一般の弱完全数と 一般の WIEFERICH の素数
2015 年 9 月 16 日

飯高 茂

1. Wieferich の素数の定義

奇素数 p に対して

$$2^{p-1} - 1 \equiv 0 \mod p$$

(フェルマの小定理)

$$2^{p-1} - 1 \equiv 0 \mod p^2$$

になる場合の素数 p を Wieferich の素数[1] .

実例は２つだけで 1093,3511.(３番目のWieferich の素数はあるとすると 3×10^{17} より大きい)

$$2^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \mod p^2$$

なる場合の素数 p を 強い意味でのWieferich の素数.

計算機での実行例:

```
 ?- wieferich_loop3(2,1=<20000).
wieferich = 1093
wieferich = 3511
```

これはWieferich の素数 は 1093,3511. を意味する

```
 ?- wieferich_loop2(2,1=<20000).
wieferich2 = 3511
```

強い意味でのWieferich の素数は 3511.

1.1. **Wieferich の素数と完全数の関係.** 完全数に関連して「p:素数のときメルセンヌ数 2^p-1 には平方因子があるか.」という問題があり, たぶん無いと想像されている.

素数 $p>2$ に対して 2^p-1 が素数の平方 Q^2 で割れるとき

$$2^p-1 \equiv 0 \mod Q^2$$

Fermat 小定理によれば$2^{Q-1}-1 \equiv 0 \mod Q$ なので $Q-1=pk$. Q,p は奇数なので k は偶数. $k=2k'$ と書けることより $2^{\frac{Q-1}{2}}-1=2^{pk'}-1 \equiv 0 \mod Q^2$.

Q は強い意味での Wieferich の素数になる.

ここに希少価値の高い強い意味での Wieferich の素数が出てきたことに感動を覚える.

強い意味での Wieferich の素数は $Q = 3511$ ただ 1 つ, しか発見されていない.

$Q = 3511$ に対して$Q - 1 = 2pk'$ によって p が定まる.

$3511 - 1 = 3510$ の素因数分解は $2 * 3^3 * 5 * 13$.

よって $p = 5$ または 13.

$p = 5$ のとき $2^p - 1 = 31$

$p = 13$ のとき $2^p - 1 = 8191$ 素数なので平方因子を持たない.

1.2. P を底とする弱完全数. 究極の完全数の場合,すなわち,奇素数 P を底とする弱完全数で考える.

P を奇素数とし, $N_p = \frac{P^p-1}{P}$ が素数のとき $a = p^e N_p$ を P を底とする完全数という.

一般に P を奇素数とし, $p = e+1$ が素数のとき, $Q = \frac{P^p-1}{P}$ に関して $a = p^e Q$ を P を底とする弱完全数という.

底が$P=3$のとき$p=5$の場合 $N_5=2*11^2$. これは N_pが平方因子を持つ例.

Table 1. $e+1$: prime, $q=2p+1$: prime

e	$(Q=(3^{e+1}-1)/2)$	fct	$3^e q$
2	(13)	13	117
4	(121)	11^2	9801
10	(88573)	23*3851	5230147077
22	(47071589413)	47*1001523179	1477156353259726319517
28	(34315188682441)	59*28537*20381027	785021449541029367424039801
40	(18236498188585393201)	83*2526913*86950696619	221713244121518884968045982580046482001
52	A	$A0$	B

$$A=(9691622833840009948398361)$$
$$A0=107*24169*3747607031112307667$$

$$B=62618368768939376720930024035982040019969414457001$$

2番目のところに早くも,$p=5$ に関して平方数 $N_p=121=$

2. 奇素数 P を底とする Wieferich 素数

奇素数 P に対して P と相異なる素数 Q は

$$P^{Q-1} - 1 \equiv 0 \ Q^2$$

になる場合素数 Q を P を底とする **Wieferich 素数**という.

より簡単に一般の Wieferich 素数ともいう.

$P^{\frac{Q-1}{2}} - 1 \equiv 0 \ Q^2$ の倍数になる場合 P を底とする 強い意味の **Wieferich 素数**という.

2.1. **一般の弱完全数と 一般のWieferich の素数.** 奇素数 P を底にする弱完全数において$p=e+1$ が素数のとき, $N_p=\frac{P^p-1}{P}$ が素数の平方 Q^2 を因子として持つとする.

このとき
$$P^p \equiv 1 \mod Q^2.$$

1) $P \not\equiv 1 \mod Q$ なら, Q を法として, P の位数は p. 一方, $P \neq Q$ なのでフェルマの小定理により
$$P^{Q-1} \equiv 1 \mod Q.$$

$Q \geq 3, p \geq 3$ のとき$Q-1=2pL$ と整数 L を用いて書ける. よって
$$P^{\frac{Q-1}{2}} = P^{pL} \equiv 1 \mod Q^2.$$
したがって, 素数 Q は底が P の 強い意味での Wieferich の素数になる.

