これはすごいぞ

超完全数の発見

HYPER PERFECT NUMBERS

飯高 茂

1. はじめに

m が偶数の場合,劣完全数の問題 :「 $2\sigma(a) = 3a - m$ のとき a の決定」を扱う予定であった

超完全数(hyper perfect number) が発見され

研究はうまく進んだ.

そこで順序を変えて今日超完全数について発表する.

2. $P=2$ のとき

$P=2$ のとき.以前に扱ったが考え方を整理するため再度考察する.

平行移動 m の元祖完全数の方程式

$$\sigma(a)-2a=-m$$

の解を調べる..

2.0.1. 第*1*完全数 *6*. 6は完全数.

$-m=2*6=12$ なので

$\sigma(a)-2a=12$ の解を調べる.

```
24,factor(24)=2^3*3
30,factor(30)=2*3*5
42,factor(42)=2*3*7
54,factor(54)=2*3^3
66,factor(66)=2*3*11
78,factor(78)=2*3*13
102,factor(102)=2*3*17
```

無数の解が出てくる.

$a=6p$ の形をしている. これらを通常解, または B 型解という.

$a=6p$ の形をしていない解もある.

$a=24=2^3*3, a=54=2*3^3$ も解であり,

これらは擬素数解と呼ばれる.

その心は

$24=2^3*3=6X$, $X=4$ と書ける.

通常解 $6p$ の形が少し, 崩れて $X=4$ とおくとき $6X$ であり,

$4=2^2$ が素数ではないのが残念なので, 4 を擬素数と考えて,$6X$ を擬素数解という.

$54=2*3^3$ も $54=6Y$, $Y=9$ と書けるので擬素数解という.

$\sigma(a)-2a=12$ の解として出てくる擬素数解はこれらの 24,54 だけである.

次に 6 で割れない場合の解を探して列挙した結果は驚くべきものであった.

```
304,factor(304)=2^4*19
127744,factor(127744)=2^8*499
```

3. A 型解

$304 = 2^4 * 19, 127744 = 2^8 * 499$　らは正規形の解,
すなわち $2^e q, (q :$素数$)$ と書ける解
A 型解 ともいう.

$\sigma(a) - 2a = 12$ の A 型解 $a = 2^e q$ を探そう.
$N = 2^{e+1} - 1$ とおくとき,
$\sigma(a) - 2a = \sigma(2^e q) - 2 * 2^e q = N(q+1) - (N+1)q = N - q$ になる.

$\sigma(a) - 2a = 12$ を使うと, $N - q = 12$. これより $q = 2^{e+1} - 13$.
$m = -12$ だけ平行移動した狭義の完全数.

TABLE 1. $P = 2, m = -12$; 平行移動した狭義の完全数

e	a	factor
3	24	$2^3 * 3$
4	304	$2^4 * 19$
8	127744	$2^8 * 499$
12	33501184	$2^{12} * 8179$
16	8589082624	$2^{16} * 131059$
56	10384593717069654320312270165377024	$2^{56} * 144115188075855859$

$e > 3$ のとき e は 4の倍数, $a \equiv 4 \bmod 10, q \equiv q \bmod 10$
証明が容易にできる.

(1) A 型解 は無限にあるか.

(2) $\sigma(a) - 2a = 12$ の解は通常解,擬素数解,A 型解のほかにあるか.

私の常識では証明できない問題である.

3.0.2. 第 *2* 完全数 *28*. 第2完全数 28 の場合,

$\sigma(a) - 2a = 56$ の解を調べる.

```
224,factor(224)=2^5*7
308,factor(308)=2^2*7*11
364,factor(364)=2^2*7*13
476,factor(476)=2^2*7*17
532,factor(532)=2^2*7*19
644,factor(644)=2^2*7*23
812,factor(812)=2^2*7*29
868,factor(868)=2^2*7*31
1036,factor(1036)=2^2*7*37
1148,factor(1148)=2^2*7*41
1204,factor(1204)=2^2*7*43
1316,factor(1316)=2^2*7*47
1372,factor(1372)=2^2*7^3
```

$a = 28p$ が通常解,(B 型解という).

$a = 224 = 2^5 * 7, a = 1372 = 2^2 * 7^3$ は擬素数解.

28 で割れない場合の解を列挙した.

```
4544,factor(4544)=2^6*71
9272,factor(9272)=2^3*19*61
14552,factor(14552)=2^3*17*107
25472,factor(25472)=2^7*199
74992,factor(74992)=2^4*43*109
495104,factor(495104)=2^9*967
```

$a = P^e rs$ の形の解を第二正規形の解, または D 型の解.

$\sigma(a) - 2a = 56$ の解を種類で分類.

