8	28625643	$3^8 * 4363$	19079388
13	1694559681333	$3^{13} * 1062871$	1129705391340
16	1235346319053963	$3^{16} * 28697803$	823564184004828
19	900567798997118589	$3^{19} * 774840967$	600378531889904748

13.6 $P=3, m=-16$ のとき

表 45: $P=3, m=-16$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
54	$[2, 3^3]$	18
78	$[2, 3, 13]$	24
105	$[3, 5, 7]$	48

$m=-16$ のとき $3\varphi(a)-2a=3(-16-q+1)=-3(q+15)$ を満たす.
$a \equiv 0 \mod 3$ により, $a=3^eL, (3, L,$ は互いに素) とすると.
$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+15$ を満たす.

$\mathrm{Maxp}(L)=2$ のとき $q=3, L=2^f$.
$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=2^f*3^{e-1}=q+15=18=2*3^2$ を満たす.
ゆえに $e-1=2, f=1; a=2*3^3$.

$\mathrm{Maxp}(L)>3$ のとき $q=\mathrm{Maxp}(L)$.
1. L が素数.
$2*3^{e-1}=q+15$ なので
$e>1$ なので $q=2*3^{e-1}-15=3(2*3^{e-2}-5)$ なので素数になれない.

1a. L が素数べき.$L=p^f, (f \geq 2)$ とすると, $p=q$.
$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+15$ により $\mathrm{co}\varphi(L)=q^{f-1}$.

$$2*3^{e-1}q^{f-1}=q+15.$$

ゆえに, $q=5$. $2*3^{e-1}q^{f-1}=q+15=20$. これは解がない.

2. L が $s(a) \geq 2$.
$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+15 \geq 2*3^{e-1}q$.

a) $e=1$ のとき,
$q+15 \geq 2*q$ なので, $q \leq 15$. だから $q=13, 11, 7, 5$.

i. $q=13$.
$2*\mathrm{co}\varphi(L)=q+15=28$
$\mathrm{co}\varphi(L)=14$. $L=2*13$ なので $a=2*3*13=78$.

ii. $q=11$.
$2*\mathrm{co}\varphi(L)=q+15=26$
$\mathrm{co}\varphi(L)=13$. $L=3*11$ なので $L \not\equiv 0 \mod 3$ に反する.

iii. $q = 7$.
$2 * \mathrm{co}\varphi(L) = q + 15 = 22$
$\mathrm{co}\varphi(L) = 11$. $L = 5 * 7 = 35. a = 3 * 5 * 7 = 105$.

iv. $q = 5$.
$2 * \mathrm{co}\varphi(L) = 5 + 15 = 20$
$\mathrm{co}\varphi(L) = 10$. 矛盾.

a) $e = 2$ のとき,
$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 15 \geq 2 * 3^{e-1}q = 6q$.
$15 \geq 5q$ となり $q \geq 5$ に矛盾.
以上により解は 3 個; $a = 105, 78, 54$.

13.7 $P = 3, m = -32$ のとき

表 46: $P = 3, m = -32$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
90	$[2, 3^2, 5]$	24
174	$[2, 3, 29]$	56
345	$[3, 5, 23]$	176
399	$[3, 7, 19]$	216
1863	$[3^4, 23]$	1188
2883	$[3, 31^2]$	1860
31833	$[3^5, 131]$	21060

表 47: $P = 3, m = -32$; $q = 2 * 3^{e-1} + 1 - 32$ が素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
4	1863	$3^4 * 23$	1188
5	31833	$3^5 * 131$	21060
7	3120849	$3^7 * 1427$	2079108
31	254346949651278073210481796849	$3^{31} * 411782264189267$	X

$X = 169564633100851637024723675268$
$m = -32$ のとき $3\varphi(a) - 2a = 3(-32 - q + 1) = -3(q + 31)$ を満たす.
$a \equiv 0 \mod 3$ により, $a = 3^e L, (3, L,$ は互いに素) とすると.
$2 * 3^{e-1} \mathrm{co}\varphi(L) = q + 31$ を満たす.

$\mathrm{Maxp}(L) = 2$ のとき $q = 3, L = 2^f$.
$2 * 3^{e-1} \mathrm{co}\varphi(L) = 2^f * 3^{e-1} = q + 31 = 34 = 2 * 17$ を満たす.
ゆえに解はない.

$\mathrm{Maxp}(L) > 3$ のとき $q = \mathrm{Maxp}(L)$.

