書泉グランデでの講義
高校生も十分わかる新しい数論研究
New Series, 第3期　資料1B
2016 年6月24日

飯高 茂

平成28 年6 月19 日

オイラーの φ 完全数 についての方程式は次のとおり:

$$P\varphi(a) = \overline{P}a + Pm - P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$$

ここでは $P = 2$ の場合をとくに扱う. φ 完全数 についての方程式は次のように簡単になる.

$$2\varphi(a) = a + 2m - 2\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$$

m : 奇数のとき個々にパソコンによる計算で調べる.

1 m : 奇数

m : 奇数, しかもこれが負の場合を扱う.

狭義の オイラーの φ 完全数 によれば $P = 2$ のとき $q = 2^{e-1} + 1 + m$ は素数なので m :偶数なのは当然である. しかし方程式 $2\varphi(a) = a + 2m - 2\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$ ができた以上, m : 奇数の場合も扱ってやりたい.

このようにありえない場合について探求することはきわめて興味深い. ここから出てくるものは何だろうか. ツチノコを探すような気分になる.

$S = -m$ とおく. $q = \mathrm{Maxp}(a)$ として最大素因子 q を導入すると φ 完全数 についての方程式は

$$2\varphi(a) = a - 2S - 2(q - 1).$$

a は偶数になるので $a = 2^e L$(L : 奇数) とおくとき

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = S - 1 + q.$$

S : 奇数なので $S - 1 + q$ も奇数. よって $e = 1; a = 2L$.

したがってこの場合 φ 完全数 についての方程式は次のようにごく簡単になる:

$$\mathrm{co}\varphi(L) = S - 1 + q.$$

1.1 $S = 1$

$S = 1$ のとき φ 完全数 についての方程式

$$\mathrm{co}\varphi(L) = q$$

を解く.

オイラーの余関数を調べていたので結果は簡単である:

$L=q^2$ が解. したがって $a=2q^2$.

$2\varphi(a)=a-2q$ なら $a=2q^2$ 　となるこの結果は美しい (証明は後で与える).

1.2 $S=3$

$S=3$ 　のとき φ 完全数 についての方程式を解く.

$a<1000000$ の範囲でパソコンによる解の全数調査をする.

結果として解が無数にでるがみな $a=6q,(q>3)$ の形をしている. これを通常解という.

表 1: $P=2,S=3$

a	素因数分解
$6q,(q>3)$	$2*3*q$

2 通常解

$S=p$: 奇素数のとき, $p<q$: 奇素数 について $L=pq$ は

$\mathrm{co}\varphi(L)=p+q-1$, $S-1+q=p-1+q$ により $\mathrm{co}\varphi(L)=S-1+q$ 　を満たす.

$a=2pq$ は次式の解でこれが通常解である.

$$2\varphi(a)=a-2p-2(q-1).$$

このように, $S=p$: 奇素数のとき通常解 $a=2pq$ がある.

$S=p$: 合成数のとき通常解はないが散発的な解はありうる. これらの非通常解を見出すことが興味ある課題である.

2.1 $S = 5$

表 2: $P = 2, m = -5$

a	素因数分解
$10q, (q > 5)$	$2 * 5 * q$

$a = 10q, (q > 5)$ の形の通常解ばかり出る.

2.2 $S = 7$

表 3: $P = 2, m = -7$

a	素因数分解
54	$2 * 3^3$
$14q, (q > 7)$	$2 * 7 * q$

通常解 $14q = 2 * 7 * q$ 以外に $54 = 2 * 3^3$ が最初にでてきた解で, これが非通常解.

非通常解の決定問題は興味ある問題である.

2.3 $S = 11$

表 4: $P = 2, m = -11$

a	素因数分解
$22q, (q > 11)$	$2 * 11 * q$

$14q = 2 * 11 * q$ が通常解

2.4 $S = 13$

表 5: $P = 2, m = -13$

a	素因数分解
$26q, (q > 13)$	$2 * 13 * q$

2.5 $S = 17$

表 6: $P = 2, m = -17$

a	素因数分解
90	$2 * 3^2 * 5$
$34q, (q > 19)$	$2 * 17 * q$

パソコンで出した結果, $m = -17$ のとき $a = 2 * 17 * q$ という解以外に $a = 90 = 2 * 3^2 * 5$ が出てきた. これを非通常型の解という.

2.6 $S = 21$

表 7: $P = 2, m = -21$

a	素因数分解
126	$2 * 3^2 * 7$
250	$2 * 5^3$

21 は素数ではないので通常解はない. 非通常解は 2 つある.

