書泉グランデでの講義
高校生も十分わかる新しい数論研究
New Series, 第3期　資料1A
2016 年6月24日

飯高 茂

平成28 年6 月19 日

1　完全数

復習を兼ねながら序論を述べよう.

6 の 6 以外の約数 1,2,3 を加えると $6 = 1 + 2 + 3$ になる. 昔の人はこれは不思議だと思い完全数と言った.

a を自然数とするときその約数の和を $\sigma(a)$ と書く. これを a の関数とみてユークリッド関数という.

a, b が互いに素なら

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$$

が成り立つ. これをユークリッド関数の乗法性という.

ところで $\sigma(a) = 2a$ を満たす数 a を 完全数 (perfect numbers) という. 6 以外に 28,496,8128 などがあり古代の数学者ユークリッドによって考えられた.

これらを素因数分解すると

$$6 = 2 * (2^2 - 1), 28 = 2^2 * (2^3 - 1), 496 = 2^4 * (2^5 - 1), 8128 = 2^6 * (2^7 - 1)$$

などとなる.8128 の素因数分解を紀元前の数学者が行い, その基本性質を考察したのはすごいことである.

これら 4 つの完全数以外の完全数を求めて古代人は努力を重ねた. 1456 年になって 5 番目の完全数 33550336 が発見された. その素因数分解は $2^{12} * 8191$.

2　ユークリッド

ユークリッド (エウクレイデス),『ユークリッド原論』(By Wikipedia) 第 9 巻, 命題 36 は次のようなものである.

もし単位から始まり順次に 1 対 2 の比をなす任意個の数が定められ，それらの総和が素数になるようにされ，そして全体が最後の数にかけられてある数をつくるならば，その数は完全数であろう.

[解説]

古代ギリシャの数学では 単位は 1 を指す.

1 から始まり, 順次 2 倍する. 任意個の数を n 個とする.

$$1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{n-1}$$

それらの総和

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$$

は等比数列の和の公式により

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

総和を p と書き素数と仮定する.

総和 p を 最後の数である 2^{n-1} とかけた数を a とおくとこれは完全数になる.

例

$n = 3$

$Q = 1 + 2 + 4 = 7$ は素数. $4 * 7 = 28$ は完全数

$n = 5$ の場合は各自やってみよう.

3　メルセンヌ

2 のべきから 1 引いた $Q = 2^{e+1} - 1$ が素数になるとき $a = 2^e Q$ は完全数でありとくにこの形の数をユークリッドの完全数という.

これを確認しよう. ユークリッド関数の乗法性によって,

$$\sigma(a) = \sigma(2^e)\sigma(Q) = (2^{e+1} - 1)(Q + 1) = 2a - Q + 2^{e+1} - 1 = 2a$$

$e+1$ が素数のとき $Q=2^{e+1}-1$ をメルセンヌ数という. とくに Q が素数のときメルセンヌの素数という.

図 1: Mersenne 1588–1684

1588 年は太閤秀吉の刀狩りの年で, 日本史で記憶を強制される年号である. 私は, イゴパッパトカタナガリ, として記憶している.

一般に $2^{e+1}-1$ が素数になるとき $e+1$ は素数になることが証明できる.

4　49 個目の完全数

最近 (2016 年 1 月 7 日)49 個目の完全数が発見され一般の新聞紙上でも大きく報道された.

$M(p)=2^p-1$ の形の素数をメルセンヌ素数という. このとき $P(p)=2^{p-1}M(p)$ がユークリッドの完全数になる.

