倉敷

飯高 茂

平成 29 年 9 月 19 日

目 次

1　スーパー完全数

D.Suryanarayana は 1969 年にスーパー完全数 (superperfect numbers) を定義して基本定理を確立した. (Suryanarayana, D. ”Super Perfect Numbers.” Elem. Math. 24, 16-17, 1969.)

1.1　スーパー完全数の定義

$a = 2^e$ とおくと $\sigma(a) = 2^{e+1} - 1$ となる. これを素数と仮定し q とおく. αq はユークリッドの完全数.

$\sigma(q) = q + 1 = 2^{e+1} = 2a$ になるので中抜きして

$$\sigma(q) = 2a.$$

$q = \sigma(a)$ を左辺に代入すると,

$$\sigma(\sigma(a)) = 2a$$

が成り立つ. 記号 $\sigma^2(a) = \sigma(\sigma(a))$ を用いると $\sigma^2(a) = 2a$ と書き直せる.

一般にこれを満たす a をスーパー完全数と呼ぶ.

ここでもオイラーの定理 (偶数完全数は ユークリッドの完全数になる) の類似が成り立つ.

1.2　スーパー完全数についてオイラーの定理の類似

定理 1.

$$\sigma^2(a) = 2a$$

を満たす a は偶数のとき 2^{p-1} とかける. ここで $q = 2^p - 1$ はメルセンヌ素数.

Proof.(By Iitaka)

偶数の仮定により, $e > 0$ があり $a = 2^e L, (L: \text{奇数})$ と書ける.

$N = 2^{e+1} - 1$ とおくと $\sigma(a) = N\sigma(L)$.

1).$L = 1$

$a = 2^e$ により $\sigma(a) = N$. $\sigma^2(a) = \sigma(N).\sigma^2(a) = 2a = N + 1$ によれば $\sigma(N) = N + 1$. それゆえ N は素数. $N = 2^{e+1} - 1$ はメルセンヌ素数.

2).$L > 2$

$N > 1$ なので, $\sigma(L)$ は $\sigma(a) = N\sigma(L)$ の真の約数. よって $1, \sigma(L), N\sigma(L)$ は相異なる約数ゆえに

$$\sigma^2(a) \geq 1 + \sigma(L) + N\sigma(L).$$

$\sigma^2(a)=2a$ なので $2a \geq 1+\sigma(L)+N\sigma(L)$.
$2a=2^{e+1}L=(N+1)L$ によれば

$$(N+1)L \geq 1+\sigma(L)+N\sigma(L) \geq 1+(N+1)L.$$

これは矛盾.
オイラーの証明と類似している.

2 スーパー完全数の m だけ平行移動

m だけ平行移動 m した狭義の完全数 α は定義により $q=2^{e+1}-1+m$ が素数になるとき $\alpha=2^e q$ と書ける.
$a=2^e$ および $N=2^{e+1}-1$ とおくと,$N=\sigma(a)$, $q=N+m=\sigma(a)+m, q+1=2a+m$ を満たす.
q :素数 により

$$\sigma(q)=q+1.$$

この式の左辺 $=\sigma(q)=\sigma(\sigma(a)+m)$. 右辺 $=q+1=2a+m$
かくて

$$\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m.$$

これを平行移動 m のスーパー完全数の方程式といいこの解 a を平行移動 m のスーパー完全数という.

命題 1. $a=2^e$ が平行移動 m のスーパー完全数ならば $q=2^{e+1}-1+m$ は素数となる.

とくに $2^e q$ は平行移動 m の狭義の完全数になる.
Proof.
式 $\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m$ に $a=2^e$ を代入すると

$$\sigma(2^{e+1}-1+m)=2^{e+1}+m.$$

$k=2^{e+1}-1+m$ とおくとき, $\sigma(k)=k+1$. よって, k: 素数.

注意 1. 実例にあたると, a が偶数の仮定だけでも $a=2^e$ が導ける可能性がある.

2.1 $m=0$ のとき.

