完全数の水平展開

飯高 茂 *

New research on perfect numbers with translation parameter m

Shigeu Iitaka

平成 29 年 3 月 31 日

概 要

Letting $\sigma(a)$ denote the number of divisors of a positive integer a, a is called a perfect number if $\sigma(a) - 2a = 0$, which was introduced by ancient mathematician Euclid.

Here, given an integer m, a is said to be a perfect number with translation parameter m, if $\sigma(a)-2a = -m$. For $m = -12, 0, 2, 4, 6$, structure of perfect numbers with translation parameters m are investigated in detail.

1 はじめに

大学数学科の卒業研究, そして定年後関わるようになった私立高校での数学クラブの研究活動で, 学生 (高校生を含む) の意見をきくと, 「完全数の研究をしてみたい」という希望がいくつか寄せられた.

自然数 a の約数の和を $\sigma(a)$ と書く. たとえば 6 の約数は,1,2,3,6 でそれらの和は 12 となる.

*学習院大学名誉教授

$\sigma(a)-2a=0$ を満たすとき, a は完全数であるという.6 は 完全数の例である. しかし 完全数 (perfect number) は現代数学から見て, 研究が困難な対象であり大学の数学教育では通常無視されている.

$\sigma(a)$ の持つ著しい性質に乗法性がある.

a, b が互いに素な自然数であるとき $\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(a)$ が成り立つ (乗法性). これは素因数分解の一意性から自然に導かれる.

このことを古のギリシャの数学者たちは熟知していた.

Wikipedia をみると, $\sigma(a)=2a-1$ を満たす数 a を概完全数 (almost perfect number) という. 2 の累乗はすべて概完全数だが, このほかにあるかどうかは未解決. さらに $\sigma(a)=2a+1$ を満たす数は発見されていない. もしあれば疑似完全数 (pseudo perfect number) という, などと述べられている.

完全数の研究は 2000 年以上継続されていて, これから学生が研究を始めても得るものはないだろう. 概完全数,疑似完全数ならあまり研究がされていないので, できることがあるかもしれない. 完全数, 概完全数, 疑似完全数 と並べて 3 点セットで研究するのはどうだろうか, と考えた. ついでに $\sigma(a)-2a=-m$,$(m=4,2,1,0,-12)$ の 5 セットで研究してみよう.

表 1: $\sigma(a)-2a=-m$ の解の素因数分解

a	素因数分解	$\sigma(a)$	m
5	$[5]$	6	4
14	$[2,7]$	24	4
44	$[2^2,11]$	84	4
110	$[2,5,11]$	216	4
152	$[2^3,19]$	300	4
884	$[2^2,13,17]$	1764	4
3	$[3]$	4	2
10	$[2,5]$	18	2
136	$[2^3,17]$	270	2
2^e	$[2^e]$	$2^{e+1}-1$	1
6	$[2,3]$	12	0
28	$[2^2,7]$	56	0
496	$[2^4,31]$	992	0

2 完全数

6 の他 28 も完全数になることは容易にわかるが 496,8128 なども完全数である.

これらを素因数分解すると

$$6 = 2 * (2^2 - 1), 28 = 2^2 * (2^3 - 1), 496 = 2^4 * (2^5 - 1), 8128 = 2^6 * (2^7 - 1).$$

$q = 2^{e+1} - 1$ が素数になるとき $a = 2^e q$ は完全数 (perfect numbers) でありとくにこの形の数をユークリッドの完全数という. $q = 2^{e+1} - 1$ とかける素数 q をメルセンヌの素数という.

一般に $2^{e+1} - 1$ が素数になるとき $e + 1$ は素数になることが証明できる.

2 のべきの数 $a = 2^e$ について, その約数を加えてできた和 W は等比数列の和の公式により $W = 2^{e+1} - 1$.

$$W = \sigma(a) = 2^{e+1} - 1 = 2a - 1$$

$\sigma(a) = 2a - 1$ なので 1 足りないため 2^e は惜しいところで完全数になれない.

奇数の完全数はあるか, 2 べき 2^e 以外の概完全数はあるか. これらは未解決の問題である.

3　完全数の平行移動

平行移動 m の完全数を定義しよう.