14 $P = 5, m \neq 0$ のとき

14.1 $P = 5, m = -2$ のとき

$$4a - 5\varphi(a) = 5(S + q - 1) = 5(q + 1)$$

これより

$4 * 5^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 1$. よって, L は素数しかない.

表 48: $P = 5; m = -2$

a	factor	$\varphi(a)$
475	$[5^2, 19]$	360

表 49: $P = 5; m = -2$

e	a	factor	$\varphi(a)$
2	475	$5^2 * 19$	360
4	311875	$5^4 * 499$	249000
10	76293935546875	$5^{10} * 7812499$	61035140625000
14	29802322381591796875	$5^{14} * 4882812499$	X
16	18626451492156982421875	$5^{16} * 122070312499$	Y
26	A	$5^{26} * 1192092895507812499$	Z

X=23841857900390625000

Y=14901161193603515625000

A=1776356839400250463187694549560546875

Z=1421085471520200369358062744140625000

表 50: $P = 5; m = -8$

a	factor	$\varphi(a)$
45	$[3^2, 5]$	24
325	$[5^2, 13]$	240

14.2 $P = 5, m = 2$ のとき

$e \geq 2$ のとき $q \equiv 3 \mod 10$ を満たすであろう.

解に $a = 5^e q$ があると仮定すれば $q = 4 * 5^{e-1} + 3$ を満たす.

$4 * 5^{e-1} + 3$ が素数になる e は無限にあるかが問題となりうる.

表 51: $P = 5; m = -12$

a	factor	$\varphi(a)$
30	$[2, 3, 5]$	8
40	$[2^3, 5]$	16
11125	$[5^3, 89]$	8800

表 52: $P = 5; m = -32$

a	factor	$\varphi(a)$
135	$[3^3, 5]$	7

表 53: $P = 5; m = -60$

a	factor	$\varphi(a)$
120	$[2^3, 3, 5]$	32
160	$[2^5, 5]$	64
255	$[3, 5, 17]$	128
5125	$[5^3, 41]$	4000

表 54: $[P = 5, m = 2]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
35	$[5, 7]$	24
575	$[5^2, 23]$	440
12875	$[5^3, 103]$	10200

表 55: $P = 5, m = 2$;$q = 4 * 5^{e-1} + 1 + 2$ が素数の場合

e	a	素因子分解	$\varphi(a)$
1	35	$5 * 7$	24
2	575	$5^2 * 23$	440
3	12875	$5^3 * 103$	10200
4	314375	$5^4 * 503$	251000
5	7821875	$5^5 * 2503$	6255000
6	195359375	$5^6 * 12503$	156275000
11	1907348779296875	$5^{11} * 39062503$	1525878984375000

15 $co\varphi(a) - \mathbf{Maxp}(a)$ の値変化

copm$=co\varphi(a)-$ Maxp(a), cosm$=co\sigma(a)-$ Maxp(a) とおく.
$co\varphi(a)-$ Maxp$(a), co\sigma(a)-$ Maxp(a) の $s(a)\geq 2$ の場合について, 値の変化を調べた.

表 56: copm,cosm の表

a	factor	$s(a)$	$\varphi(a)$	$\sigma(a)$	Maxp(a)	co$\varphi(a)$	coσ	copm	cosm
$2p, p>2$	$[2,p]$	2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	1	3
$3p, p>3$	$[3,p]$	2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	2	4
$5p, p>5$	$[5,p]$	2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	4	6
12	$[2^2,3]$	2	4	28	3	8	16	5	13
$7p, p>7$	$[7,p]$	2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	6	8
20	$[2^2,5]$	2	8	42	5	12	22	7	17
18	$[2,3^2]$	2	6	39	3	12	21	9	18
28	$[2^2,7]$	2	12	56	7	16	28	9	21
$11p, p>11$	$[11,p]$	2	$-$	$-$	$-$	$-$		10	12

これから一般的な結論を導き証明することが課題である.

定理 2 *copm*$=co\varphi(a)-Maxp(a)$, *cosm*$=co\sigma(a)-Maxp(a)$ とおく.

$s(a)=1$ のとき. $a=p^e, e\geq 2$ なら *copm*$=p(p^{e-2}-1)$.
とくに $a=p^2$ なら *copm*$=0$.