$m=0$ のときパソコンで計算してみる.
偶数完全数解は 2 のべき, すなわち $a=2^e$ であることはすでに示された.
パソコンで計算してみても奇数の解は見つからない.
完全数の場合奇数の完全数があるか ? という問題があるが 2000 年以上にわたって未解決.
スーパー完全数の場合も奇数のスーパー完全数あるかが問われている. この場合も難問かもしれないし, 案外解けるかもしれない.

表 1: $\sigma^2(a) = 2a$

a	素因数分解	$2a-1$ (メルセンヌ素数)
16	2^4	31
64	2^6	127
4096	2^{12}	8191
65536	2^{16}	131071
262144	2^{18}	524287

2.2 $m = 2$ のとき.

$m = 2$ のとき, パソコンで計算してみると驚天動地の世界が現れた.

表 2: $\sigma(\sigma(a) + 2) = 2a + 2$

a	素因数分解	$2a+1$(Fermat 素数あり)
1	2^0	$3 = 2 + 1$
2	2^1	$5 = 2^2 + 1$
8	2^3	$17 = 2^4 + 1$
11	11	
41	41	
65	$5 * 13$	
107	107	
128	2^7	$257 = 2^8 + 1$
149	149	
881	881	
959	$7 * 137$	
2141	2141	
14363	$53 * 271$	
21119	$7^2 * 431$	
32768	2^{15}	$65537 = 2^{32} + 1$
238895	$5 * 47779$	
967679	$23 * 42073$	

表を眺めた結果

- a が偶数なら 2 のべきになり,$2a + 1$ にはフェルマ素数が並ぶ.
- a が奇数の場合は, 11,41, 107 などの素数が出る一方, 65,959 などの合成数が並ぶ.

3 素数解 p

$\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m$ に素数の解 p があるとする．すると定義より $\sigma(p+1+m)=2p+m$ を満たす.

与えられた m に対し上式の解となる素数 p を探した.

$m=2$ のとき, $\sigma(p+3)=2p+2$ になり,

$p=11,41,107,149,881,2141,8381,18629,116621,\cdots$.

これらの素数は居場所を探して彷徨っているようだ.

4 スーパーオイラー完全数 II 型

$\sigma(a)$ の代わりにオイラー関数 $\varphi(a)$ を用いて平行移動 m のスーパーオイラー完全数 II 型を定義してみよう.

$q_0=2^e+1+m$ は素数とする．$a=2^e$ とおく.

$a=2\varphi(a)$ により $q_0=2\varphi(a)+1+m$. 代入して $\varphi(q_0)=\varphi(2\varphi(a)+1+m)$.

q_0 は素数だから $\varphi(q_0)=q_0-1$.

一方, $q_0-1=a+m$. これらを組み合わせると,

$$\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m.$$

これを スーパーオイラー完全数 II 型の定義式といい, この解をスーパーオイラー II 型完全数という.

4.1 m:偶数の場合

$\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ において, m を偶数と仮定する．オイラー関数は自然数について定義されるので, $x=2\varphi(a)+1+m\geq 1$.

一般に $\varphi(x)$ は $x>2$ なら偶数なので,

$x=2\varphi(a)+1+m\geq 2$ は偶数なので a も偶数．よって奇数の L によって $a=2^eL$ と書ける.

1)$x=2\varphi(a)+1+m>1$ とする．$\varphi(x)\leq x-1=2\varphi(a)+m$.

$$a+m=\varphi(2\varphi(a)+1+m)=\varphi(x)\leq x-1=2\varphi(a)+m$$

$$2^eL+m=a+m\leq x-1=2\varphi(a)+m=2^e\varphi(L)+m.$$

$L\leq\varphi(L)$ により, $L=1,a=2^e$. $x=2\varphi(a)+1+m=2^e+1+m$,

$$\varphi(x)=\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m=2^e+m=Q-1.$$

ゆえに $x=2^e+1+m$ は素数.

2)$x=2\varphi(a)+1+m=1$ とする. $2\varphi(a)+m=0$. $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ により, $1=a+m$. $2\varphi(a)+m=0$ なので $2\varphi(a)=-m=a-1$.

ところで, $2\varphi(a)=a-1$ を満たす a は存在しない, という予想がある. そこでこれを仮説として使う.

したがって, $x=2\varphi(a)+1+m=1$ となる場合はないと理解する. この仮説を用いた結果次の定理ができた.