$q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $a = 2^e q$ を 平行移動 m の (狭義の) 完全数という. このとき $\sigma(a) = 2a - m$ を満たす.

Proof.

$a = 2^e q$ について

$$\sigma(a) = \sigma(2^e q) = \sigma(2^e)\sigma(q) = (2^{e+1} - 1)(q + 1).$$

それゆえ

$$(2^{e+1} - 1)(q + 1) = 2^{e+1}q - q + 2^{e+1} - 1 = 2a - m$$

かくしてえられた

$$\sigma(a) = 2a - m$$

を平行移動 m の完全数の方程式という.

この方程式の $\sigma(a) = 2a - m$ を a についての方程式と考える. その解を平行移動 m の (広義の) 完全数という.

$m = 0$ のとき (広義の) 完全数は (狭義の) 完全数になるというのが完全数の予想で未解決問題である. これが示されれば (広義の) 完全数と (狭義の) 完全数は一致するので晴れて完全数とよぶことができる.

m をいろいろ変化させて平行移動 m の (広義の) 完全数を調べることを完全数の水平展開という. 一般の場合は (広義の) 完全数と (狭義の) 完全数は食い違うので注意が要る. これは後で扱う.

4　$\sigma(a)-2a=0$ の場合の数値計算

次の表はパソコンで $\sigma(a)$ の定義をそのまま用いて完全数の方程式 $\sigma(a)-2a=0$ について a を 2 から 10,000,000 までについて調べた結果である.

表 2: $\sigma(a)-2a=0$ の場合

a	素因数分解
6	$2*3$
28	2^2*7
496	2^4*31
8128	2^6*127

このとき $a=2^eq,(q=2^{e+1}-1:$ メルセンヌ素数$)$ の形になっている. 一般に解 $a=2^eq,(q:$ 素数$)$ の形になる解を正規形とよぶ.

正規形 2^eq が $\sigma(a)=2a-m$ を満たすなら $q=2^{e+1}-1+m$ は素数となる.

$m=0$ のとき完全数は正規形になる, というのが古代の数学者の抱いた夢の 1 つで, 偶数の場合に解決したのがオイラーである.

以下では $\sigma(a)=2a-m$ を満たす a について $m=0,2,4,6,-12$ の場合の結果を述べる.

4.1　$\sigma(a)-2a=-2$ の場合の数値計算

表 3: $\sigma(a)-2a=-2$ の場合

a	素因数分解
3	3
10	$2*5$
136	2^3*17
32896	2^7*257
2147516416	$2^{15}*65537$

このとき $a=2^eq$ と書ける. ここで $q=2^{e+1}+1$ はフェルマ素数なので以下で説明する.

素数 3,5,17,257,65537 が出てきた. これらはフェルマ素数と呼ばれ, $F_m=2^{2^m}+1$ とおくとき, F_0,F_1,F_2,F_3,F_4 と書ける. F_5 をフェルマは素数と予想したが 100 年後にオイラーが因数分解して合成数であることを示した.

$m=2$ のとき解は正規形に限る, ということは正しそうである. a を偶数に限ってでもこのことを証明したいができそうにない.

4.2 $\sigma(a)-2a=-4$ の場合

$\sigma(a)-2a=-3$ の場合は解が見つからない. $m=4$ になると解が増えて面白くなる.

表 4: $\sigma(a)-2a=-4$ の場合

a	素因数分解
5	5
14	$2*7$
44	2^2*11
110	$2*5*11$
152	2^3*19
884	$2^2*13*17$
2144	2^5*67
8384	2^6*131
18632	$2^3*17*137$
116624	$2^4*37*197$

$\sigma(a)-2a=-4$ の場合, 解は複雑で非正規形の解が次のように登場する.

$a=110=2*5*11$

$a=884=2^2*13*17$

$a=18632=2^3*17*137$

$a=116624=2^4*37*197$

これらは 2^eqr, $2<q<r$:素数) の形であり正規形ではない.

かくして, 平行移動 4 の場合は正規形にならないものが出てきた.

$m=0,2$ の場合は解が正規形になるという予想は $m=4$ の場合では成立しない.

$m=4$ の場合は予想を少し修正して, 平行移動 4 の場合の解は 2^eq および 2^eqr $(2<q<r:q,r$ は素数) と書ける, とすることができる.