(1) A 型解 $4544 = 2^6 * 71, 25472 = 2^7 * 199, 495104 = 2^9 * 967$

(2) D 型解 $9272 = 2^3 * 19 * 61$, $14552 = 2^3 * 17 * 107$, $74992 = 2^4 * 43 * 109$

TABLE 2. $P = 2, m = -56 = -2 * 28$;28 は第二完全数, 正規形の解

e	a	factor
5	224	$2^5 * 7$
6	4544	$2^6 * 71$
7	25472	$2^7 * 199$
9	495104	$2^9 * 967$
15	2145615872	$2^{15} * 65479$
18	137424011264	$2^{18} * 524231$
21	8795973484544	$2^{21} * 4194247$
27	36028789368553472	$2^{27} * 268435399$
42	38685626227417444939464704	$2^{42} * 8796093022151$
45	2475880078568755040589185024	$2^{45} * 70368744177607$

(1) A 型解 は無限にあるか.

(2) D 型解 は無限にあるか.

(3) $\sigma(a) - 2a = 56$ の解は通常解,擬素数解,A 型解,D 型解のほかにあるか.

TABLE 3. $P = 2, m = -56 = -2 * 28$; 第二正規形の解 (D 型の解)

e	a	factor
3	14552	$2^3 * 17 * 107$
3	9272	$2^3 * 19 * 61$
4	74992	$2^4 * 43 * 109$
6	35019968	$2^6 * 131 * 4177$
6	15317696	$2^6 * 137 * 1747$
6	6019264	$2^6 * 163 * 577$
7	53032832	$2^7 * 317 * 1307$

3.0.3. 第*3*完全数 *496*. 第3完全数 $496 = 2^4 * 31$ の場合,

$a = 496p$ は通常解,

```
1488,factor(1488)=2^4*3*31
2480,factor(2480)=2^4*5*31
2892,factor(2892)=2^2*3*241
3472,factor(3472)=2^4*7*31
5456,factor(5456)=2^4*11*31
6104,factor(6104)=2^3*7*109
6448,factor(6448)=2^4*13*31
8432,factor(8432)=2^4*17*31
9424,factor(9424)=2^4*19*31
中略
14384,factor(14384)=2^4*29*31
15872,factor(15872)=2^9*31
18352,factor(18352)=2^4*31*37
20336,factor(20336)=2^4*31*41
21328,中略
469712,factor(469712)=2^4*31*947
472688,factor(472688)=2^4*31*953
476656,factor(476656)=2^4*31^3
479632,factor(479632)=2^4*31*967
481616,factor(481616)=2^4*31*971
```

$a=15872=2^9*31, a=476656=2^4*31^3$ は擬素数解.
そこで496 で割れない場合の解を列挙した.

```
2892,factor(2892)=2^2*3*241
6104,factor(6104)=2^3*7*109
170612,factor(170612)=2^2*13*17*193
458144,factor(458144)=2^5*103*139
857312,factor(857312)=2^5*73*367
1006496,factor(1006496)=2^5*71*443
1764512,factor(1764512)=2^5*67*823
```

D 型解のオンパレードだが$a=170612=2^2*13*17*193$ は $P^e rsq$ の形で新種である.

A 型解はさらに大きくなるが存在は確か.

3.1. **B 型解と完全数の関係.**

$$\sigma(a) - 2a = -m$$

にB型解 $a = \alpha p$ (ここで α は定数) $(p, \alpha$:互いに素) があるとする. $\alpha < p$ とし一般の素数と考える.

$\sigma(a)-2a = \sigma(\alpha p)-2\alpha p = \sigma(\alpha)(p+1)-2\alpha p = (\sigma(\alpha)-2\alpha)p+\sigma(\alpha)$

$\sigma(a) - 2a = -m$ を思い出すと

$$(\sigma(\alpha) - 2\alpha)p + \sigma(\alpha) = -m$$

ゆえに

$$(\sigma(\alpha)-2\alpha)p=-\sigma(\alpha)-m$$

ここで p は無数にあるので$\sigma(\alpha)-2\alpha=0$ かつ $\sigma(\alpha)=-m$ が成り立つ.

$\sigma(\alpha)-2\alpha=0$ により αは完全数.

ここで2000年来の大難問「奇数完全数の不存在」を仮定する

オイラーにより α は正規形の解になる.

そこで $\alpha = 2^e r, (r = 2^{e+1} - 1$:素数$)$ と書ける.

$\sigma(\alpha) = 2\alpha$ なので, $m = -2\alpha$.

定理 1. $\sigma(a)-2a=-m$ に B型解 $a=\alpha p$ ($\alpha<p$ は任意の素数) があるとき α は完全数, $m=-2\alpha$.

