関西大学, 日本数学会
2016 年 9 月 17 日

飯高 茂

1. 究極の完全数とその平行移動

目的: オイラー 完全数を新しく導入しその基本定理を確立,例を豊富に挙げる.

P を素数.
整数 m に関して

$\sigma(P^e)+m$ が素数 q のとき
$a=P^eq$ を m だけ平行移動した底が P の(狭義の)究極の完全数と呼ぶ.

これは次式を満たす.

(1) $$\overline{P}\sigma(a)-Pa=(P-2)\mathrm{Maxp}(a)-m(P-1).$$

$\mathrm{Maxp}(a)$ は a の最大素因子. $\overline{P}=P-1.$

m だけ平行移動した底が P の狭義の究極の完全数の方程.

この式を満たす a を m だけ平行移動した底が P の(広義の) 究極の完全数と呼ぶ.

$P = 2$ のとき $\mathrm{Maxp}(a)$ が消えて方程式は

$$\sigma(a) - 2a = -m$$

となる.

$m = 0$ のときにあてはめると $\sigma(a) - 2a = 0$ の解(すなわち広義の完全数) は狭義の完全数になるか, 古来からある数学界の難問.

2. オイラー関数と ユークリッド関数

$m = 2$ のときは $\sigma(a) - 2a = -2$ の解は $a = 2^e q, (q = 2^{e+1} + 1$:フェルマ素数$)$ と書けるか,

これも難問.

ドグマ

$\sigma(a)$ を用いた式や予想は$\varphi(a)$ を用いて適当に修正するとより解きやすい問題ができる.

3. オイラー φ 完全数の平行移動

m だけ平行移動した オイラー φ 完全数の定義.

$\varphi(P^e)+1+m, (e>1)$ が素数 q になるとき
$a=P^e q, (e \geq 2)$ を(P を底とする) m だけ平行移動した(狭義の)オイラー φ 完全数とする.

特に a を (φ, m) 完全数と言う.

Table 1. $P = 2, m = -2$

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$
112	$2^4 * 7$
1984	$2^6 * 31$
32512	$2^8 * 127$
134201344	$2^{14} * 8191$
34359476224	$2^{18} * 131071$
549754765312	$2^{20} * 524287$
9223372032559808512	$2^{32} * 2147483647$

3.1. $P = 2, m = -2$.

q はメルセンヌ素数

ここでの $a = 2^e q$ はユークリッド完全数の4倍である.

4. φ 完全数の方程式

$q=\varphi(P^e)+1+m, e>1$ が素数になるとき $a=P^e q$ とする.

$(m$ が負の場合あるので, $q>P$ を仮定.)

$$P\varphi(a)=\overline{P}a-P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}+Pm. \tag{2}$$

m だけ平行移動した オイラー φ 完全数の方程式.

オイラー φ 完全数の方程式を満たす解がm だけ平行移動した広義のオイラー φ 完全数と呼ばれる.

$P = 2$ の場合は簡単になる.

$$2\varphi(a) = a - 2\overline{\mathrm{Maxp}(a)} + 2m. \tag{3}$$

5. 定理と証明

次の結果が基本定理である.

定理 1. $m \geq 0$ のとき

$$P\varphi(a) = \overline{P}a + Pm - P\overline{Maxp(a)}$$

を満たす解は

(1) $m = 0, e = 1$ のとき微小解 $a = Pq_0 (P > q_0 : \Gamma\Gamma)$ となる.
(2) $m = P - 1$ のときの微小解 $a = P^e$ となる.
(3) $e > 1$ のとき a は$(\varphi, m)-$ 完全数.
(4) $e = 1$ のとき $a = Pq,\ q = P + m$ は素数.

$e > 1, m \geq -2$ のとき, 広義のオイラー φ 完全数は狭義のオイラー φ 完全数になる.

φ 完全数の方程式で定義された広義のオイラー φ 完全数は必ずしも狭義の φ 完全数になるわけではない.

φ 完全数においては

$q=\varphi(P^e)+1+m$ が素数になると仮定されている

$1+m$ は P で割れない.

$P=2$ のとき m:偶数. (狭義の場合)

広義の場合は m : 偶数,奇数、正,負の４通りに分類される:

$P=2$ のとき m だけ平行移動した広義のオイラー φ 完全数を分類.

I 型. $m \geq 0, m:$偶数

II 型. $m < 0, m:$ 偶数

III 型. $m < 0, m:$ 奇数

IV 型. $m \geq 0, m:$ 奇数

6. I 型, $m \geq 0, m:$ 偶数

6.1. $P = 2, m = 0; m = 2$. 広義のオイラー φ 完全数

もっとも簡単な場合.