コンピュータの計算によると千万以下の a についてこれは正しい. 果たして一般に成り立つだろうか ? これは大難問であると思う.

4.3 解 $a = 2^e qr$ を求めるアルゴリズム

$\sigma(a) = 2a - m$ の解として $a = 2^e qr(2 < q < r$:素数, $e \geq 1$) があるとする. $\sigma(a)$ の乗法性に留意して $\sigma(q) = q+1, \sigma(r) = r+1$ なので $\widetilde{q} = q+1, \widetilde{r} = r+1$ を用いると,

$$\sigma(a) = (2^{e+1} - 1)\widetilde{qr}, 2a - m = 2^{e+1}qr - m$$

により $N = 2^{e+1} - 1, \Delta = q + r$ を使うと

$$N\widetilde{qr} = 2^{e+1}qr - m.$$

$\widetilde{qr} = qr + \Delta + 1$ なので

$$N(qr + \Delta + 1) = (N+1)qr - m.$$

ゆえに

$$-qr + N(\Delta + 1) = -m$$

$q_0 = q - N, r_0 = r - N$ を用いると $q_0r_0 = qr - N\Delta + N^2$ なので,

$$q_0r_0 = N(N+1) + m.$$

$D = N(N+1) + m$, とおけば, $q_0r_0 = D$.

そこで与えられた e, m に対し, $D = N(N+1) + m$, とおき,$q_0r_0 = D$ となる q_0, r_0 について,$q = q_0 + N, r = r_0 + N$ がともに素数になれば $a = 2^e qr$ が解となる.

$N + 1 = 2^{e+1}$ は 4 の倍数なので $N(N+1)$ も 4 の倍数. q_0, r_0 はともに偶数なので q_0r_0 も 4 の倍数になる. したがって m が 4 の倍数でないなら $a = 2^e qr$ 型の解がない.

したがって, $m = 2$ や $m = 6$ の場合には $a = 2^e qr$ 型の解はない.

はじめに手計算で求める.

i. $e = 1, N = 3, q_0r_0 = D = 16, q_0 = 2, r_0 = 8$. よって $q = 5, r = 11$.

ii. $e = 2, N = 7, q_0r_0 = D = 60, q_0 = 6, r_0 = 10$. よって $q = 13, r = 17$.

iii. $e = 3, N = 15, q_0r_0 = D = 244, q_0 = 2, r_0 = 122$. よって $q = 17, r = 137$.

アルゴリズムを基に作ったプログラムによる解は次のとおり.

$a = 2 * 5 * 11 = 110$,

$a = 2^2 * 13 * 17 = 884$,

$a = 2^3 * 17 * 137 = 18632$,

$a = 2^4 * 37 * 197 = 116624$,

$a = 2^6 * 137 * 1753 = 15370304$,

$a = 2^7 * 293 * 1973 = 73995392$.

$e < 15$ まで調べたが解はこれ以上見つからない.

4.4　$\sigma(a) - 2a = -6$ の場合

表 5: $\sigma(a) - 2a = -6$ の場合

a	素因数分解
7	7
15	$3 * 5$
52	$2^2 * 13$
315	$3^2 * 5 * 7$
592	$2^4 * 37$
1155	$3 * 5 * 7 * 11$
2102272	$2^{10} * 2053$

これらの解は非常に特色があり面白い.

$\sigma(a) = 2a - 6$ を満たす正規形の解は次の通り:

$a = 52 = 2^2 * 13, a = 592 = 2^4 * 37, a = 2102272 = 2^{10} * 205.$

意外に正規形の解が少ない. 無理して探してみたら正規形の解はあった (たぶん無数にある).

$a = 990352031428339404291 3882112 = 2^{46} * 140737488355333$

非正規形の解がいくつか登場する.

$a = 7$, $a = 15 = 3 * 5$.

これらは易しい解である.

非正規形の解は $a = 315 = 3^2 * 5 * 7$ と $1155 = 3 * 5 * 7 * 11$ であり 2 つ出てきた.

これは正規形の解と全く異なり、今までにない新種の解である. そこで, これらをモンスターと呼んでみたい.