定理 2. m を偶数と仮定する. $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ の解は $a=2^e$, ここで, $Q=2^e+1+m$ は素数.

ここで, $m=0$ なら $Q=2^e+1$ はフェルマ素数.
$m=-2$ なら $Q=2^e-1$ はメルセンヌ素数.

5 高橋君との研究交流

2017 年 8 月下旬から当時小学校 4 年生の高橋洋翔君との研究交流が始まった. ここでは高橋君を T を筆者を I と書く. (T は 10 歳の数学少年 ,I は 75 歳の後期高齢者).

1. 2017 年 8 月 25 日. T は I に数学の研究になる課題を教えてほしいと要望.
2. 8 月 27 日. I は葉書を出して . $\varphi(2\varphi(a)+1)=a+1$ の解 a は何かを問う.
3. 2 日後 T は 解は 2^e. ここで 2^e+1 は素数と返書.
4. I は葉書を出して, 未解決の問題なので難問と添え書きして $\varphi(2\varphi(a)-2)=-3$ の解を問う.
5. T は 解は 双子素数の兄の方であると証明をつけて ipad で返書.
6. ２日後 I は 葉書を出して一般に m:負の奇数のとき $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$, の解などを問う.
7. 9 月 2 日 T は 多くの課題と結果を書きならべ, $m=-1$ のとき $\varphi(2\varphi(a))=a-1$ の解は 2 とフェルマ素数と予想するが未証明と ipad で返書
8. それを受けて I は $m=-1$:のとき解はないとしていた誤りに気づき, 正しい証明を作り mail で伝えた.

以下はこのような流れの中でできた結果についてふれる.

5.1 m:奇数の場合

$\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ の解を求める.
m を奇数と仮定する. 一般に $x>2$ なら $\varphi(x)$ は 偶数なので a も奇数.

命題 2. m を奇数 $2N-1$ とする．$m \geq -1$ の場合は $\varphi(2\varphi(a)+1+m) = a+m$ の解があるとき ,1)$N=0$ のとき $m=-1, a=2,$ またはフェルマ素数, 2) $N=1$ のとき $x=1, a=1$ になる．

Proof.

$2\varphi(a)+1+m = 2(\varphi(a)+N)$ によって

$$\varphi(2(\varphi(a)+N)) = a+2N-1.$$

$b=\varphi(a)+N$ とおくとき $\varphi(2b) = a+2N-1.$

$b=\varphi(a)+N = 2^{\varepsilon}L(L:$ 奇数$)$ の形に書いて

$L>2$ のとき, $L-\varphi(L) \geq 1$ により

$$\begin{aligned}
a+2N-1 &= \varphi(2b) \\
&= 2^{\varepsilon}\varphi(L) \\
&\leq 2^{\varepsilon}(L-1) \\
&= \varphi(a)+N-2^{\varepsilon} \\
&\leq a-1+N-2^{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

これより

$$a+2N-1 \leq a-1+N-2^{\varepsilon}.$$

$N \leq -2^{\varepsilon} \leq -1.$ よって $m \leq -3.$

$L=1$ のとき, $b=\varphi(a)+N=2^{\varepsilon}.$

一方, $2^{\varepsilon} = \varphi(2b) = a+2N-1,$ により

$$a+2N-1 = 2^{\varepsilon} = \varphi(a)+N$$

$a>1$ ならば

$$a-\varphi(a)+2N-1 = N+1-2N = 1-N.$$

ゆえに $N=0, a-\varphi(a)=1.$

$b=2^{\varepsilon}=\varphi(a)+N=a-1.$

ゆえに,$a=1+b=1+2^{\varepsilon}$ は素数なのでこれが奇数ならフェルマ素数. $\varepsilon=0$ のとき, $a=2.$ したがって, $a=2,$ またはフェルマ素数

$a=1$ ならば $a+2N-1=\varphi(a)+N$ に代入すれば, $2N=1+N.$ よって,$N=1.$

6 m : 奇数の場合

$\varphi(2\varphi(a)+1+m) = a+m$ の研究を

6.1　$m = -1$ の場合

$\varphi(2\varphi(a)) = a - 1$ のときは $a = 2$ またはフェルマ素数 となることを高橋洋翔は予想した.