$s(a)\geq 2$ のとき
copm≥ 1. *copm*$=1$ なら $a=2p, p>2$.
copm$=2$ なら $a=3p, p>3$.
copm>2 なら *copm*≥ 4. *copm*$=4$ なら $a=5p, p>5$.
copm>4 なら *copm*≥ 5. *copm*$=5$ なら $a=12$.
copm>5 なら *copm*≥ 6. *copm*$=6$ なら $a=7p, p>11$.

copm1$(L)=co\varphi(L)-$ Maxp$(L)+1$ の値を個々に調べる.
0) $L=Q, Q:$ 素数のとき. copm1$(L)=2-Q$.
1) $L=pQ, p>Q:$ ともに素数のとき. copm1$(L)=Q$.
2) $L=Q^2, Q:$ 素数のとき. copm1$(L)=1$.
3) $L=4Q, Q>2:$ 素数のとき. copm1$(L)=2Q+2$.
copm1$(L)=2Q+2<51$ なら $Q\leq 23$.
4) $L=6Q, Q>3:$ 素数のとき. copm1$(L)=3Q+3$.
copm1$(L)=3Q+3<51$ なら $Q\leq 13$.
5) $L=8Q, Q>3:$ 素数のとき. copm1$(L)=3Q+5$.
copm1$(L)=3Q+5<51$ なら $Q\leq 13$.
6) $L=2Q^2, Q\geq 3:$ 素数のとき. copm1$(L)=Q^2+1$.
copm1$(L)=Q^2+1<51$ なら $Q\leq 7$.

7) $L = 16Q, Q > 3$: 素数のとき. $\mathrm{copm1}(L) = 7Q + 9$.

$Q = 3$ なら $\mathrm{copm1}(L) = 30$; $Q = 5$ なら $\mathrm{copm1}(L) = 44$.

8) $L = 2Q^3, Q \geq 3$: 素数のとき. $\mathrm{copm1}(L) = Q^2 - Q + 1$.

$Q = 3$ なら $\mathrm{copm1}(L) = 7$; $Q = 5$ なら $\mathrm{copm1}(L) = 21$; $Q = 7$ なら $\mathrm{copm1}(L) = 43$, .

9) $L = 16Q, Q > 3$: 素数のとき. $\mathrm{copm1}(L) = 7Q + 9$.

$Q = 3$ なら $\mathrm{copm1}(L) = 30$; $Q = 5$ なら $\mathrm{copm1}(L) = 44$.

10) $L = 5^2Q, Q \geq 7$: 素数のとき. $\mathrm{copm1}(L) = 4Q + 21$.

$Q = 3$ なら $\mathrm{copm1}(L) = 36$; $Q = 5$ なら $\mathrm{copm1}(L) = 41$; $Q = 7$ なら $\mathrm{copm1}(L) = 49$.

16 $*$ 完全数

オイラーの φ 完全数を導入して, φ 完全数の方程式が定まりこの結果,$m \geq 0$ のとき基本定理ができた. これは望外の成功であった. また $m < 0$ のときは方程式を解くアルゴリズムができた.

オイラーの φ 完全数の定義をわずかばかり変更してオイラーの $*$ 完全数を導入する.

定義: $q = \varphi(P^{e+1}) + 1 + m, e > 1$ が素数になるとき $a = P^{e-1}q$ と定めて a をオイラーの $*$ 完全数とよぶ.

さて

$$q = \varphi(P^{e+1}) + 1 + m = P^e\overline{P} + 1 + m,$$
$$\varphi(a) = \varphi(P^{e-1}q) = P^{e-2}\overline{P}(q-1)$$

に注意して

$$\begin{aligned} P^2\varphi(a) &= P^e\overline{P}(q-1) \\ &= P^e q\overline{P} - P^e\overline{P} \\ &= P\overline{P}a - (q-1-m). \end{aligned}$$

かくして $\mathrm{Maxp}(a) = q$ に注意し

$$P^2\varphi(a) = P\overline{P}a - \mathrm{Maxp}(a) + (1+m). \tag{3}$$

これが m だけ平行移動した $*$ 完全数の方程式である.

17 $*$ 完全数の方程式の解

$P=2$ の場合の方程式は

$$4\varphi(a)=2a-\mathrm{Maxp}(a)+(1+m). \tag{4}$$

φ 完全数の方程式

$$2\varphi(a)=a-2\mathrm{Maxp}(a)+2(1+m). \tag{5}$$

であり, この形から a が偶数になり $a=2^{\varepsilon}L,(L:\text{奇数})$ の形にかけてこれから計算が進む.