$S = 9$ および $S = 15$ のときは解がない.

2.7 $S = 23$

表 8: $P = 2, m = -23$

a	素因数分解
$46q, (q > 23)$	$2 * 23 * q$

2.8 $S = 25$

表 9: $P = 2, m = -25$

a	素因数分解
162	$2 * 3^4$

$25 = 5^2$ は素数ではない. 通常解はない.

2.9 $S = 29$

表 10: $P = 2, m = -29$

a	素因数分解
198	$2 * 3^2 * 11$
1798	$2 * 29 * 31$
$58q, (q > 29)$	$2 * 29 * q$

$198 = 2 * 3^2 * 11$ が非通常型

2.10 $S = 31$

表 11: $P = 2, m = -31$

a	素因数分解
64	2^6
150	$2 * 3 * 5^2$
$62q, (q > 31)$	$2 * 31 * q$

$64 = 2^6, 150 = 2 * 3 * 5^2$ が非通常型
$62q = 2 * 31 * q$ が通常型

3 証明

以上の結果はパソコンでの計算なのでこれから証明を行う.

$S=1$ のとき.

$$\mathrm{co}\varphi(L)=q$$

が方程式でこれを解けばよい. q は L の最大素因子で, L は奇数.

$s(L)=1$.

$L=q^j$ とおくとき, $\mathrm{co}\varphi(L)=q^{j-1}=q$ により $j=2$.

$s(L)\geq 2$.

$L=q^j\mu,(q>\mathrm{Maxp}(\mu))$ と書き, $\mu_0=\mathrm{co}\varphi(\mu)$　とおくとき $\mathrm{co}\varphi(L)=q^{j-1}(\mu+\overline{q}\mu_0=q$.

これにより $j=1$. $\mu+\overline{q}\mu_0>q$ が成り立つのでこれはおきない.

よって, 奇素数 q に関して $L=q^2,a=2q^2$.

$S=3,5$ のときは同様にできるので略して, 非通常解の出る最初に $S=7$ を扱う.

3.1 $S=7$

$$\mathrm{co}\varphi(L)=S-1+q=6+q$$

が方程式でこれを解けばよい. q は L の最大素因子で, L は奇数.

$L=q^j,j\geq 2$ とおくとき,

$\mathrm{co}\varphi(L)=q^{j-1}=q+S$, によって, $j=3,q^2-q=6$. これより非通常解 $a=2*3^3$ がでる.

$L=q\mu,q>\mathrm{Maxp}(\varphi(\mu))$ の場合. $\mu_0=\mathrm{co}(\mu)$ とおくとき $\mathrm{co}\varphi(L)=(q-1)\mu_0+\mu$ となる.

$\mu_0=1$.

$\mathrm{co}\varphi(L)=q+\mu-1$ なので $q+\mu-1=q+6$. よって, $\mu=7$. $q>\mu=7$ が条件で $a=2*7q=14q$. これは通常解.

μ が非素数なら, μ は奇数なので　1) $\mu_0=3,\mu=9$,2) $\mu_0=5,\mu=25$, 3) $\mu_0=7,\mu=49,35$ 等.

1) $\mu_0\geq 3,\mu$:非素数のとき, $\mu\geq 9$.

$$\mathrm{co}\varphi(L) \geq 3q+6, \mathrm{co}\varphi(L) = q+6 \geq 3q+6.$$

これは不成立.

3.2 $S = 17$

$$\mathrm{co}\varphi(L) = S - 1 + q = 16 + q$$

が方程式

$L = q^j, j \geq 2$ とおくとき,

$\mathrm{co}\varphi(L) = q^{j-1} = q+16$, によって, $q^{j-1} - q = 16$. これより $j = 3, q(q-1) = 16$. 不成立

μ が素数なら　$\mu_0 = 1$.

$q + \mu - 1 = q + 16$. よって, $\mu = 17$. $q > \mu = 17$ が条件で $a = 2 * 17q = 34q$. これは通常解.

μ が非素数なら

1) $\mu_0 = 3, \mu = 9$ のとき,

$$\mathrm{co}\varphi(L) = 3q+6, \mathrm{co}\varphi(L) = q+16.$$

$3q + 6 = q + 16$ により $2q = 10$. したがって $q = 5, a = 2 * 3^2 * 5$.

3.3 $S = 21$

$$\mathrm{co}\varphi(L) = S - 1 + q = 20 + q$$

が方程式

$L = q^j, j \geq 2$ とおくとき,

$\mathrm{co}\varphi(L) = q^{j-1} = q+20$, によって, $q^{j-1} - q = 20$. これより $j = 3, q(q-1) = 20$. $q = 5, a = 2 * 5^3$.