幸い証明できた (Iitaka)
Proof.
$a = 2$ は解. そこで $a \geq 3$ としてよい.
$\varphi(a)$ は偶数なので ,$\varphi(a) = 2^\varepsilon L, (L:$ 奇数$)$ としてよい.
$2\varphi(a) = 2^{\varepsilon+1}L$ により $\varphi(2\varphi(a)) = 2^\varepsilon\varphi(L)$.

1). $L > 2$.

$$\begin{aligned} a - 1 &= \varphi(2\varphi(a)) \\ &= 2^\varepsilon\varphi(L) \\ &\leq 2^\varepsilon(L-1) \\ &= 2^\varepsilon L - 2^\varepsilon \\ &= \varphi(a) - 2^\varepsilon. \end{aligned}$$

よって,

$$a - 1 \leq \varphi(a) - 2^\varepsilon \leq a - 1 - 2^\varepsilon.$$

ゆえに, $0 \leq -2^\varepsilon$ となり矛盾.

2). $L = 1$.
$\varphi(a) = 2^\varepsilon$. $\varphi(2\varphi(a)) = a - 1$ に代入すると, $\varphi(2\varphi(a)) = 2^\varepsilon$ によれば $2^\varepsilon = a - 1$. したがって, $a = 2^\varepsilon + 1$. これはフェルマ素数.

6.2　$m = 1 - 4k$ の場合

高橋洋翔のプリントにしたがい,$m = 1 - 4k, (k > 0)$ とする.
$\varphi(2\varphi(a) + 2 - 4k) = a + 1 - 4k$ となる.
$b = \varphi(a) + 1 - 2k$ とおくと, これは奇数 ($a > 2$).
$b > 1$ なら $\varphi(b) \leq b - 1$ によって,

$$a + 1 - 4k = \varphi(2\varphi(a) + 2 - 4k) = \varphi(2b) = \varphi(b) \leq b - 1 = \varphi(a) - 2k.$$

(1)

中抜きして

$$a+1-4k \le \varphi(a)-2k.$$

$$co\varphi(a)=a-\varphi(a) \le 2k-1.$$

$co\varphi(a)=1,2,\cdots,2k-1$ となるが,$k=1$ の場合を扱う.

6.3 オイラー余関数

一般に $co\varphi(a)=a-\varphi(a)$ と定めオイラー余関数と呼ぶ. $a>1$ なら $co\varphi(a) \ge 1$.
次の結果はやさしいが有用.

1. $co\varphi(a)=1$ なら a は素数. 逆も正しい
2. $co\varphi(a)=2$ なら $a=4$.
3. $co\varphi(a)=3$ なら $a=9$.
4. $co\varphi(a)=4$ なら $a=8,10$.
5. $co\varphi(a)=5$ なら $a=25$.

6.4 $m=-3$: の場合

a). $k=1$ の場合. (この場合を最初に解決したのは高橋洋翔氏)
定義式は $\varphi(2\varphi(a)-2)=a-3$ となる.
$co\varphi(a)=1$ なので a:素数. $b=\varphi(a)-1=a-2$.
$a-3=\varphi(b)$ より, $b-1=a-3=\varphi(b)$. すなわち, b も素数. $(a,a-2)$ は双子素数で a は兄という.
$b=1$ の場合は, $1=b=\varphi(a)-1$. このとき $a=4$ 次の結果にまとめる.
$a=4$ は確かに解. $a=2+p$ とし p,a はともに素数とする.
$2\varphi(a)-2=2(a-1)-2=2a-4=2p$ になり $\varphi(2p)=p-1=a-3$.
こうして双子素数の解が確認できた.

定理 3 (Hiroto Takahashi)**.** $\varphi(2\varphi(a)-2)=a-3$ となる条件は $a=4$ または双子素数の兄.

双子素数の特徴付けと見るとこれは美しい定理と言ってよい.