TABLE 2. $P = 2, m = 0; m = 2$

$m = 0$		$m = 2$	
a	素因数分解	a	素因数分解
12	$2^2 * 3$	20	$2^2 * 5$
40	$2^3 * 5$	56	$2^3 * 7$
544	$2^5 * 17$	176	$2^4 * 11$
131584	$2^9 * 257$	608	$2^5 * 19$
		8576	$2^7 * 67$
		33536	$2^8 * 131$

7. II 型， $m < 0, m$: 偶数

Table 3. $P = 2, m = -2$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
24	$2^3 * 3$	8
112	$2^4 * 7$	48
1984	$2^6 * 31$	960
32512	$2^8 * 127$	16128
134201344	$2^{14} * 8191$	

7.1. $P = 2, m = -2$. $a = 2^e q$ の形:正規形

TABLE 4. $P = 2, m = -10; m = -12$

	$m=-10$			$m=-12$	R
a	素因数分解	$\varphi(a)$	a	素因数分解	$\varphi(a)$
60	$2^2 * 3 * 5$	16	84	$2^2 * 3 * 7$	24
72	$2^3 * 3^2$	24	160	$2^5 * 5$	64
224	$2^5 * 7$	96	484	$2^2 * 11^2$	220
1472	$2^6 * 23$	704	6784	$2^7 * 53$	3328

7.2. $P = 2, m = -10; m = -12$ **の場合.** $m = -12$ のときの非通常解は$a = 84 = 2^2 * 3 * 7$, $a = 484 = 2^2 * 11^2$.

8. III 型, $m < 0, m$: 奇数

狭義の オイラーの φ 完全数では起こりえない場合,
m : 奇数でかつ負

$S = -m > 0$ とおく.
φ 完全数 についての方程式は

$$2\varphi(a) = a - 2S - 2(q-1).$$

a は偶数になるので $a = 2^e L$(L : 奇数) とおくとき $e = 1$ となり

$$\mathrm{co}\varphi(L) = S - 1 + q.$$

$\mathrm{co}\varphi(L) = L - \varphi(L)$ (オイラーの余関数)

8.1. $S = 1$. $S = 1$ のとき φ 完全数 についての方程式$\mathrm{co}\varphi(L) = q$ を解く.

$L = q^2$ が解.

したがって $2\varphi(a) = a - 2q$ なら $a = 2q^2$.

8.2. $S=3$ の場合の計算結果. $S=3$ のとき φ 完全数 についての方程式を解く.

$a<1000,000$ の範囲でパソコンによる解の全数調査をする.

結果として解が無数にでるがみな $a=6p,(p>3)$ の形をしている. これを通常解という.

Table 5. $P=2,S=3$

a	素因数分解
$6p,(p>3)$	$2*3*p$

9. 通常解

$S=p$:奇素数のとき, $p<q$:奇素数 について
$L=pq$ は
$\mathrm{co}\varphi(L)=p+q-1$, $S-1+q=p-1+q$ により
$\mathrm{co}\varphi(L)=S-1+q$ を満たす.

$a=2pq$ は次式の解でこれが通常解である.

$$2\varphi(a)=a-2p-2(q-1).$$

$S=p$: 奇素数のとき通常解 $a=2pq(p<q:\text{素数})$ がある.
$S=p$: 合成数のとき通常解はないが散発的な解はありうる.

Table 6. $P = 2, m < 0$, $S = -m \geq 11$

S	a	素因数分解
11	$22p, (p > 11)$	$2 * 11 * p$
13	$26p, (p > 13)$	$2 * 13 * p$
17	90	$2 * 3^2 * 5$
17	$34p, (p > 19)$	$2 * 17 * p$
21=3*7	126	$2 * 3^2 * 7$
21	250	$2 * 5^3$
23	$46p, (p > 23)$	$2 * 23 * p$
29	198	$2 * 3^2 * 11$
29	$58p, (p > 29)$	$2 * 29 * p$
31	64	2^6
31	150	$2 * 3 * 5^2$
31	$62p, (p > 31)$	$2 * 31 * p$
33=3*11	234	$2 * 3^2 * 13$
37	$74p, (p > 37)$	$2 * 37 * p$
41	306	$2 * 3^2 * 17$
41	$82p, (p > 41)$	$2 * 41 * p$
43	686	$2 * 7^3$
43	$86p, (p > 43)$	$2 * 43 * p$
$45 = 3^2 * 5$	342	$2 * 3^2 * 19$

パソコンによる計算の結果, $S = 17$ のとき$a = 2 * 17 * p$ という通常解と非通常解$a = 90 = 2 * 3^2 * 5$ が出てきた.

これらの結果から非通常解は最小の通常解より小さいことが推定できる.

S : 非素数なら通常解の大きさはどのように評価できるかという問題も自然な問いかけであるが証明できそうもない.

10. IV 型 m : 正の奇数

m : 奇数, 負の数 の場合が済んだので m : 奇数, 正の数の場合を扱う． この場合は意外なことにきわめて簡単になる. 小さなツチノコを数多く発見した思いがした.

$P = 2, m = 1, 3, 5, \cdots$

TABLE 7. $P = 2, m = 1, 3, 5, \cdots$

m	a =素因数分解
1	6=2*3
3	10=2*5
5	14=2*7
9	22=2*11
11	26=2*13
13	none(13+2=15, 非素数)
15	34=2*17
17	38=2*19
19	none(19+2=21, 非素数)
21	46=2*23
23	none((23+2=25, 非素数)

$m+2=q$ のとき解は $a=2q$ のみ
この場合は解が完全に決まるが面白いものはでてこない.
以下証明.
$\mathrm{co}\varphi(L)=q-1-m$ を解く.
L が素数なら $\mathrm{co}\varphi(L)=1=q-1-m$ なので $q=m+2$.
L が非素数なら $\mathrm{co}\varphi(L)\geq q$ なので $q\leq\mathrm{co}\varphi(L)=q-1-m$.
矛盾.