完全数の平行移動でできた式 $\sigma(a)-2a=-m$ に
B 型解 αp があるとすると
定数 α は完全数になる.

こうして完全数が正式な晴れ舞台にたったのである.
私はこの不思議さに言葉を失った.
そして,これを一般の底の場合にも考えようと思うに至った. これが超完全数の発見に至る入り口になった.

3.2. **逆行.** 話を逆行させせる.

α を完全数とし, $m = -2\alpha$ と定める. $\alpha < p$ となる素数 p をとり $a = \alpha p$ とおく.

$$\sigma(a) = \sigma(\alpha)(p+1) = 2\alpha(p+1) = 2a + 2\alpha = 2a - m.$$

$\sigma(a) - 2a = -m$ を a についての方程式とみなすとB 型解 $a = \alpha p$ がでてきた.

正規解, A 型解を考えてみたい.

$q = 2^e q, (q > 2 : \text{素数})$ とおく.

$N = 2^{e+1} - 1$ とおけば

$\sigma(a) = N(q+1), 2a = (N+1)q$ によって,

$\sigma(a) - 2a = N - q = -m$ なので $q = N + m = 2^{e+1} - 1 + m$

$2^{e+1} - 1 + m$ が素数となる e があれば$q = 2^{e+1} - 1 + m$ を定めると,

$q = 2^e q$ により A 型解(エイリアン)ができる.

また$q = 2^e qr$ と書ける D 型解(エイリアン)もでてくるかもしれない.

実際, 第2完全数 28 の場合にも起きる.

4. $P = 2$ のときの全体像

m: 偶数の場合.

Table 4. $P = 2, m = 0$; 元祖完全数

a	factor
6	$2 * 3$
28	$2^2 * 7$
496	$2^4 * 31$
8128	$2^6 * 127$

$a = 2^e q, (2 < q)$: 素数となるとき正規形の解, または A 型の解という.

Table 5. $P = 2, m = 2$; フェルマ完全数

a	factor
10	$2 * 5$
136	$2^3 * 17$
32896	$2^7 * 257$

4.1. フェルマ完全数. A 型

TABLE 6. $P = 2, m = 4$;

a	factor
5	5
14	$2 * 7$
44	$2^2 * 11$
110	$2 * 5 * 11$
152	$2^3 * 19$
884	$2^2 * 13 * 17$
2144	$2^5 * 67$
8384	$2^6 * 131$
18632	$2^3 * 17 * 137$

4.2. $P = 2, m = 4$. A,D,G(5) 型

5. 第二正規形の解

$a = 2^e rq, (2 < r < q)$: 素数となるとき第二正規形の解, または D 型の解という.

$a = p^e$ が $\sigma(a) - 2a = -m$ の解のとき G(p^e)型の解という.

このとき, $N = p^{e+1} - 1$ とおけば $\overline{p}\sigma(a) = 2p^e - m$. $N = (p-1)m + 2(p^e - 1)$.

$e = 1$ のとき, $p = m + 1$.

TABLE 7. $P = 2, m = 6;$

a	factor
7	7
15	$3 * 5$
52	$2^2 * 13$
315	$3^2 * 5 * 7$
592	$2^4 * 37$
1155	$3 * 5 * 7 * 11$

5.1. $P = 2, m = 6$. A,E$(3 * 5 * 7 * 11)$,G(7) 型

相異なる素数4個以上の積とかける解を E 型という.

Table 8. $P = 2, m = 8;$

a	factor
22	$2 * 11$
130	$2 * 5 * 13$
184	$2^3 * 23$
1012	$2^2 * 11 * 23$
2272	$2^5 * 71$
18904	$2^3 * 17 * 139$
33664	$2^7 * 263$
70564	$2^2 * 13 * 23 * 59$
85936	$2^4 * 41 * 131$

5.2. $P = 2, m = 8$. A,D,F$(2^2 * 13 * 23 * 59)$ 型

TABLE 9. $P = 2, m = 10$;

a	factor
11	11
21	$3 * 7$
26	$2 * 13$
68	$2^2 * 17$
656	$2^4 * 41$
2336	$2^5 * 73$
8768	$2^6 * 137$

5.3. $P = 2, m = 10$. A,F$(3 * 7)$,G(11),F$(3 * 7)$ 型

TABLE 10. $P = 2, m = 12;$

a	factor
13	13
45	$3^2 * 5$
76	$2^2 * 19$
688	$2^4 * 43$
8896	$2^6 * 139$

5.4. $P = 2, m = 12$. G(13),A 型

TABLE 11. $P = 2, m = 14;$

a	factor
27	3^3
34	$2 * 17$
232	$2^3 * 29$
34432	$2^7 * 269$

5.5. $P = 2, m = 14$. G(27),A 型

TABLE 12. $P = 2, m = 16$;

a	factor
17	17
38	$2 * 19$
92	$2^2 * 23$
170	$2 * 5 * 17$
248	$2^3 * 31$
752	$2^4 * 47$
988	$2^2 * 13 * 19$
2528	$2^5 * 79$
8648	$2^3 * 23 * 47$
12008	$2^3 * 19 * 79$
34688	$2^7 * 271$
63248	$2^4 * 59 * 67$