表 3: 双子素数

a	$a-2$
5	3
7	5
13	11
19	17
31	29
43	41
61	59
73	71

6.5 $m=-7$: の場合

b). $k=2$. $m=-7$
条件は $\varphi(2\varphi(a)-6)=a-7$ となる. したがって $a>7$.
このとき $co\varphi(a)=1,2,3$ となるので順次調べる.
1) $co\varphi(a)=3$. $a=9$ になり, これは解.
2) $co\varphi(a)=2$. $a=4$ になり解ではない.
3) $co\varphi(a)=1$. a は素数.
$b=\varphi(a)+1-2k=\varphi(a)-3$. 最初に $b=1$ とすると, $\varphi(a)=4$. このとき $a=8,10$. $a=8$ のみ解.
$b>1$ として以下考える.
$b=\varphi(a)+1-2k=a-4$.
$a-7=\varphi(2\varphi(a)-6)=\varphi(2b)=\varphi(b)$ によれば, $\varphi(b)=a-7=b-3$. すなわち $co\varphi(b)=3$. よって, $b=9$. したがって $a=13$.

定理 4. $m=-7$ のとき $\varphi(2\varphi(a)-6)=a-7$ となる条件は $a=2^3,3^2,13$.

6.6 $m=-1-4k$ のとき

$m=-1-4k$ のときは条件式は $\varphi(2\varphi(a)-4k)=a-1-4k$ となる.
$b=\varphi(a)-2k$ とおくとこれは偶数 ($a>2$), $\varphi(2b)=a-1-4k$ となる. b を素因数分解して, $b=2^{\varepsilon}Q, Q$: 奇数とする.

$$\varphi(2^{\varepsilon+1}Q)=a-1-4k.$$

i). $Q=1$ のとき.
$\varphi(a)-2k=b=2^{\varepsilon}$,$\varphi(2^{\varepsilon+1})=2^{\varepsilon}=a-1-4k$.
$a=1+4k+2^{\varepsilon}$, かつ　$\varphi(a)=2^{\varepsilon}+2k$
$\mathrm{co}\varphi(a)=a-\varphi(a)=2k+1$.

a). $k = 1$; $m = -5$.

co$\varphi(a) = 2k + 1 = 3$. すると, $a = 9$. $9 = a = 1 + 4k + 2^\varepsilon = 5 + 2^\varepsilon$.

$2^\varepsilon = 4$ になり, $\varepsilon = 2, b = 4$.

b). $k = 2$; $m = -9$, $\varphi(2\varphi(a) - 8) = a - 9$. co$\varphi(a) = 2k + 1 = 5$. すると, $a = 25$. これは解.

ii). $Q > 2$. $\varphi(Q) \le Q - 1, b = \varphi(a) - 2k$ を使う.

$$\begin{aligned} a - 1 - 4k &= \varphi(2^{\varepsilon+1}Q) \\ &= 2^\varepsilon \varphi(Q) \\ &\le 2^\varepsilon (Q - 1) \\ &= 2^\varepsilon Q - 2^\varepsilon \\ &= b - 2^\varepsilon. \end{aligned}$$

$$a - 1 - 4k \le b - 2^\varepsilon = \varphi(a) - 2k - 2^\varepsilon.$$

$b = \varphi(a) - 2k$ によって, $b = \varphi(a) - 2k$, $\varphi(2b) = a - 1 - 4k$ であり

$$a - 1 - 4k \le \varphi(a) - 2k - 2^\varepsilon.$$

$a > 2$ のとき, $\varphi(a) \le a - 1$ を用いて

$$a - 1 - 4k \le \varphi(a) - 2k - 2^\varepsilon \le a - 1 - 2^\varepsilon \quad .$$

中抜きして

$$a - 1 - 4k \le a - 1 - 2^\varepsilon \quad .$$

これより $-4k \le -2^\varepsilon \quad ; k \ge 2^{\varepsilon-1}$.

以後 $k = 1$ とする. $m = 5$. 上の評価式により, $k = 1 \ge 2^{\varepsilon-1}$. すなわち, $\varepsilon - 1 = 0$.

$a - 5 = a - 1 - 4k \le b - 2^\varepsilon = b - 2 = \varphi(a) - 4$ により $a - 5 \le b - 2 = \varphi(a) - 4 \le a - 5$.

ゆえに, $a - 5 = b - 2, \varphi(a) = a - 1$. $b = a - 3$ かつ a は素数.