モンスター $a = 1155 = 3 * 5 * 7 * 11$ は小さいほうから順にとった奇素数 4 つの積であり, その姿形が美しい. これは和服の帯を連想させるものがあるのでオビと命名しよう.

4.5　オビ 1155 の特徴づけ

水谷一さんの示唆により一般化してしかもオビ型モンスター解の簡潔な証明ができた.

3 から初めて順にとった素数 w 個の積 $a = 3*5*7*\cdots q$ を一般に長さ w のナガオビと呼ぼう.

命題 1 長さ w の ナガオビを $a = q_1 * q_2 * \cdots * q_w$ と書く.
$M = -\sigma(a) + 2a$ とし $M > 0$ を仮定する.
素数の積 $b = \prod_{j=1}^{w} p_j (2 < p_1 < p_2 < \cdots < p_w)$ があり $M = -\sigma(b) + 2b$ を満たすとき, $b = a$

Proof
$p_j \geq q_j$ なので $b = \prod_{j=1}^{w} p_j \geq a = \prod_{j=1}^{w} q_j$.
$\sigma(a)$ の乗法性によると

$$\sigma(a) = \prod_{j=1}^{w}(q_j + 1), \sigma(b) = \prod_{j=1}^{w}(p_j + 1)$$

が成り立つ. $\sigma(a) = 2a - M$ の両辺を a で割ると,

$$\prod_{j=1}^{w}(1 + \frac{1}{q_j}) = 2 - \frac{M}{a}.$$

$\prod_{j=1}^{w}(1 + \frac{1}{q_j}) \geq \prod_{j=1}^{w}(1 + \frac{1}{p_j})$ によって

$$-\frac{M}{a} \geq -\frac{M}{b}.$$

ゆえに, $-\dfrac{1}{a} \geq -\dfrac{1}{b}$. よって $a \geq b$. これより, $a = b$.

表 6: ナガオビの例

a	素因数分解	$M = -\sigma(a) + 2a$
35	3* 5	6
105	3* 5* 7	18
1155	3* 5* 7* 11	6
15015	3* 5* 7* 11* 13	-2226
255255	3* 5* 7* 11* 13* 17	-70098

ここで 15015,255255 は M が負になるので命題 1 が使えない.

かくして 平行移動 6 の完全数で, 4 つの素数の積にかけるものはオビに限ることが示された.

4.6 $\sigma(a) - 2a = 12$ の場合

$m < 0$ の場合も偶数なら類似の結果がいろいろあり興味深いがここではもっとも簡単な $m = -12$ の場合のみ扱う. このとき $\sigma(a) = 2a + 12$ を満たす. この解の表は次の通り:

表 7: $\sigma(a) - 2a = 12$ の場合

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$
30	$2 * 3 * 5$
42	$2 * 3 * 7$
54	$2 * 3^3$
66	$2 * 3 * 11$
78	$2 * 3 * 13$
102	$2 * 3 * 17$
114	$2 * 3 * 19$
138	$2 * 3 * 23$
174	$2 * 3 * 29$
186	$2 * 3 * 31$
222	$2 * 3 * 37$

$a = 6p, (p \neq 2, 3 : \text{素数})$ が続くので途中略す.

表 8: $\sigma(a) - 2a = 12$ の場合, 続き

a	素因数分解
282	$2 * 3 * 47$
304	$2^4 * 19$
318	$2 * 3 * 53$
354	$2 * 3 * 59$
366	$2 * 3 * 61$
402	$2 * 3 * 67$

$a = 6p$ は分かりやすい解なので通常解という.

$a=24=2^3*3$ のとき $24=6*4$ と書くことができて 4 があたかも素数のように振舞う. 4 を擬素数と見て, 24 を擬素数解という.

$a=54=2*3^3=6*9$ と書けば分かるとおり 9 を擬素数と見ることができ 54 を擬素数解ということが正当性を持つ.

ここで通常の解 $6p$ と異なる異常な解 $a=304=2^4*19$ が出てきた. これをエイリアンという. これは正規形 2^eq なので正規形の解として一般に探す. 正規形 2^eq が解なら $q=2^{e+1}-13$ を満たすことがわかる. 正規形も求めるプログラムを用いて次の解の表がえられた.