5.6. $P = 2, m = 16$. G(17),A,D 型

Table 13. $P = 2, m = 18;$

a	factor
19	19
33	$3 * 11$
105	$3 * 5 * 7$
33705	$3^2 * 5 * 7 * 107$

5.7. $P = 2, m = 18$. G(19),A,D,F($3^2 * 5 * 7 * 107$) 型

Table 14. $P = 2, m = 20;$

a	factor
46	$2 * 23$
154	$2 * 7 * 11$
190	$2 * 5 * 19$
2656	$2^5 * 83$
6490	$2 * 5 * 11 * 59$
44650	$2 * 5^2 * 19 * 47$

5.8. $P = 2, m = 20$. A,D,E$(2 * 5 * 11 * 59)$ 型

6. D 型のない場合

以上の結果を観察すると, m : 偶数なら A 型はある. しかし, $m/2$: 奇数なら D 型の解はない.

$\sigma(a) = 2a - m$ のときD 型の解 $a = 2^e rq$ があるとしよう.

$N = 2^{e+1} - 1, A = (r+1)(q+1), B = rq, \Delta = r+q$ とおくとき

$\sigma(a) = \sigma(2^e rq) = NA, 2a = (N+1)B, A = B + \Delta + 1$ を用いると

$$-m = \sigma(a) - 2a = NA - (N+1)B = N\Delta + N - B$$

により, $B - N\Delta = N + m$.

$r_0 = r - N, q_0 = q - N, B_0 = r_0 q_0$ とおくとき

$B_0 = (r - N)(q - N) = B - N\Delta + N^2$ を使うと

$B_0 - N^2 = B - N\Delta = N + m.$ $D = N(N+1) + m$ とおけば

$$B_0 = r_0 q_0 = D.$$

$N + 1 = 2^{e+1}$ により, $D = 2^{e+1}N + m.$

m : 偶数の場合 $m = 2L(, L$:奇数$)$ とおくと $r_0 q_0 = 2(2^e N + L)$ える.

N, r, q :奇数なので, r_0, q_0 はともに偶数. しかし $2^e N + L$ は奇数なので矛盾.

以上により次の結果が示された.

命題 1. m : 偶数の場合, $m/2$ 奇数なら D 型の解はない.

m :偶数のとき, 正規形の解 $a = 2^e q$ があるとする. $N = 2^{e+1} - 1$ とおくとき$\sigma(a) = \sigma(2^e q) = N(q+1), 2a = (N+1)q$ を用いると

$$-m = \sigma(a) - 2a = N(q+1) - (N+1)q = N - q$$

それゆえ,話を逆にして m :偶数のとき, $q = N + m = 2^{e+1} - 1 + m$ になるので e を動かすときいつか $2^{e+1} - 1 + m$ が素数になることを期待する.

そのとき正規形の解 $a = 2^e q$ ができる.

そこで根拠の乏しい注意を書くに留める.

注意 1. $m:$偶数のとき,$2^{e+1}-1+m$ が素数になる e がある.

たぶん正しいが証明は至難の業.

7. $P=3$ のときの 究極の完全数

$P=3$,平行移動 : m の究極の完全数の方程式は$2\sigma(a)=3a+q-2m$ になる.

私は, m をいろいろ動かしてパソコンで解を探した.

$m=-32$ のとき$a=21p,(7<p:$ 素数$)$ の解が無数に現れて驚かされた.

そこで $a=21p,(7<p:$ 素数$)$ はすべて解としよう.(したがって解は無限にある).

$\sigma(a)=\sigma(21p)=32(p+1), q=p$ なので,

$$2\sigma(a)-3a-q=64(p+1)-63p-p=64.$$

$2\sigma(a)-(3a+q)=-2m$ によれば, $m=-32.$

したがって $2\sigma(a)=3a+q+64$ には解 $a=21p$ が無数にある.

($q=$Maxp(a) とした.)