4.1 完全数の数表

表 1: 完全数の場合

$e \bmod 4$	e	$e+1$	$2^e * q$	a	$a \bmod 10$
1	1	2	$2 * 3$	6	6
2	2	3	$2^2 * 7$	28	8
0	4	5	$2^4 * 31$	496	6
2	6	7	$2^6 * 127$	8128	8
0	12	13	$2^{12} * 8191$	33550336 (1456)	6
0	16	17	$2^{16} * 131071$	8589869056 (Cataldi,1588)	6
2	18	19	$2^{18} * 524287$	137438691328 (Cataldi,1588)	8
2	30	31	A	B (Euler, 1772)	8
0	60	61	C	D (Pervushin, 1883)	6
0	88	89	E	F (Powers, 1911)	6
0	106	107	G	H (Powers, 1914)	8
0	126	127	I	J (Lucas, 1876)	8

$A = 2^{30} * 2147483647$

$B = 2305843008139952128$

$C = 2^{60} * 2305843009213693951$

$D = 2658455991569831744654692615953842176$

$E = 2^{88} * 618970019642690137449562111$

$F = 191561942608236107294793378084303638130997321548169216$

$G = 2^{106} * 162259276829213363391578010288127$

$H = 13164036458569648337239753460458722910223472318386943117783728128$

$I = 2^{126} * 170141183460469231731687303715884105727$

$J = 14474011154664524427946373126085988481573677491474835889066354349131199152128$.

最初の 4 つの完全数が見出されたのは紀元前のことであったが 15 世紀になって 5 番目の完全数が発見された. 4 番目の完全数 8128 は 4 桁であったが, 5 番目の完全数 33550336 は 8 桁もあった. それから 130 年経って,6,7 番目が Cataldi によって見出された.

8 番目の完全数はオイラーが発見した. そのためには $2^{31} - 1$ が素数であることの証明が必要になった.

4.2 メルセンヌ素数と完全数の表

表 2: メルセンヌ素数 $M(p)$ 1

番号	p	$M(p)$ の桁数	$P(p)$ の桁数	発見年	発見者
5	13	4	8	1456	不明
6	17	6	10	1588	Cataldi
7	19	6	12	1588	Cataldi
8	31	10	19	1772	Euler
9	61	19	37	1883	Pervushin
10	89	27	54	1911	Powers
11	107	33	65	1914	Powers
12	127	39	77	1876	Lucas

表 3: メルセンヌ素数 $M(p)$ 2 コンピュータの活用

番号	p	$M(p)$ の桁数	$P(p)$ の桁数	発見年	発見者
13	521	157	314	1952	Robinson
14	607	183	366	1952	Robinson
15	1279	386	770	1952	Robinson
16	2203	664	1327	1952	Robinson
17	2281	687	1373	1952	Robinson
18	3217	969	1937	1957	Riesel
19	4253	1281	2561	1961	Hurwitz
20	4423	1332	2663	1961	Hurwitz
21	9689	2917	5834	1963	Gillies
22	9941	2993	5985	1963	Gillies
23	11213	3376	6751	1963	Gillies
24	19937	6002	12003	1971	Tuckerman
25	21701	6533	13066	1978	Noll , Nickel
26	23209	6987	13973	1979	Noll
27	44497	13395	26790	1979	Nelson , Slowinski
28	86243	25962	51924	1982	Slowinski
29	110503	33265	66530	1988	Colquitt
30	132049	39751	79502	1983	Slowinski
31	216091	65050	130100	1985	Slowinski
32	756839	227832	455663	1992	Slowinski
33	859433	258716	517430	1994	Slowinski e al.
34	1257787	378632	757263	1996	Slowinski

表 4: メルセンヌ素数 $M(p)$ 3 GIMPS の時代

番号	p	$M(p)$ の桁数	$P(p)$ の桁数	発見年	発見者
35	1398269	420921	841842	1996	
36	2976221	895932	1791864	1997	
37	3021377	909526	1819050	1998	
38	6972593	2098960	4197919	1999	
39	13466917	4053946	8107892	2001	
40	20996011	6320430	12640858	2003	
41	24036583	7235733	14471465	2004	
42	25964951	7816230	15632458	2005	
43	30402457	9152052	18304103	2005	
44	32582657	9808358	19616714	2006	
45	37156667	11185272	22370543	2008	
46	42643801	12837064	25674127	2009	
47	43112609	12978189	25956377	2008	
48	57885161	17425170	34850339	2013	
49	74,207,281	22,338,618	44,677,235	2016	

1996 年からはほぼ毎年のように発見されたが 2009 年からペースが落ちいている.