μ が素数なら　$\mu_0 = 1$.

$q + \mu - 1 = q + 20$. よって, $\mu = 21$. 素数でないから解がでない.

μ が非素数なら

1) $\mu_0 = 3, \mu = 9$ のとき,

$$\mathrm{co}\varphi(L) = 3q+6, \mathrm{co}\varphi(L) = q+20.$$

$3q + 6 = q + 20$ により $2q = 14$. したがって $q = 7, a = 2 * 3^2 * 7$.

3.4 $S = 31$

$$\mathrm{co}\varphi(L) = S - 1 + q = 30 + q$$

が方程式

$L = q^j, j \geq 2$ とおくとき,

$\mathrm{co}\varphi(L) = q^{j-1} = q + 30$, によって, $q^{j-1} - q = 30$. これより $q(q^{j-2} - 1) = 30$. $q = 2$ とおくと,$q^{j-2} - 1 = 2^{j-2} - 1 = 15$. よって, $j - 2 = 4, j = 6; L = 2^6$.

$L = q^2\mu$ とおくとき,

$\mathrm{co}\varphi(L) = q(\overline{q}\mu_0 + \mu) = q + 30$.

μ が素数なら $\mu_0 = 1$. $q(q + \mu - 1) = q + 30$. $q(q + \mu - 2) = 30$, により $q = 5, q + \mu - 2 = 3 + \mu = 6.\mu = 3$.

$a = 2 * 3 * 5^2$.

$L = q\mu$ とおくとき,

$$\mathrm{co}\varphi(L) = \overline{q}\mu_0 + \mu = q + 30.$$

μ が素数なら

$q + \mu - 1 = q + 30$. よって, $\mu = 31$. 素数なので解は $a = 2 * 31q, (q > \mu)$.

μ が非素数なら

1) $\mu_0 = 3, \mu = 9$ のとき,

$$\mathrm{co}\varphi(L) \geq 3q + 6, \mathrm{co}\varphi(L) = q + 30 \geq 3q + 6.$$

$q = 12$ により矛盾.

2) $\mu_0 \geq 5, \mu \geq 25$ のとき,

$$\mathrm{co}\varphi(L) = \mu + \overline{q}\mu_0 \geq 5q + 20, \mathrm{co}\varphi(L) = q + 30 \geq 5q + 20.$$

$10 \geq 4q$ により矛盾.

4 S : 偶数

4.1 $0 < -m$: 偶数

4.2 $P = 2, m = -2$

以上の場合は, パソコンによる全数調査の結果. $m = -2; q = 2^{e+1} - 1$: 素数の場合については wxmaxima を用いて, 指数 $e < 21$ について調べると結果はすぐ出る.

以上からこれらはユークリッドの完全数の 4 倍であることがわかる.

表 12: $P = 2, m = -2$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
24	$[2^3, 3]$	8
112	$[2^4, 7]$	48
1984	$[2^6, 31]$	960
32512	$[2^8, 127]$	16128

表 13: $P = 2, m = -2; q = 2^{e-1} - 1, a = 2^e q$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	24	$2^3 * 3$	8
4	112	$2^4 * 7$	48
6	1984	$2^6 * 31$	960
8	32512	$2^8 * 127$	16128
14	134201344	$2^{14} * 8191$	67092480
18	34359476224	$2^{18} * 131071$	17179607040
20	549754765312	$2^{20} * 524287$	274876858368

表 14: $P = 2, m = -4$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
36	$[2^2, 3^2]$	12
80	$[2^4, 5]$	32
416	$[2^5, 13]$	192
1856	$[2^6, 29]$	896
7808	$[2^7, 61]$	3840

$m = -4$ なら

$$2\varphi(a) = a - 6 - 2q.$$

$a = 2^e L$, L : 奇数, とおくとき

$$2^e \mathrm{co}\varphi(L) = 2(3 + q).$$

1. L : 素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L) = 1$ により ,
$2^{e-1} = 3 + q$. $q = 2^{e-1} - 3$. これより, $e = 4, q = 5$, など

2. L : 非素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L) \geq q$ により ,

$$2^e \mathrm{co}\varphi(L) = 2(3 + q) \geq 2^e q.$$

$3 + q \geq 2^{e-1} q$ になる. ゆえに
$3 \geq (2^{e-1} - 1)q$. $e \geq 2$ のとき $q = 3, e = 2$ のみが解.