表 9: $\sigma(a)-2a=12$ の場合, 正規形の解

a	素因数分解
24	2^3*3
304	2^4*19
127744	2^8*499
33501184	$2^{12}*8179$
8589082624	$2^{16}*131059$

擬素数解 24 を除くと,

$$e\equiv 0 \mod 4, q\equiv 9 \mod 10, a\equiv 4 \mod 10$$

を満たす.

以上見たように, 通常解 $a=6p,(2<3<p:$ 素数$)$, 擬素数解　$a=24=2^3*3$, $a=54=2*3^3$ の他に全く異質の正規形の解 (エイリアン解) という 3 種の解がある. この他の形の解もあるかもしれない.

4.7 $6r$ の特徴づけ

3 素数の積 $a = pqr, (p < q < r$ かつ p, q, r : 素数) が $\sigma(a) = 2a + 12$ の解となるとき $a = 6r$ を示す.

$\widetilde{q} = q + 1, \widetilde{r} = r + 1$ を以下で使う.

$a = pqr$ のとき

$$\sigma(a) = (p+1)\widetilde{q}\widetilde{r}, 2a + 12 = 2pqr + 12.$$

$A = \widetilde{q}\widetilde{r}, B = qr$ とおくと

$$(p+1)A = 2pB + 12.$$

すると

$$p(A - 2B) = 12 - A.$$

$\Delta = q + r$ とおくとき

$$A - 2B = \widetilde{q}\widetilde{r} - 2qr = \Delta + 1 - qr.$$

$12 - A = 12 - (qr + \Delta + 1)$ によって,

$$p(\Delta + 1 - qr) = 12 - (qr + \Delta + 1)$$

これより式を整理して

$$12 = (1-p)qr + \Delta(p+1) + p + 1.$$

ここで $p = 2$ と仮定する.

$$12 = -qr + 3\Delta + 3.$$

よって,

$$qr = 3\Delta - 9.$$

これより, $qr - 3q - 3r + 9 = 0$. よって, $(q-3)(r-3) = 0.q < r$ により $q = 3, p = 2$.

r は単なる素数で条件がつかない. よって,$a = 6r(r > 5, r$: 素数) が解.

次に $p > 2$ と仮定して矛盾を導く.

$12 = (1-p)qr + \Delta(p+1) + p + 1$ を p で整理すると,

$$12 = -p(qr - \Delta - 1) + qr + \Delta + 1.$$

$$p(qr - \Delta - 1) = qr + \Delta - 11.$$

$p \geq 3$ により

$$qr + \Delta - 11 = p(qr - \Delta - 1) \geq 3(qr - \Delta - 1).$$

$$0 \geq 2qr - 4\Delta + 8 = 2(qr - 2\Delta + 4).$$

これより $(q-2)(r-2) \leq 0$. これは $3 \leq p < q < r$ に矛盾. したがって $p = 2$.

4.8 解 $a = 2^e q^f$

$\sigma(a) = 2a + 12$ の解で $a = 2^e q^f$ となるものを調べよう.

$X = 2^e, Y = q^f$ とおくとき $\overline{q} = q - 1$ を用いると

$$\sigma(a) = (2^{e+1} - 1)(1 + q + \cdots + q^f) = (2X - 1)\frac{qY - 1}{\overline{q}}.$$

$\sigma(a) = 2a + 12 = 2XY + 12$ によって,

$$(2X - 1)(qY - 1) = (2XY + 12)\overline{q}.$$

これより

$$2X + qY - 1 = 2XY - 12\overline{q}.$$

$12\overline{q} + 2X - 1 = Y(2X - q)$ より $2X - q > 0$.

$12\overline{q} + 2X - 1 = 12\overline{q} + 2X - q + \overline{q} = Y(2X - q)$ から

$$12\overline{q} + \overline{q} = (Y - 1)(2X - q).$$

そこで $Z = 1 + q + \cdots + q^{f-1}$ とおくとき $\dfrac{Y-1}{\overline{q}} = Z$ なので

$$13 = Z(2X - q).$$

$Z = 1$ または $Z = 13$.

i) $Z = 1$. $2X - q = 13$ より $q = 2^{e+1} - 13$.

$e = 3$ のとき $q = 2^{e+1} - 13 = 3$. ここで $a = 2^3 * 3 = 6 * 4$ と書けるので擬素数解.