7.1. 数値例: $2\sigma(a) = 3a + q + 64$ の 解とその素因数分解

```
231,factor(231)=3*7*11
273,factor(273)=3*7*13
357,factor(357)=3*7*17
399,factor(399)=3*7*19
483,factor(483)=3*7*23
609,factor(609)=3*7*29
651,factor(651)=3*7*31
777,factor(777)=3*7*37
```

7000 と 8000 の間にはエイリアン $7209 = 3^4 * 89$ が隠れていた.

```
7077,factor(7077)=3*7*337
7209,factor(7209)=3^4*89
7287,factor(7287)=3*7*347
7329,factor(7329)=3*7*349
7413,factor(7413)=3*7*353
7539,factor(7539)=3*7*359
7707,factor(7707)=3*7*367
7833,factor(7833)=3*7*373
7959,factor(7959)=3*7*379
```

エイリアン $773469 = 3^6 * 1061$ が隠れていた.

```
772989,factor(772989)=3*7*36809
773241,factor(773241)=3*7*36821
773469,factor(773469)=3^6*1061
773493,factor(773493)=3*7*36833
773787,factor(773787)=3*7*36847
```

これは衝撃の事実であった.

7.2. **非通常解.** $a = 21p$ が通常解なので21 で割れない場合の解を列挙した. 結果は驚くべきものであった.

```
7209,factor(7209)=3^4*89
46719,factor(46719)=3^2*29*179
62169,factor(62169)=3*17*23*53
773469,factor(773469)=3^6*1061
```

A 型解 $a = 7209 = 3^4 * 89, a = 773469 = 3^6 * 1061$ のほかに
D 型解 $a = 46719 = 3^2 * 29 * 179$,
E 型解 $a = 62169 = 3 * 17 * 23 * 53$
が出てきた.

7.3. **A 型解 の探求.** $2\sigma(a)-(3a+q)=-64$ にA 型解 $a=3^e q,(3<q:$素数 $)$ があるとする. $N=3^{e+1}-1$ とおくとき $2\sigma(a)-3a-q=N(q+1)-(N+1)q-q=N-2q, 2\sigma(a)-3a-q=64$ により, $N=2q+64$.

$$q=\frac{3^{e+1}-1}{2}-32.$$

各 e について, $q=\frac{3^{e+1}-1}{2}-32$ の素因数分解の表.

e	q	factor
4	89	89
5	332	$2^2 * 83$
6	1061	1061
7	3248	$2^4 * 7 * 29$
8	9809	$17 * 577$
32	27795302832777729	27795302832777729

A 型解 $3^4 * 89\Gamma$, $3^6 * 1061$,$3^{61} * 27795302832777729$ が発見された.

8.　究極の完全数の方程式に B 型の解

底が素数 P ,平行移動 : m の究極の完全数の方程式

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}$$

においての解 $a = \alpha p$ (p, α :互いに素,$\alpha < p$) があるとする.
p は一般の素数なので無限にある. もちろん $q = p$ になる.

$$\begin{aligned}\overline{P}\sigma(a) - Pa &= \overline{P}\sigma(\alpha p) - P\alpha p \\ &= p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha) + \overline{P}\sigma(\alpha).\end{aligned}$$

$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}$ を使って

$$p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha) + \overline{P}\sigma(\alpha) = (P-2)p - m\overline{P}.$$

p でまとめると

$$p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha - (P-2)) = -\overline{P}\sigma(\alpha) - m\overline{P}.$$

p の係数 $\overline{P}\sigma(\alpha)-(P\alpha+(P-2))$ を 0 とおくと $\sigma(\alpha)=-m$.
ここで, $\overline{P}\sigma(\alpha)=P\alpha+P-2$ の解は正規形と仮定する. (正規形仮説)
その結果 $\alpha = P^f r$, (r:素数) となる. $W = P^{f+1}-1$ とおくと
$\overline{P}\sigma(\alpha)=W(r+1), P\alpha=(W+1)r.$

$$W = r + P - 2 \tag{1}$$

書き直して, $r = W - P + 2 = P^{f+1} - 1 - P + 2 = P^{f+1} - P + 1$.

$\alpha = P^f r$ は完全数の一般化である.

定義 1. $r = P^{f+1} - P + 1$ が素数のとき $\alpha = P^f r$ を狭義の超完全数 *(hyper perfect number)* という.

$P = 2$ なら $r = 2^{f+1} - 2 + 1 = 2^{f+1} - 1$ でこれが素数ならメルセンヌ素数という.

$P=3$, $\alpha=20,000,000$ まで調べたが超完全数には正規形の解しかでてこないらしい.

```
factor(21)=3*7
factor(2133)=3^3*79
factor(19521)=3^4*241
factor(176661)=3^5*727
```

最初の解は $\alpha=21$. $\sigma(\alpha)=32, -m\overline{P}=-64$.

8.1. **逆行, その２.** ここで話を逆行させる.

$\alpha = P^f r$ を超完全数とする.

$W = P^{f+1} - 1$ とおくと $r = W - P + 2$ は素数である. $\overline{P}\sigma(\alpha) = W(r+1)$ になる.