4.3 研究目標

目標 究極の完全数の探究
P を素数とし $\sigma(P^e)$ が素数 q のとき $a=P^eq$ を底が P の (究極の) 完全数.

究極の完全数を整数 m だけ平行移動する. $q=\frac{P^{e+1}-1}{\overline{P}}+m$ は素数とし $a=P^eq$ を m だけ平行移動した底が P の完全数と呼ぶ. ただし $q>P$. $(\overline{P}=P-1)$

5 究極の完全数とその平行移動

P を素数とし, 整数 m に関して $\sigma(P^e)+m$ が素数 q のとき $a=P^eq$ を m だけ平行移動した底が P の狭義の究極の完全数と呼ぶ.

これは次式を満たす.

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)\mathrm{Maxp}(a) - m(P-1). \tag{1}$$

$\mathrm{Maxp}(a)$ は a の最大素因子を指している.

この式を満たす a を m だけ平行移動した底が P の広義の究極の完全数と呼ぶ.

6 φ 完全数

究極の完全数の定義を参考にユークリッド関数の代わりにオイラー関数を使って類似した概念を定義しよう.

$\varphi(P^e), (e>1)$ は合成数なので完全数の定義をそのままは使えない. そこで, 1 を加えて $\varphi(P^e)+1$ が素数 q になるとき $a = P^e q$ をもって P を底とする狭義のオイラー φ **完全数**と定義する.

さて最も簡単な　$P=2$ の場合を定義にしたがいパソコンで計算してみる.

表 5: $P=2$ を底とする φ 完全数

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
2	12	$2^2 * 3$	4
3	40	$2^3 * 5$	16
5	544	$2^5 * 17$	256
9	131584	$2^9 * 257$	65536
17	8590065664	$2^{17} * 65537$	4294967296

計算の結果,a の素数部分には ,3,5,17,257 のようにフェルマ素数が並んでいるではないか.

しかし, 定義に戻ると, $q = \varphi(P^e)+1 = 2^{e-1}+1$ が素数という条件になるので $e-1 = 2^m$ と書けて q がフェルマ素数になるのは当然である.

完全数の場合のようにこれら q, a の末尾の数をみてみよう. 10 を法としてみればよい.

$e>4$ なら $e \equiv 1 \mod 4; q \equiv 7; a \equiv 4\ ; \varphi(a) \equiv 6 \bmod 10$ が成り立つ.

5 つのフェルマー素数に応じて 5 つの φ 完全数ができた. これらはフェルマー φ 完全数 と呼ぶ方がよい. 後で一般化されたオイラー φ 完全数が導入されるであろう.

7　φ 弱完全数

$k > 0$ に関して,$e = 1 + 4k, q_k = 2^{4k} + 1, a_k = 2^e q_k$ とおき,
a_k を 2 を底とする φ 弱完全数 という.

表 6: 2 を底とする φ 弱完全数

$e = 1 + 4k$	q_k	factor	a
5	17	17	544
9	257	257	131584
13	4097	$17 * 241$	33562624
17	65537	65537	8590065664
21	1048577	$17 * 61681$	2199025352704
25	16777217	$97 * 257 * 673$	562949986975744
29	268435457	$17 * 15790321$	144115188612726784
33	4294967297	$641 * 6700417$	36893488156009037824
37	68719476737	$17 * 241 * 433 * 38737$	9444732965876729380864

表 7: 2 を底とする φ 弱完全数, 法を 100

k	e	q_k	a_k
1	5	17	44
2	9	57	84
3	13	97	24
4	17	37	64
5	21	77	4
6	25	17	44
7	29	57	84
8	33	97	24
9	37	37	64