$q = 2^{e+1} - 13$ が素数になる例はいろいろある.

$e = 4$ のとき $q = 2^{e+1} - 13 = 32 - 13 = 19$ によって, $a = 2^4 * 19 = 403$ は正規形の解 (エイリアン解ともいう).

表 10: $\sigma(a)-2a=12$ の場合

a	factor
304	2^4*19
127744	2^8*499
33501184	$2^{12}*8179$
8589082624	$2^{16}*131059$

e が 4 の倍数になることの証明もできる.

ii) $Z=13$. $Z=1+q+\cdots+q^{f-1}=13$ によって, $f=3, q=3$. $2X-q=1$ より $q=2^{e+1}-1$. したがって $e=1$. $a=2*3^3$. $a=6*9$ と書けるので擬素数解

5 あとがき

P を素数とし $\sigma(P^e)$ が素数 q のとき $a=P^eq$ を底が P の **完全数**と呼ぼう. このとき $\overline{P}=P-1$ を用いれば $q=\dfrac{P^{e+1}-1}{\overline{P}}$ となる.

この完全数を整数 m だけ平行移動する.

$q=\frac{P^{e+1}-1}{\overline{P}}+m$ が素数の場合 $a=P^eq$ を 底が P, 平行移動 m の完全数と呼ぶ.

これは次の方程式を満たす.

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa=(P-2)\mathrm{Maxp}(a)-m\overline{P}. \tag{1}$$

ここで $\mathrm{Maxp}(a)$ は a の最大素因子を指している.

この導出は簡単である.

$P^{e+1}-1=(q-m)\overline{P}$ に留意して $a=P^eq$ の $\sigma(a)$ の式変形を行う.

$$\begin{aligned}\overline{P}\sigma(a)&=(P^{e+1}-1)(q+1)\\&=P^{e+1}q+P^{e+1}-1-q\\&=Pa+(q-m)\overline{P}-q\\&=Pa+(P-2)q-m\overline{P}.\end{aligned}$$

$q=\mathrm{Maxp}(a)$ により式が導けた.

この解を 底が P, 平行移動 m の **広義の完全数** あるいは, **究極の完全数**という.

$P=2$ のとき方程式は

$$\sigma(a)-2a=-m.$$

ここで究極の完全数の用語について説明する必要を感じる.

古来からある完全数を一般化するにあたって, 底を 2 から 素数 P にしさらに平行移動を加えた. 底が P, 平行移動 m の完全数と呼べばいいのだが長いので究極の一般化という意味を込めて, 究極の完全数と呼んだのである.

完全数の定義は $\sigma(a)=2a$ を満たす自然数 a である.

この概念の一般化はいろいろ考えられている. たとえば $\sigma(a)=3a$ を満たす自然数 a を 3− 完全数と呼ぶ. このような一般化はそれほど成功していないと思われる.

ここでは話しを逆転させ, ユークリッドの完全数 $a=2^e q$,($q=2^{e+1}-1$ が素数) を与える計算式を一般化してそこから定義式を作り, それを満たす解を究極の完全数 (ultimate perfect number) と呼んでいる.

本論文ではページ数の関係で,$P=2$ に限定し m もごく小さい範囲で扱ったにすぎない. それでもだれでもわかる興味ある結果が出ている.P をいろいろ変えて研究することを完全数の垂直的展開という. これらについて研究することは実りある成果が十分見込める面白い課題である. 多くの数学者, 数学愛好家, 高校生を含む学生方に参加してほしいと思う.

以上についてより詳しい内容は飯高茂著 ,『 数学の研究を始めよう 』の続刊 (III)(IV) に発表される予定である.

参考文献

[1] , 高木貞治, 初等整数論講義第 2 版, 共立出版社,1971.

[2] C.F.Gauss(カール・フリードリヒ ガウス), ガウス 整数論 (数学史叢書)(高瀬正仁訳), 共立出版社, 1995.

[3] 飯高茂 , (雑誌の連載) 数学の研究をはじめよう , 現代数学社 ,2013 ～ .

[4] 飯高茂 , 『数学の研究をはじめよう (I)』, 現代数学社 ,2016.

[5] 飯高茂 ,『 数学の研究をはじめよう (II)』, 現代数学社 ,2016.