$m = -\sigma(\alpha)$ と m を定める.

$a = \alpha q, (q$ は α と互いに素な素数,$\alpha < q)$ に対して, $\overline{P}\sigma(a) = W(r+1)(q+1), Pa = (W+1)rq$ を使って

$$\begin{aligned}
\overline{P}\sigma(a) - Pa - (P-2)q &= W(r+1)(q+1) - (W+1)rq - (P-2)q \\
&= W(r+q+1) - rq - (P-2)q \\
&= q(W - r - P + 2) + W(r+1)
\end{aligned}$$

$W-r-P+2=0$ によって,

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa-(P-2)q=W(r+1).$$

$-\overline{P}m=\overline{P}\sigma(\alpha)=W(r+1)$ なので

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa-(P-2)q=-m\overline{P}.$$

$m=-\sigma(\alpha)$ について方程式$\overline{P}\sigma(a)-Pa-(P-2)q=-m\overline{P}$ の解$a=\alpha q,(q$ は α と互いに素な素数$)$が得られた. これはB 型解である.

8.2. 平行移動した超完全数.

8.3. 狭義の超完全数.

定義 2. $r = P^{f+1} - P + 1 + m$ が素数のとき,$\alpha = P^f r$ を底が素数 P ,平行移動 : m の狭義の超完全数という.

次にこの方程式を求める. $W = P^{f+1} - 1$ とおく. 定義により $r = P^{f+1} - P + 1 + m = W - P + m + 2.$

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = \overline{P}\sigma(P^f r) = W(r+1) = Wr + W.$$

$Wr = (P^{f+1} - 1)r = P\alpha - r$ により

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = Wr + W = P\alpha - r + W.$$

$r = W - P + m + 2$ により $W - r = P - 2 - m$ なので次の方程式をえる:

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + P - 2 - m.$$

定義 3. $\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + P - 2 - m$ の解を底が素数 P ,平行移動 : m の広義の超完全数という.

究極の完全数の場合と異なり $\mathrm{Maxp}(\alpha)$ が消えている点に注意したい.

8.4. **計算例.** $P=3$のとき方程式は

$$2\sigma(\alpha)=3\alpha+1-m.$$

$a=3^e q$ 　の形の解(A 型解)に限って求める.

TABLE 15. $P=3, m=0; a=3^e q$: 正規形

e	a	q
1	21	7
3	2133	79
4	19521	241
5	176661	727
8	129127041	19681
21	32825696737361637 1221	31381059607
36	A	B
40	C	D

A= 67585198634817522935331173030319681

B= 450283905890997361

C= 443426488243037769923934299701036035201

D= 3647299637717070786401

8.4.1. $P = 5, m = 0$ のとき.

$P = 5$ のとき $a = 1950625 = 5^4 * 3121$ が解になる.

TABLE 16. $P = 3, m = 0; a = 3^e q$: 正規形

e	a	q
4	1950625	3121
6	1220640625	78121
14	186264514898681640625	30517578121

Table 17. $P = 3, m = 2$;

a	factor
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7
6561	3^8
19683	3^9
59049	3^{10}
177147	3^{11}

8.4.2. $P = 3, m = 2$ のとき. このとき方程式は$2\sigma(a) = 3 - 1$ なので概完全数の場合で C 型解.

$\overline{P}\sigma(a) = Pa - 1$ の解は $a = P^e$ があり, この形でない解もあるがまとめて 概完全数という.

$P - 2 - m = -1$ のとき, $m = P - 1$ ならば概完全数.

TABLE 18. $P = 3, m = 4;$

a	factor
5	5
33	$3 * 11$
261	$3^2 * 29$
385	$5 * 7 * 11$
897	$3 * 13 * 23$
2241	$3^3 * 83$
26937	$3^2 * 41 * 73$
46593	$3^2 * 31 * 167$

8.4.3. $P = 3, m = 4$ のとき. $a = 5$ (G型解という) 以外は正規形(A 型解),第二正規形(D 型解), オビ(E 型解)しかでてこない.

8.4.4. G 型解. $a = p^e$ のように素数べきの解をG 型解 という.

$e = 1$ のとき $m + 1$ が素数なら $p = m + 1$ はG 型解 の例になる.

Table 19. $P = 3, m = 6;$

a	factor
7	7
39	$3 * 13$
279	$3^2 * 31$
178119	$3^5 * 733$

8.4.5. $P = 3, m = 6$ のとき.

TABLE 20. $P = 3, m = 10$;

a	factor
11	11
35	$5 * 7$
51	$3 * 17$
2403	$3^3 * 89$
20331	$3^4 * 251$
54723	$3 * 17 * 29 * 37$
68643	$3^2 * 29 * 263$
103683	$3 * 17 * 19 * 107$
5026563	$3^3 * 83 * 2243$
1060803	$3^3 * 101 * 389$

8.4.6. $P = 3, m = 10$ のとき. 第2正規形, すなわちD型解がでてきた.