これから次がわかる.
φ 弱完全数 の末尾の数は 4
φ 弱完全数 の末尾 2 桁の数は 44,84,24,64,04 が繰り返される
$q = 2^{4k} + 1$ の末尾の数は 7
$q = 2^{4k} + 1$ の末尾 2 桁の数は 17,57,97,37,77 が繰り返される

7.1 3 を底とするとき

$P=3$ の場合も計算してみる.

$$q = 2 * 3^{e-1} + 1, a = 3^e q.$$

表 8: $P=3$ を底とする φ 完全数

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
2	63	$3^2 * 7$	36
3	513	$3^3 * 19$	324
5	39609	$3^5 * 163$	26244
6	355023	$3^6 * 487$	236196
7	3190833	$3^7 * 1459$	2125764
10	2324581983	$3^{10} * 39367$	1549681956
17	11118121262251209	$3^{17} * 86093443$	7412080755407364
18	100063090585419903	$3^{18} * 258280327$	66708726798666276
31	A	$3^{31} * 411782264189299$	$--$
55	B	$3^{55} * 116299474006080119380780339$	$--$
58	C	$3^{58} * 3140085798164163223281069127$	$--$
61	D	$3^{61} * 84782316550432407028588866403$	$--$
66	E	$3^{66} * 20602102921755074907947094535687$	$--$

$A = 254346949651297838759162883153,$
$B = 2028835148113635805758132900880265803031134378226l873,$
$C = 14790208229748405023976788724953791575694603909307209503,$
$D = 10782061799486587262479078977184803713214502375769989938009.$
$E = 636669967197883491262127134516306911101006058595257340533039423$
定義には自然に出てくる
$q = 2 * 3^{e-1} + 1$: 素数, という条件は今まで扱ったことがない.
ここで登場する素数は $7, 19, 163, 487, 1459, \cdots$ であって比較的数が多い.
花束を持って彼らまたは 彼女らを歓迎しよう. [1]

- $e \equiv 2 \bmod 4$ のとき $q \equiv 7, a \equiv 3 \bmod 10$.
- $e \equiv 1 \bmod 4$ のとき $q \equiv 3, a \equiv 9 \bmod 10$.

[1] アメリカの大学では he,she のように性別の出る単語を嫌って代わりに ze を使うのだそうだ. 新しく登場した素数を英語で書くときは ze を使うといいだろう. ze の複数形は they だそうだ (笑)

- $e \equiv 3 \bmod 4$ のとき $q \equiv 9, a \equiv 3 \bmod 10$.

Proof.

$e \equiv 2 \bmod 4$.

$e = 4k+2$ となるので, $q = 2(3^{e-1})+1 \equiv 1+1 = 2 \bmod 5$. よって $q \equiv 2+5 = 7 \bmod 10$.

$a = 3^e q \equiv -4 \times 7 \equiv 3 \bmod 5$. a は奇数なので $a \equiv 3 \bmod 10$.

$e \equiv 1 \bmod 4$.

$e = 4k+1$ となるので, $q = 2(3^{e-1})+1 \equiv 2+1 = 3 \bmod 5$. よって $q \equiv 3 \bmod 10$.

$a = 3^e q \equiv 3 \times 3 \equiv -1 \bmod 5$. a は奇数なので $a \equiv 9 \bmod 10$.

$e \equiv 3 \bmod 4$.

$e = 4k+3$ となるので, $q = 2(3^{e-1}) + 1 \equiv -2 + 1 = 4 \bmod 5$. よって $q \equiv 9 \bmod 10$.

$a = 3^e q \equiv 2 \times -1 \equiv 3 \bmod 5$. a は奇数なので $a \equiv 3 \bmod 10$.

$q = 2 * 3^{e-1} + 1$ が素数になる例は無数にあると思われる.

8　オイラー φ 完全数の平行移動

m だけ平行移動した オイラー φ 完全数の定義は次の通り.

$\varphi(P^e)+1+m, e>1$ が素数 q になるとき $a=P^eq, e\geq 2$ を (P を底とする) m だけ平行移動した (狭義の) オイラー φ 完全数の定義とする.