古典的な完全数の場合が偶数とはいえないためここから奇数完全数の問題と数学界の大難問が生まれた.

17.1 $[P=2,m=-2]$ の $*$ 完全数の解

表 57: $[P=2,m=-2]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
6	$[2,3]$	2
28	$[2^2,7]$	12
496	$[2^4,31]$	240
8128	$[2^6,127]$	4032

この場合はユークリッドの完全数が 6,28,496,8128 が並んでいる.

$m=-2$ のときなので $*$ 完全数の方程式は

$$4\varphi(a)=2a-\mathrm{Maxp}(a)-1$$

この式から $a:$偶数 が示されればいいのだが難しそう.

$a:$偶数 を仮定する. $a=2^{e}L,(L:\text{奇数})$ と書けるので

$$2^{e+1}\varphi(L)=2^{e+1}L-\mathrm{Maxp}(a)-1.$$

これより

$$2^{e+1}(\mathrm{co}\varphi(L))=q+1,q=\mathrm{Maxp}(L).$$

$L:$素数のとき, $\mathrm{co}\varphi(L)=1$.

$$2^{e+1}-1=q.$$

q はメルセンヌ素数, $a=2^{e}q$ は古典的な完全数.

L : 非素数のとき,co$\varphi(L) \geq q$. これより

$$q + 1 = 2^{e+1}(\mathrm{co}\varphi(L)) \geq 2^{e+1} q \geq 4q.$$

これは矛盾.

a : 奇数を仮定して矛盾がでればいいのだが.

17.2 $[P=2, m=0]$ の $*$ 完全数の解

表 58: $[P=2, m=0]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
10	$[2,5]$	4
136	$[2^3,17]$	64
165	$[3,5,11]$	80
15561	$[3^2,7,13,19]$	7776
16215	$[3,5,23,47]$	8096
32896	$[2^7,257]$	16384

$m=0$ のときなので $*$ 完全数の方程式は

$$4\varphi(a) = 2a - \mathrm{Maxp}(a) + 1$$

a : 偶数 を仮定する. $a = 2^e L, (L$: 奇数$)$ と書けるので

$$2^{e+1}\varphi(L) = 2^{e+1}L - \mathrm{Maxp}(a) + 1.$$

これより

$$2^{e+1}(\mathrm{co}\varphi(L)) = q-1, q = \mathrm{Maxp}(L).$$

$\mathrm{co}\varphi(L)=1$, すなわち L : 素数, $L=q$ となり
$q = 2^{e+1}+1$: 素数. これはもちろんフェルマ素数.

この場合は奇数の解があり 相異なる素因子の個数 $s(a)$ が 3,4 の例を与えている.
強引に解釈すれば, 奇数の解は奇数の完全数の類似である.

17.3 $[P=2, m=-4]$ $*$ 完全数の解

表 59: $[P=2, m=-4]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
20	$[2^2,5]$	8
104	$[2^3,13]$	48
464	$[2^4,29]$	224
1952	$[2^5,61]$	960

17.4 $[P=2, m=-6]$ の $*$ 完全数の場合の解

表 60: $[P=2,m=-6]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
12	$[2^2,3]$	4
88	$[2^3,11]$	40
585	$[3^2,5,13]$	288
1888	$[2^5,59]$	928
32128	$[2^7,251]$	16000

17.5 $[P=2,m=-10]$ の $*$ 完全数の場合の解

表 61: $[P=2,m=-10]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
18	$[2,3^2]$	6
56	$[2^3,7]$	24
368	$[2^4,23]$	176

17.6 $[P=2,m=-12]*$ 完全数 の場合の解

表 62: $[P=2,m=-12]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
40	$[2^3,5]$	16
105	$[3,5,7]$	48
1696	$[2^5,53]$	832
42585	$[3,5,17,167]$	21248

17.7 $[P=2,m=-14]$ の $*$ 完全数の解

表 63: $[P=2,m=-14]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
24	$[2^3,3]$	8
304	$[2^4,19]$	144

17.8 $[P = 2, m = -16]$ の $*$ 完全数の解

表 64: $[P = 2, m = -16]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
50	$[2, 5^2]$	20
272	$[2^4, 17]$	128
7232	$[2^6, 113]$	3584

18 $[P = 2, m > 0]$ の場合の解

18.1 $[P = 2, m = 2]$ の場合の解

表 65: $[P = 2, m = 2]*$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
14	$[2, 7]$	6
44	$[2^2, 11]$	20
152	$[2^3, 19]$	72
2144	$[2^5, 67]$	1056
8384	$[2^6, 131]$	4160