$\varphi(2b) = a - 1 - 4k = a - 5 = b - 2, \varphi(2b) = \varphi(4Q) = 2\varphi(Q)$.

$2\varphi(Q) = \varphi(2b) = a - 5 = b - 2 = 2Q - 2$ が得られて, $\varphi(Q) = Q - 1$. ゆえに Q も素数で, $a = 3 + 2Q$ も素数になった.

a	$a-3$	$Q=(a-3)/2$
13	10	5
17	14	7
29	26	13
37	34	17
41	38	19
61	58	29
89	86	43
97	94	47

さて逆に奇素数 a をとる. $a-3$ は偶数なのでこれを 2 で割ると素数 p. $a=2p+3, 2a-6=4p$. $2\varphi(a)-4=2(a-3)=4p$.

そこで $\varphi(2a-6)=\varphi(4p)=2(p-1)=a-5$.

$p, a=2p+3$ がともに素数となる場合は無限にあるかもしれない. かくして双子素数と類似した素数の対についてこれらが無限にあるか, という問題ができた.

このような (a,p) を年の差カップルと呼ぶことに異論はないでしょう.

$k=2, m=-9$ の場合も興味深い.

高橋洋翔氏は 2017 年 9 月 3 日の ipad での私信で

(v) $m=-1-2^e$ のとき $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ の解は無限にありそう (未証明)

と書いた.

彼はそれに先立つ 8 月 28 日ごろ ,$m=-3$ のとき 解が 4 と双子素数の兄の方になることを証明していた.

$m=-5$ と $m=-9$ のとき 解が 双子素数と類似の形になることが分かった. しかし個別研究はともかく, これから一般論を作るのは困難であろう, と私は考えていた.

しかし, 高橋洋翔氏の第 v のテーゼが気になったので調べたところこれらの解は超双子素数になることがわかった.

双子素数 と同様に 超双子素数も無限にあると信じれば解が無限にありそう, という彼の感想はまさに正鵠を得たものと言える.

6.7 検証

命題 3. p と $a=2^e p+2^e+1$ がともに素数なら a は $m=-1-2^{e+1}$ のとき
$\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ の解

Proof.
$a=2^e p+2^e+1$ は素数なので $\varphi(a)=2^e p+2^e=2^e(p+1)$.
$2\varphi(a)+1+m=2^{e+1}(p+1)-2^{e+1}=2^{e+1}p$ なので $\varphi((2\varphi(a)+1+m))=2^e(p-1)$
一方, $a+m=2^e p+2^e+1-1-2^{e+1}=2^e(p-1)$.
よって $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ が確認された.

表 4: $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$

$m=-3$		$m=-5$			$m=-9$		
a	$a-2$	a	$a-3$	b/2	a	$a-5$	b/4
5	3	13	10	5	17	12	3
7	5	17	14	7	73	68	17
13	11	29	26	13	97	92	23
19	17	37	34	17	193	188	47
31	29	41	38	19	241	236	59
43	41	61	58	29	337	332	83
61	59	89	86	43	409	404	101
73	71	97	94	47	433	428	107
103	101	109	106	53	457	452	113
109	107	137	134	67	601	596	149
139	137	149	146	73	673	668	167
151	149	181	178	89	769	764	191
181	179	197	194	97	937	932	233
193	191	229	226	113	1009	1004	251
199	197	257	254	127	1033	1028	257
$4=2^2$		$9=3^2$			$25=5^2$		

表 5: $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ 続き

$m=-17$			$m=-33$			$m=-65$		
a	$a-9$	b/8	a	$a-17$	b/16	a	$a-33$	b/32
97	88	11	97	80	5	193	160	5
113	104	13	193	176	11	257	224	7
193	184	23	673	656	41	449	416	13
241	232	29	769	752	47	577	544	17
257	248	31	1153	1136	71	641	608	19
337	328	41	2113	2096	131	769	736	23
353	344	43	2689	2672	167	1217	1184	37
433	424	53	3169	3152	197	1409	1376	43
577	568	71	4129	4112	257	2689	2656	83
593	584	73	4513	4496	281	3137	3104	97
641	632	79	4993	4976	311	3329	3296	103
21=3*7			65=5*13			209=11*19		
25=5*5			$289=17^2$			$961=31^2$		
49=7*7								

7　$m=-1-2t$ で、解が無限にあるとき

$m=-1-2t$ のとき $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ の解が無限にあるとする.