特にこれを満たす a を (φ, m) 完全数とも言う.

8.1　$P=2, m=-2$

もっとも簡単な $P=2.m=-2$ の場合を計算してみる.

表 9: $P=2, m=-2$

a	素因数分解
24	2^3*3
112	2^4*7
1984	2^6*31
32512	2^8*127
134201344	$2^{14}*8191$
34359476224	$2^{18}*131071$
549754765312	$2^{20}*524287$
9223372032559808512	$2^{32}*2147483647$

$q=\varphi(P^e)+1=2^{e-1}+1-2=2^{e-1}-1$ が素数という条件なので, q はメルセンヌ素数であり, ここでの $a=2^eq$ はおしなべて, 完全数の 4 倍である.

オイラー φ 完全数を定義したがまともなものが出てきた.

8.2　$P=2, m=0$

次に $m=0$ の場合を計算する.

素数部分は フェルマ素数で驚くには及ばない.

表 10: $P = 2, m = 0$

a	素因数分解
12	$2^2 * 3$
40	$2^3 * 5$
544	$2^5 * 17$
131584	$2^9 * 257$
8590065664	$2^{17} * 65537$

8.3 $P = 2, m = 2$

表 11: $P = 2, m = 2$

a	素因数分解
20	$2^2 * 5$
56	$2^3 * 7$
176	$2^4 * 11$
608	$2^5 * 19$
8576	$2^7 * 67$
33536	$2^8 * 131$
33579008	$2^{13} * 4099$
2147680256	$2^{16} * 32771$
8590327808	$2^{17} * 65539$
137440526336	$2^{19} * 262147$
144115189686468608	$2^{29} * 268435459$
2305843015656144896	$2^{31} * 1073741827$

$q = 2^{e-1} + 3$ が素数. ここの素数は数が比較的多いことが知られている.

8.4 $P = 2, m = 4$

指数が急に飛んでいる: ここからい異空間に飛んだ気がする.
$q = 2^{e-1} + 5$ が素数という条件.

表 12: $P = 2, m = 4$

a	素因数分解
28	$2^2 * 7$
208	$2^4 * 13$
2368	$2^6 * 37$
8409088	$2^{12} * 2053$
39614081257133576171655528448	$2^{48} * 140737488355333$
162259276829213453463570557698048	$2^{54} * 9007199254740997$

9 φ 完全数の平行移動の方程式

$q = \varphi(P^e) + 1 + m, e > 1$ が素数になるとき $a = P^e q$ とする. (m が負の場合もいれているので, $q > P$ を仮定する.)

$$\begin{aligned}\varphi(a) = \varphi(P^e q) &= P^{e-1}\overline{P}\overline{q} \\ &= P^e\overline{P}(q-1)/P \\ &= P^e q\overline{P}/P - P^{e-1}\overline{P} \\ &= \overline{P}a/P - (q-1-m).\end{aligned}$$

かくして $\mathrm{Maxp}(a) = q$ に注意し

$$\varphi(a) = \frac{\overline{P}}{P}a - \overline{\mathrm{Maxp}(a)} + m. \tag{2}$$

が得られた. 分母を払った次の式もよく使われる.

$$P\varphi(a) = \overline{P}a - P\overline{\mathrm{Maxp}(a)} + Pm. \tag{3}$$

が得られた.

$P = 2$ の場合は簡単になる.

$$2\varphi(a) = a - 2\overline{\mathrm{Maxp}(a)} + 2m. \tag{4}$$

これが m だけ平行移動した オイラー φ 完全数の方程式 $(*)$ である.

φ 完全数の方程式 $(*)$ で定義された数は必ずしも φ 完全数になるわけではない.

φ 完全数においては $q = \varphi(P^e) + 1 + m$ が素数になると仮定されているので $1 + m$ は P で割れない.

φ 完全数の方程式 自身を扱うとき $1+m$ は P で割れない, などのことにこだわらない. 実際に $m=P-1$ の場合が重要な結果を与えるのである.