表 66: $[P = 2, m = 4]*$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	$[3]$	2
52	$[2^2, 13]$	24
592	$[2^4, 37]$	288
23655	$[3, 5, 19, 83]$	11808

$s(a) \geq 3$ の例は $23655 = [3, 5, 19, 83]$

表 67: $[P = 2, m = 6; *$ 完全数$]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
15	$[3, 5]$	8
22	$[2, 11]$	10
184	$[2^3, 23]$	88
195	$[3, 5, 13]$	96
2272	$[2^5, 71]$	1120
33664	$[2^7, 263]$	16768
44115	$[3, 5, 17, 173]$	22016

$s(a) \geq 3$ の例は $195 = [3, 5, 13]]$, 44115= $[3, 5, 17, 173]$

表 68: $[P = 2, m = 8]$　$*$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
9	$[3^2]$	6
26	$[2, 13]$	12
68	$[2^2, 17]$	32
656	$[2^4, 41]$	320
2336	$[2^5, 73]$	1152
8768	$[2^6, 137]$	4352

表 69: $[P = 2, m = 10]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
5	$[5]$	4
45	$[3^2, 5]$	24
76	$[2^2, 19]$	36
688	$[2^4, 43]$	336
8896	$[2^6, 139]$	4416

表 70: $[P = 2, m = 12]$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
21	$[3, 7]$	12
34	$[2, 17]$	16
232	$[2^3, 29]$	112
5187	$[3, 7, 13, 19]$	2592
34432	$[2^7, 269]$	17152

$s(a) \geq 3$ の例は $5187 = [3, 7, 13, 19]$.

表 71: $[P=2,m=0]$,$*$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
10	$[2,5]$	4
136	$[2^3,17]$	64
165	$[3,5,11]$	80
15561	$[3^2,7,13,19]$	7776
16215	$[3,5,23,47]$	8096
32896	$[2^7,257]$	16384

$s(a)\geq 3$ の例は
$165=[3,5,11]$, $15561=[3^2,7,13,19]$ 16215 $[3,5,23,47]$
$s(a)=2$ の例は $10=[2,5]$
$136=[2^3,17]$, $32896=[2^7,257]$.

19　$*$ 完全数の例

表 72: $[P=2, m=-24]$,φ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
120	$[2^3, 3, 5]$	32
228	$[2^2, 3, 19]$	72
308	$[2^2, 7, 11]$	120
2116	$[2^2, 23^2]$	1012
5248	$[2^7, 41]$	2560

表 73: $[P=2, m=-24]$,$*$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
30	$[2, 3, 5]$	8
1312	$[2^5, 41]$	640

表 74: $[P=2, m=-16]$,$*$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
50	$[2, 5^2]$	20
272	$[2^4, 17]$	128
7232	$[2^6, 113]$	3584

表 75: $[P=2, m=-16]$,φ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
108	$[2^2, 3^3]$	36
132	$[2^2, 3, 11]$	40
140	$[2^2, 5, 7]$	48
200	$[2^3, 5^2]$	80
1088	$[2^6, 17]$	512

表 76: $[P=2, m=16]$,φ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
76	$[2^2, 19]$	36

表 77: $[P=2, m=16]$,$*$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
7	$[7]$	6

表 78: $[P=2, m=24]$,$*$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
33	$[3, 11]$	20
58	$[2, 29]$	28
63	$[3^2, 7]$	36
285	$[3, 5, 19]$	144
328	$[2^3, 41]$	160
2848	$[2^5, 89]$	1408

表 79: $[P=2, m=24]$,φ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
232	$[2^3, 29]$	112
1312	$[2^5, 41]$	640
11392	$[2^7, 89]$	5632

表 80: $[P=2,m=-36]$,φ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
372	$[2^2,3,31]$	120
400	$[2^4,5^2]$	160
644	$[2^2,7,23]$	264
3712	$[2^7,29]$	1792

表 81: $[P=2,m=-36]$,$*$ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
100	$[2^2,5^2]$	40
928	$[2^5,29]$	448

表 82: $[P=2,m=36]$,$*$ 完全数

a	素因数分解	$*$
82	$[2,41]$	40
345	$[3,5,23]$	176
424	$[2^3,53]$	208
855	$[3^2,5,19]$	432
3232	$[2^5,101]$	1600