Table 21. $P = 3, m = 12;$

a	factor
13	13
57	$3 * 19$
333	$3^2 * 37$
15609	$3 * 11^2 * 43$
179577	$3^5 * 739$

8.4.7. $P = 3, m = 12$ のとき.

TABLE 22. $P = 3, m = 14$;

a	factor
25	5^2

8.4.8. $P = 3, m = 14$ のとき．これは孤立解なのか?

TABLE 23. $P = 3, m = 16$;

a	factor
17	17
69	$3 * 23$
369	$3^2 * 41$
1221	$3 * 11 * 37$
20817	$3^4 * 257$
149765	$5 * 7 * 11 * 389$
180549	$3^5 * 743$

8.4.9. $P = 3, m = 16$ のとき.

TABLE 24. $P = 3, m = 18;$

a	factor
19	19
387	$3^2 * 43$
2619	$3^3 * 97$

8.4.10. $P = 3, m = 18$ のとき.

9. 超完全数の正規形解

TABLE 25. $P = 3, m = 0$; 正規形

e	a	factor
1	21	$3 * 7$
3	2133	$3^3 * 79$
4	19521	$3^4 * 241$
5	176661	$3^5 * 727$
8	129127041	$3^8 * 19681$
21	328256967373616371221	$3^{21} * 31381059607$
36	C	D
40	X	Y

C= 67585198634817522935331173030319681

$D = 3^{36} * 450283905890997361$

$X = 44342648824303776992393429970103603520 1$

$Y = 3^{40} * 36472996377170786401$

9.0.11. $P = 5, m = 0$ のとき.

TABLE 26. $P = 5, m = 0$; 正規形

e	a	factor
4	1950625	$5^4 * 3121$
6	1220640625	$5^6 * 78121$
14	186264514898681640625	$5^{14} * 30517578121$
46	A	B

A= 10097419586828951109270125635619606896398181561380624771118164062 5

B= $5^{46} * 7105427357601001858711242675781 21$

Table 27. $P = 7, m = 0$; 正規形

e	a	factor
1	301	$7 * 43$
2	16513	$7^2 * 337$
5	1977225901	$7^5 * 117643$
8	232630479398401	$7^8 * 40353601$
20	445676403263631954214364481888896001	$7^{20} * 558545864083284001$
24	A	B
32	C	D

9.0.12. $P = 7, m = 0$ のとき.

A= 25692357752105887808746198983595222283520 1

$B = 7^{24} * 13410686196639649008 01$

C= 8538323413450849900970017031314236699825783181086873601

$D = 7^{32} * 77309937197074445241370944 01$

10. 究極の完全数と超完全数

定義 4. $r = P^{e+1} - P + 1$ が素数のときこの素数を 底 P の超メルセンヌ素数という.

$P = 2$ のとき $r = 2^{e+1} - 1$ が素数のとき古典的なメルセンヌ素数.

10.0.13. $P = 3$ の超メルセンヌ素数. $P = 3$ のとき $r = 3^{e+1} - 2$ が素数のとき底 $P = 3$ の超メルセンヌ素数という.

```
e=1,factor(7)=7
e=3,factor(79)=79
e=4,factor(241)=241
e=5,factor(727)=727
e=8,factor(19681)=19681
```

10.0.14. $P = 5$ の超メルセンヌ素数.

```
e=4,factor(3121)=3121
e=6,factor(78121)=78121
e=14,factor(30517578121)=30517578121
```

10.0.15. $P=7$ の超メルセンヌ素数.

```
e=1,factor(43)=43
e=2,factor(337)=337
e=5,factor(117643)=117643
e=8,factor(40353601)=40353601
```

$N(r+1)+m\overline{P}=0$ 　を書き直すと $-m=(1+P+\cdots+P^e)(r+1)$.

このmについて次の方程式の解を求める.

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa=(P-2)q-m\overline{P}.$$

計算例. $P = 3, e = 1$ の場合 $r = 7, -m = 4 * 8 = -32$ なので方程式は

$$2\sigma(a) - 3a = q + 2 * 32.$$

```
231,factor(231)=3*7*11
273,factor(273)=3*7*13
357,factor(357)=3*7*17
399,factor(399)=3*7*19
483,factor(483)=3*7*23
609,factor(609)=3*7*29
651,factor(651)=3*7*31
777,factor(777)=3*7*37
```

解は $a = 3 * 7 * p$ の形である.