これが m だけ平行移動した オイラー φ 完全数の方程式 $(*)$ を満たす解が m だけ平行移動した広義のオイラー φ 完全数である.

10　計算例

広義のオイラー φ 完全数は狭義のオイラー φ 完全数に比べてどの程度異質なものがあるかここに興味がある．定義にしたがって地道に計算する．

11　m : 偶数

m : 偶数という条件は健全なものである．

オイラー φ 完全数の方程式の解を全数調査の方法で探す．$a < 1000000$ について

$$2\varphi(a) = a - 2\overline{\mathrm{Maxp}(a)} + 2m$$

を満たす a とその素因数分解を求める．

計算時間の関係で a は1000 万未満で探すのが適切である．

与えられた m, $e < 100$ について指数分を動かし，$p = 2^{e-1} + 1 + m$ が素数となる場合を調べることと比較するとはなはだ能率が悪い．

11.1　$P = 2, m = -2$

表 13: $P = 2, m = -2$

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$
112	$2^4 * 7$
1984	$2^6 * 31$
32512	$2^8 * 127$

3,7,31,127 とメルセンヌ 素数が並ぶ．

11.2　$P = 2, m = 0$

3,5,17,257 とフェルマ 素数が並ぶ．

表 14: $P = 2, m = 0$

a	素因数分解
12	$2^2 * 3$
40	$2^3 * 5$
544	$2^5 * 17$
131584	$2^9 * 257$

表 15: $P = 2, m = 2$

a	素因数分解
20	$2^2 * 5$
56	$2^3 * 7$
176	$2^4 * 11$
608	$2^5 * 19$
8576	$2^7 * 67$
33536	$2^8 * 131$

表 16: $P = 2, m = 4$

a	素因数分解
28	$2^2 * 7$
208	$2^4 * 13$
2368	$2^6 * 37$

表 17: $P = 2, m = 6$

a	素因数分解
88	$2^3 * 11$
736	$2^5 * 23$
9088	$2^7 * 71$
134656	$2^9 * 263$

11.3 $P = 2, m = 2$

11.4 $P = 2, m = 4$

11.5 $P = 2, m = 6$

$$e = 3, q = 2^{e-1} + 1 + 6 = 2^{e-1} + 7 = 11, q = 2^3 q :$$

$m = -2, 0, 2, 4, 6$ とした場合, 解 a は $a = 2^e q, q = 2^{e-1} + 1 + m$:素数の形なので想定された形の解が出てくるのみである.

せっかく広義のオイラ完全数を探したのだが無駄であった. そこでこのことの証明を試みる.

12　φ 完全数の方程式の解

13　微小解

$m=0$ のとき $P=Maxp(a)$ とおくと $a=Pq(P>q:)$ 素数, は

$$\varphi(a)=\frac{\overline{P}a}{P}-\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$$

の解になることは一般的に証明できる.

実際, $\varphi(a)=\overline{P}\overline{q}$, $\mathrm{Maxp}(a)=P$ によって

$$\frac{\overline{P}a}{P}-\overline{\mathrm{Maxp}(a)}=\overline{P}q-\overline{P}=\overline{P}\overline{q}=\varphi(a).$$

よって $\varphi(a)=\dfrac{\overline{P}a}{P}-\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$.

$m=0$ のときの解 $a=Pq(P>q:)$ 素数) を微小解という. 微小解は φ 完全数の方程式 $(*)$ に特有の解である.

14　定理と証明

定理 1 $m\geq 0$ のとき

$$P\varphi(a)=\overline{P}a+Pm-P\overline{Maxp(a)}$$

を満たす解は

1. $m=0$ のとき微小解 $a=Pq(P>q)$ となる.
2. $m=P-1$ のときの微小解 $a=P^e$.
3. $e>1$ のとき a は $(\varphi,m)-$ 完全数
4. $e=1$ のとき $a=Pq$, $q=P+m$ は素数.