$p \geq 3$ を仮定しているので, $Q = 1 + 2pL \geq 7$. $Q - 1 = 2pL \geq 2p$ により $Q-1$ の奇数素因子 p について $N_p = \frac{P^p-1}{P}$ の素因数分解を行い, Q^2 が因数になるものを探索すればよい.

2.2. **(強い意味で)Wieferich の素数の計算.** 底が P の (強い意味で)Wieferich の素数も希少価値がありそうなのでこれらをコンピュータで探してみよう.

Table 2. 強い意味の Wieferich 素数 $P = 3, \cdots, 59$ の例, $Q < 5000$

P	Q
3	11
19	3
19	137
23	13
31	79
31	6451
37	3
53	47
53	59
53	97
59	2777

TABLE 3. 強い意味の Wieferich 素数 $P = 67, \cdots, 199$ の例, $Q < 5000$

P	Q
67	7
71	47
71	331
73	3
79	7
83	4871
101	5
109	3
127	3
137	59
149	5
151	5
163	3
173	3079
179	17
181	3
181	101
191	13
197	7
197	653
199	3
199	5

この表にある P に対して $prime = Q$ で与えられる Q に関して,奇素数 p なら, $Q - 1 = 2pL$ 満たす. $Q - 1$ の素因子 p について $N_p = \frac{P^p - 1}{P}$ の因数分解を行い, Q^2 が因数になるものを探索する.

TABLE 4. Q^2 が N_p の因数

P	Q	p
3	11	5
53	47	23
71	47	23
79	7	3
101	5	2
137	59	29
149	5	2
151	5	2
197	7	3
199	5	2

3. 平方因子をもつ弱完全数の例

以上のデータを基にして平方因子をもつ弱完全数の例をあげる.

TABLE 5. $P = 53$

p	$N_p =$ 分解	a
2	(54)=2*3^3	2862
3	(2863)=7*409	8042167
5	(8042221)=11*131*5581	63456991998301
7	(22590598843)=29*778986167	5007061908766215 73747
11	(178250690949465223)=178250690949465223	31173812431056824238751548578194927
13	A	B
17	C	D
19	E	F
23	G	H

3.1. $P = 53$.

$A = (50070619087704781l461) = 13 * 3297113 * 11681692691969$
$B = 24597637468481768160273653860668729814O501$
$C = (3950812685697719092424754481) = 647 * 4013 * 12479 * 121936356626073149$
$D = 153144129363856840298269545521743533506967830282106204O1$
$E = (110978328341248929306211353371 83) = 229 * 32688470798197 * 1482545708952391$
$F = 120838084300705448509353018182383219548095580591429385933186087$
$G = (87567239118838619296100386576471206763) = 47^2 * 4969 * 21529 * 16055056483 * 23080289344401529$
$H = 752334171846386320152577501685552265953592059779483528661393037833264739 6067$

$p = 2$ において $N_2 = 54 + 1 = 2 * 3^3$ ここに平方因子 3^2,
G に 47^2 という平方因子があり, $47 = 2p + 1$.
$p = 29$ までするとと 59^2 という平方因子がありえるが wx-maxima の能力を超えた.

TABLE 6. $P = 71$

2	(72)=$2^3 * 3^2$	5112
3	(5113)=5113	25774633
5	(25774705)=5*11*211*2221	654978581329105
7	(129930287977)=7*883*21020917	1664410677979099271 7817
11	(330174703031 0022361)=23*143554218709131407	1074799072748272704736869033426353 5561
13	A	B
17	C	D
19	E	F
23	G	H

3.2. $P = 71$.

$A = (16644106779792822721873) = 3202878953 * 5196608121641$
$B = 27312451175774899273898654531941447400995339 3$
$C = (42295473201803245709778876 1537) = 239 * 3652120847 * 484563667343825089$
$D = 176371117937340781806990224586174626005792843120041060998977$
$E = (2132114804102901616229953146908089) = 1900857799450121 {*} 1121659287043817009$
$F = 4481886586637081935569839157302377956474817214183976021737973255529$
$G = (5418062125724042704601999201417449435 0633) = 47^2 {*} 242329 {*} 1012145327383711183656369385703 5$
$H = 2894194089963906004849054026497654260619806809292930186226138112926209752659428153$

$p = 2$ において $N_2 = 2^3 * 3^2$ が 2 つの平方因子 $2^2, 3^2$ を持っている.

$p = 23$ において G に 47^2 という平方因子がある. $47 = 2 * 23 + 1$.

TABLE 7. Wieferich 素数 $P = 3, \cdots, 31$ の例, $Q < 5000$

P	Q
3	11
7	5
11	71
13	863
17	3
19	3
19	7
19	13
19	43
19	137
23	13
31	7
31	79
31	6451
37	3
41	29
43	5
43	103
53	3
53	47
53	59
53	97
59	2777

3.3. 一般の Wieferich 素数.

この表で $P = 5$ のときの Wieferich 素数が出て無いのは不思議なので探索範囲を拡げたら $P = 5, Q = 20771$ が出てきた.

一般に与えられた素数 P に対してこれを底とするWieferich素数があることは期待できる.