表 15: $P = 2, m = -4; q = 2^{e-1} - 3$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	8	2^3	4
4	80	$2^4 * 5$	32
5	416	$2^5 * 13$	192
6	1856	$2^6 * 29$	896
7	7808	$2^7 * 61$	3840
10	521216	$2^{10} * 509$	260096
11	2091008	$2^{11} * 1021$	1044480
13	33529856	$2^{13} * 4093$	16760832
15	536772608	$2^{15} * 16381$	268369920
21	2199016964096	$2^{21} * 1048573$	1099507433472

$a = 36 = 2^2 * 3^2$ のみが非通常解. それ以外は $a = 2^e q$ とかける解.

表 16: $P = 2, m = -6$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
48	$[2^4, 3]$	16
100	$[2^2, 5^2]$	40
352	$[2^5, 11]$	160
7552	$[2^7, 59]$	3712
128512	$[2^9, 251]$	64000

表 17: $P = 2, m = -6; q = 2^{e-1} - 5$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
4	48	$2^4 * 3$	16
5	352	$2^5 * 11$	160
7	7552	$2^7 * 59$	3712
9	128512	$2^9 * 251$	64000
11	2086912	$2^{11} * 1019$	1042432
13	33513472	$2^{13} * 4091$	16752640
19	137436332032	$2^{19} * 262139$	68717903872

$a = 100 = 2^2 * 5^2$ のみが非通常解. それ以外は $a = 2^e q$ とかける解.

表 18: $P = 2, m = -8$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
196	$[2^2, 7^2]$	84

この場合は異常に解が少ない.
指数 $e = 40$ で解が発見された. 何という僥倖!.

表 19: $P = 2, m = -8; q = 2^{e+1} - 7$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
40	604462909799618005958656	$2^{40} * 549755813881$	X

$X = 302231454899259247165440$

表 20: $P=2, m=-10$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
60	$[2^2,3,5]$	16
72	$[2^3,3^2]$	24
224	$[2^5,7]$	96
1472	$[2^6,23]$	704

非通常解は　$a=60=[2^2,3,5]$, $a=72=[2^3,3^2]$.

表 21: $P=2, m=-10; q=2^{e-1}-9$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
5	224	2^5*7	96
6	1472	2^6*23	704
10	515072	$2^{10}*503$	257024
12	8351744	$2^{12}*2039$	4173824
18	34357379072	$2^{18}*131063$	17178558464

表 22: $P=2, m=-12$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
84	$[2^2,3,7]$	24
160	$[2^5,5]$	64
484	$[2^2,11^2]$	220
6784	$[2^7,53]$	3328

$a=84=[2^2,3,7]$, $a=484=[=2^2,11^2]$ は非通常解.

5　$P=2, S=-m$: 正の偶数のときの解の証明

$P=2$ のとき方程式は

$$2\varphi(a)=a+2m-2(q-1), q=\mathrm{Maxp}(a)$$

により

表 23: $P=2, m=-12; q=2^{e-1}-11$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
5	160	$2^5 * 5$	64
7	6784	$2^7 * 53$	3328
11	2074624	$2^{11} * 1013$	1036288
19	137433186304	$2^{19} * 262133$	68716331008

$a=2^eL$, L : 奇数, とおくとき

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=2q-2-2S.$$

1. L : 素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L)=1$ により ,
$2^{e-1}=1+q$. $q=2^{e-1}-1$. これより, $e=3, q=3$, など

2. L : 非素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L)\geq q$ により ,

$$2^e\mathrm{co}\varphi(L)=2(1+q)\geq 2^eq.$$

$(1+q)\geq 2^{e-1}q$ になり矛盾.

$$2\varphi(a)=a+2m-2(q-1)=a-2S+2-2q$$

これより

$$2^{e-1}co\varphi(L)=q-1+S.$$

$S=10$ によって

$$2^{e-1}co\varphi(L)=q+9.$$

$L=q^2$ のとき

$$2^{e-1}q=q+9.$$

$e=2$ なら $q=9$ で矛盾.
$L=q\mu$ のとき
$\mathrm{co}\varphi(L)=(q-1)\varphi(L)=(q-1)\mu_0+\mu$.
$\mu_0=\mathrm{co}\varphi(\mu)$ とおいた.
$\mu_0=1$ なら μ:素数. $L=q\mu$ により

$$2^{e-1}(q+\mu-1)=q+9.$$

$e = 2$ のとき

$$2(q + \mu - 1) = q + 9.$$

$$q = 9 + 2 - 2\mu.$$

$\mu = 3$ なら $q = 5$. よって, $a = 2^2 * 3 * 5$.