$b=\varphi(a)-t$ とおくと $2b=2\varphi(a)+1+m$. $b=2^{\varepsilon}Q$, (Q:奇数) とおくと $2b=2^{\varepsilon+1}Q$ となり, $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ に代入すると

$$2^{\varepsilon+1}\varphi(Q)=a+m=a-1-2t$$

よって,

$$a=2t+1+2^{\varepsilon}\varphi(Q).$$

さらに

$$\varphi(a)=t+b=t+2^{\varepsilon+1}Q.$$

この式を引いて

$$co\varphi(a)=a-\varphi(a)=1+t-2^{\varepsilon}co\varphi(Q).$$

よって $co\varphi(a)\leq 1+t$.

a が素数でないなら $co\varphi(a)\geq 2$. このとき評価式 $co\varphi(a)\geq\sqrt{a}$ が成り立つ.

これより, $1+t\geq\sqrt{a}$. $(1+t)^2\geq a$ となり解は有限個.

したがって a が素数になり,$co\varphi(a)=1$.

$$1=co\varphi(a)=1+t-2^{\varepsilon}co\varphi(Q).$$

よって,

$$t=2^{\varepsilon}co\varphi(Q).$$

$$a-1=\varphi(a)=t+2^{\varepsilon}Q.$$

により a に無限に解があれば Q にも無限に解がある. すなわち, $t=2^{\varepsilon}co\varphi(Q)$ において, $co\varphi(Q)=1$.

よって, Q は素数. $t=2^{\varepsilon}co\varphi(Q)=2^{\varepsilon}$.

$$\varphi(a)=t+b=t+2^{\varepsilon}Q$$

に以上の式を入れて

$$a-1=t+2^{\varepsilon}Q.$$

$\alpha=1+t=1+2^{\varepsilon},\beta=2^{\varepsilon}$ とおくとき

a,Q は素数,$a=1+t+2^{\varepsilon}Q=\alpha+\beta Q$ を満たす.

これらは超双子素数と呼ばれる.

1. $\alpha=2,\beta=1$ なら双子素数.
2. $\alpha=1,\beta=2$ ならソフィージェルマンの素数.
3. $\alpha=3,\beta=2$ なら $m=-3$ のときの解.
4. $\alpha=1+2^{\varepsilon},\beta=2^{\varepsilon}$ なら $m=-1-2\cdot 2^{\varepsilon}$ のときの解.

8　混合スーパー完全数

8.1　$\sigma(a)-\varphi(a)$

$a=2^e, q=2^e+1+m$:素数とする.
$\varphi(a)=2^{e-1}, 2\varphi(a)=2^e=a$ なので
$q=2\varphi(a)+1+m=2^e+1+m$, q:素数 なので, $\sigma(q)=q+1, q+1=2^e+2+m=a+2+m$.
これに,$q=2\varphi(a)+1+m$ を代入すると,

$$\sigma(2\varphi(a)+m+1)=a+m+2.$$

これを平行移動 m の $\sigma(a)-\varphi(a)$ 型の混合スーパー完全数という.

表 7: $P = 2, m = -2$

a	(a) = factor
4	(4)= 2^2
8	(8)= 2^3
24	(24)= $2^3 * 3$
32	(32)= 2^5
128	(128)= 2^7

表 8: $P = 2, m = 0$

a	(a) = factor
2	(2)= 2
4	(4)= 2^2
16	(16)= 2^4
256	(256)= 2^8
322	(322)= $2 * 7 * 23$

表 9: $P=2, m=2$

a	(a) = factor
2	(2)= 2
4	(4)= 2^2
8	(8)= 2^3
16	(16)= 2^4
36	(36)= $2^2 * 3^2$
64	(64)= 2^6
128	(128)= 2^7

8.2 $\varphi(a) - \sigma(a)$

$\varphi(\sigma(a) + m) = 2a + m - 2$