オイラー関数の変種について

飯高 茂 (学習院大学名誉教授)*

概 要

第2種オイラー関数 $\varphi_1(a)$ とオイラー陪関数 $\tilde{\varphi}(a)$ の概念を導入しその基本性質を調べる. 本研究は高校生の数学研究の素材提供を1つの目的とした.

1. 第2種オイラー関数と陪関数

始めに第2種オイラー関数と陪関数の定義を書く.

自然数 $a > 1$ に対して a 未満で a と互いに素な自然数 b の和を $\varphi(a)$ と書き, オイラー関数と言いたいが乗法性が成り立たない. 乗法性が成り立つように $\varphi_1(a)$ を定義する.

$a = p^e$ のとき,a より小さいが p の倍数ではない数の和は

$$\frac{p^e(p^e+1)}{2} - p \times \frac{p^{e-1}(p^{e-1}+1)}{2} = \frac{p^e(p^e - p^{e-1})}{2}.$$

なので $\varphi_1(p^e) = \frac{p^e\varphi(p^e)}{2}$ と定義する. 自然数 a の素因数分解に応じて $\varphi_1(a) = \varphi_1({p_1}^{e_1})\varphi_1({p_2}^{e_2})\cdots\varphi_1({p_s}^{e_s})$ と定義し **第2種オイラー関数** とよぶ.

$\varphi_1(a) = \frac{a\varphi(a)}{2^s}$ なので $\varphi(a)/2^s$ を不変数として認定し $\tilde{\varphi}(a)$ と書き**オイラー陪関数** と呼ぶ. $\varphi_1(a) = \tilde{\varphi}(a)a$ をみたす. オイラー陪関数の値は半整数である.

陪関数はオイラー関数に比べて制約力が強く, 定理を作りやすく証明しやすい. またエイリアンが少なくなる傾向がある.

2. オイラー陪関数の課題

次のことを問題とする.

1. **陪関数の比較定理**

$\frac{\tilde{\varphi}(m)}{m} = \frac{\tilde{\varphi}(a)}{a}$ が成り立つとき, m の相異なる素因子を $q_1, \cdots, q_s$ とおくと, それらのべきの積が a になる.

2. $a = mp$ **問題**

$2m\tilde{\varphi}(a) = \varphi(m)a - m\tilde{\varphi}(m)$. を満たす a は mp(p は素数で m の素因子でないとする) にあるか. もしあればこれを**エイリアン解**という.

(m に平方因子がなければエイリアン解はない.)

3. **エイリアンの卵問題**

$L - 2\tilde{\varphi}(L)$ が素数べき q^η でかつ, q と L が互いに素な場合の解 L は**エイリアンの卵**という. $q = 2, 3$ のとき卵は無いことは証明されている.

2010 Mathematics Subject Classification: 14E05,14E30

キーワード : オイラー関数, 完全数

* 〒183-0052 東京都府中市新町 3-2-21

e-mail: iitakashigeru@gmail.com

web: http://iitakashigeru.web.fc2.com/

一般に $m={q_1}^{\varepsilon_1}{q_2}^{\varepsilon_2}\cdots$ の場合にも成立する.

4. **平行移動問題**

与えられた x に対して $2m\tilde{\varphi}(a)-\varphi(m)a=x$ を満たす a を決定する.

5. **余関数の評価**

$a-2\tilde{\varphi}(a)$ を陪関数の余関数とよび, 記号で $\mathrm{co}\tilde{\varphi}(a)$ と書く. a が素数でないなら $\sqrt{a}$ で下から評価できる.

a が素数でなくその平方でもないなら $a^{2/3}$ で下から評価できる.

6. **陪関数のグラフの性質.**

オイラー関数のグラフと異なり,「広い海」が現れる.

3. エイリアンの卵

$L-2\tilde{\varphi}(L)$ が ${q_1}^{\varepsilon_1}{q_2}^{\varepsilon_2}\cdots$ でかつ, $q_1q_2\cdots$ と L が互いに素な場合の解 L は $q_1q_2\cdots$ をジーンとする**エイリアンの卵**とよばれる.

表 1: エイリアンの卵

L	素因数分解	$\tilde{\varphi}(L)$	q^η	素因数分解
6	$[2,3]$	0.5	5	$[5]$
14	$[2,7]$	1.5	11	$[11]$
166	$[2,83]$	20.5	125	$[5^3]$
221	$[13,17]$	48	125	$[5^3]$

4. エイリアンの例

表 2: $5\tilde{\varphi}(a)=a-5^4$

a	素因数分解	$\tilde{\varphi}(a)$
750 *	$[2,3,5^3]$	25
830 *	$[2,5,83]$	41
1105 *	$[5,13,17]$	96
1250	$[2,5^4]$	125
1875	$[3,5^4]$	250
4375	$[5^4,7]$	750

エイリアン $a=750,830$ が卵 $L=166,221$ から誕生している. しかもエイリアン解は通常解の前にある. これは陪関数の特性である.

参考文献

[1] S.Iitaka, 数学の研究を始めよう (12), 現代数学 12 月 2013,3 月 2014 現代数学社.