$m = -32$ A 型解

Table 28. $P = 3, m = -32$; 正規形

e	a	factor
4	7209	$3^4 * 89$
6	773469	$3^6 * 1061$
32	5150525730438708503830635949089	$3^{32} * 2779530283277729$

10.0.16. $P=3,e=3$ のとき. $P=3,e=3$ の場合 $r=79$ $-m=40*80=-3200$ なので方程式は

$$2\sigma(a)-3a=q+2*3200.$$

その解は恐るべきものだった.

```
58851,factor(58851)=3^2*13*503
177039,factor(177039)=3^3*79*83
189837,factor(189837)=3^3*79*89
206901,factor(206901)=3^3*79*97
215433,factor(215433)=3^3*79*101
219699,factor(219699)=3^3*79*103
228231,factor(228231)=3^3*79*107
```

最初の解 $a=58851=3^2*13*503$ が理解できない. それ以外は通常解 3^3*79*q である.

$m=-3200$ A 型解 これは巨大な数である.

Table 29. $P = 3, m = -3200$; 正規形

e	a	factor
26	96916228257047683648311397	$3^{26} * 3812798739293$
34	4171925841654868915658988881493557	$3^{34} * 250157725494966653$
44	1454660594681285401163473640807473472504601	$3^{44} * 14771563532754168461 21$

10.0.17. $P = 3, m = -3200$ のとき.

10.0.18. $P = 7, e = 1$ のとき. $P = 7, e = 1$ の場合 $r = 43, -m = 8 * 44 = -352$ なので方程式は

$$6\sigma(a) - 7a = 5q - 4 * m = 5q + 4 * 352.$$

```
14147,factor(14147)=7*43*47
15953,factor(15953)=7*43*53
17759,factor(17759)=7*43*59
18361,factor(18361)=7*43*61
20167,factor(20167)=7*43*67
21371,factor(21371)=7*43*71
21973,factor(21973)=7*43*73
```

通常解 $7 * 43 * q$

A 型解

TABLE 30. $P = 7, m = -352$; 正規形

e	a	factor
8	38769722160449	$7^8 * 6725249$
20	742794005439383788318855985340 1649	$7^{20} * 93090977347213649$

10.0.19. $P = 7, m = -352$ のとき.

10.1. **D 型解の式.** $\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + P - 2 - m$

D 型解の式を求める. $\alpha = P^e rq$, $A = (r+1)(q+1), B = rq, N = P^{e+1} - 1, \Delta = r + q$ とおくとき

$\overline{P}\sigma(\alpha) = NA, P\alpha = (N+1)B$ により

$$\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha - (P-2-m) = N(\Delta+1) - B - (P-2-m) = 0.$$

したがって

$$B - N\Delta = N - (P - 2 - m).$$

$r_0 = r - N, q_0 = q - N, B_0 = r_0 q_0$ とおくとき $B_0 = r_0 q_0 = B - N\Delta + N^2$.

$B - N\Delta = B_0 - N^2$ を上の式に代入すると

$$B_0 - N^2 = N - (P - 2 - m).$$

$D = N(N+1) - (P - 2 - m)$ とおけば, $B_0 = D$.

ここで話が逆になり, 与えられた P, m, e について,$N = P^{e+1}, D = N(N+1) - (P - 2 - m)$ をまず求める

10.2. **例.** $P=3, e=1, m=0$ とおけば, $N=3^2-1=8$.
$D=72+m+2-P=72-1=71$

```
60 ?- hyper1(3,4,1,1).
w=8      a=75    [3,5^2] x*y=1*75         9=[3^2],83=[83]
true.

61 ?- hyper1(3,4,1,3).
w=8      a=75    [3,5^2] x*y=3*25         11=[11],33=[3,11]
true.

62 ?- hyper1(3,4,1,5).
w=8      a=75    [3,5^2] x*y=5*15         13=[13],23=[23]
true.

63 ?- hyper1(3,4,1,15).
w=8      a=75    [3,5^2] x*y=15*5         23=[23],13=[13]
true.

64 ?- hyper1(3,8,1,1).
w=8      a=79    [79]    x*y=1*79         9=[3^2],87=[3,29]
true.

65 ?- hyper1(3,8,2,1).
```

11. D 型解がない証明

命題 2. $P=3, m=0$ のとき D 型解がない

Proof. $P=3, m=0$ のとき $N=3^{e+1}-1 \equiv -1 \bmod 3$ により $D=N(N+1)-1 \equiv -1 \bmod 3$.

$B_0=r_0q_0=D \equiv -1 \bmod 3$ なので $r_0 \equiv -1, q_0 \equiv 1 \bmod 3$ としてよい.

$$q=q_0+N \equiv 1-1=0 \bmod 3$$

なので, $q=3$. これは矛盾.