Proof.

a は定義式より P の倍数なので $a=P^eL$　(P,L は互いに素)　と書ける. よって次式を満たす:

$$P\varphi(a)=P^e\overline{P}\varphi(L),\overline{P}a=P^e\overline{P}L.$$

$L=1$ のとき $a=P^e$, $P\varphi(a)=P^e\overline{P}=\overline{P}a,\mathrm{Maxp}(a)=P$ なので

$$P\varphi(a) = P^e\overline{P}, \overline{P}a + Pm - P\overline{\mathrm{Maxp}(a)} = \overline{P}P^e + Pm - P\overline{P}$$

により $Pm - P\overline{P} = 0$. P で除して,$m = P - 1$.

$L \geq 2$ のとき $a = P^e L$.
$P\varphi(a) = P^e\overline{P}\varphi(L), \overline{P}a = P^e\overline{P}L$ なので

$$P\varphi(a) - \overline{P}a = -P^e\overline{P}(L - \varphi(L)) = Pm - P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}.$$

P で除して

$$\overline{\mathrm{Maxp}(a)} = P^{e-1}\overline{P}(L - \varphi(L)) + m.$$

(1) L が素数でないとき.
$L - \varphi(L) \geq \mathrm{Maxp}(L)$ を用いて

$$\overline{\mathrm{Maxp}(a)} = P^{e-1}\overline{P}(L - \varphi(L)) + m \geq P^{e-1}\overline{P}(\mathrm{Maxp}(L)).$$

(a) $P > \mathrm{Maxp}(L)$ の場合,$\mathrm{Maxp}(a) = P, \mathrm{Maxp}(L) \geq 2$.

$$\overline{P} = P - 1 = \overline{\mathrm{Maxp}(a)} \geq P^{e-1}\overline{P}(\mathrm{Maxp}(L)) \geq 2\overline{P}.$$

(b) $P < \mathrm{Maxp}(L)$ の場合,$\mathrm{Maxp}(a) = \mathrm{Maxp}(L) \geq 2$.

$$\overline{\mathrm{Maxp}(L)} = \overline{\mathrm{Maxp}(a)} \geq P^{e-1}\overline{P}(\mathrm{Maxp}(L)) \geq \mathrm{Maxp}(L).$$

かくて矛盾.
(2) L が素数 q のとき.
$m \geq 0$ なので

$$\overline{\mathrm{Maxp}(a)} = P^{e-1}\overline{P}(L - \varphi(L)) + m = P^{e-1}\overline{P}(q - \varphi(q)) + m \geq P^{e-1}\overline{P}.$$

$a = P^e q$ なので $\mathrm{Maxp}(a) = P$ または $\mathrm{Maxp}(a) = \mathrm{Maxp}(q) = q$.

(a) $\mathrm{Maxp}(a) = P$ とすると,

$$\overline{P} = \overline{\mathrm{Maxp}(a)} = P^{e-1}\overline{P} + m.$$

これより, $e = 1, m = 0, P > q$. $a = Pq$ は微小解.

(b) $\mathrm{Maxp}(a) = q$ とすると,

$$\overline{q} = \overline{\mathrm{Maxp}(a)} = P^{e-1}\overline{P} + m.$$

これより, $q = P^{e-1}\overline{P} + 1 + m$. $e > 1$ のとき a は $(\varphi, m)-$ 完全数.

$e = 1$ のとき $q = P + m, a = Pq$.

このようにして, $m \geq 0$ の場合にはオイラーの φ 完全数の基本問題は解決した.

しかし解決しても問題がなくなって困る. そこで $m < 0$ の場合について $P = 2$ に限って詳しく調べることにした. そこには思いのほか豊穣の大地が広がっていた.

オイラーの φ 完全数 についての方程式は次のとおり:

$$P\varphi(a) = \overline{P}a + Pm - P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$$

ここでは $P = 2$ の場合をとくに扱う. φ 完全数 についての方程式は次のように簡単になる.

$$2\varphi(a) = a + 2m - 2\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$$

m : 奇数のとき個々にパソコンによる計算で調べる.