49 番目の完全数発見
(日本数学検定協会)

飯高 茂

2016 年 5 月 21 日

目 次

1　完全数

a を自然数とするときその約数の和を $\sigma(a)$ と書く．これを a の関数とみてユークリッド関数という．

a,b が互いに素なら

$$\sigma(a)\sigma(b)=\sigma(ab)$$

が成り立つ．これをユークリッド関数の乗法性という．

ところで $\sigma(a)=2a$ を満たす数 a を 完全数 (perfect numbers) という．

6,28,496,8128 などがあり古代の数学者ユークリッドによって考えられた．

これらを素因数分解すると

$$6=2*(2^2-1),28=2^2*(2^3-1),496=2^4*(2^5-1),8128=2^6*(2^7-1)$$

などとなる．

最近 (2016 年 1 月 7 日)49 個目の完全数が発見され一般の新聞紙上でも大きく報道された．

2　ユークリッド

エウクレイデス (ユークリッド),『ユークリッド原論』(By Wikipedia) 第 9 巻，命題 36 は次のようなものである．

もし単位から始まり順次に 1 対 2 の比をなす任意個の数が定められ，それらの総和が素数になるようにされ，そして全体が最後の数にかけられてある数をつくるならば，その数は完全数であろう．

[解説]

古代ギリシャの数学では 単位は 1 を指す．

1 から始まり, 順次 2 倍する．任意個の数を n 個とする．

$$1,2,2^2,2^3,\cdots,2^{n-1}$$

それらの総和

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}$$

は等比数列の和の公式により

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$$

総和を p と書き素数と仮定する.

総和 p を 最後の数である 2^{n-1} とかけた数を a とおくとこれは完全数になる.

例

$n = 3$

$Q = 1 + 2 + 4 = 7$ は素数. $4 * 7 = 28$ は完全数

$n = 5$ の場合は各自やってみよう.

2 のべきから 1 引いた $Q = 2^{e+1} - 1$ が素数になるとき $a = 2^e Q$ は完全数でありとくにこの形の数をユークリッドの完全数という.

これを確認しよう. ユークリッド関数の乗法性によって,

$$\sigma(a) = \sigma(2^e)\sigma(Q) = (2^{e+1} - 1)(Q + 1) = 2a - Q + 2^{e+1} - 1 = 2a$$

$e+1$ が素数のとき $Q=2^{e+1}-1$ をメルセンヌの数という．とくに Q が素数のときメルセンヌの素数という．

図 1: Mersenne 1588–1684

1588 年は太閤秀吉の刀狩りの年で, 日本史で記憶を強制される年号である．私は, イゴパッパトカタナガリ, として記憶している．

一般に $2^{e+1}-1$ が素数になるとき $e+1$ は素数になることが証明できる．

3　完全数

$M(p)=2^p-1$ をメルセンヌ素数とする．$P(p)=2^{p-1}M(p)$ がユークリッドの完全数になる．

3.1 完全数の数表

表 1: 完全数の場合

$e \bmod 4$	e	$e+1$	$2^e * q$	a	$a \bmod 10$
1	1	2	$2*3$	6	6
2	2	3	2^2*7	28	8
0	4	5	2^4*31	496	6
2	6	7	2^6*127	8128	8
0	12	13	$2^{12}*8191$	33550336 (1456)	6
0	16	17	$2^{16}*131071$	8589869056 (Cataldi,1588)	6
2	18	19	$2^{18}*524287$	137438691328 (Cataldi,1588)	8
2	30	31	A	B (Euler, 1772)	8
0	60	61	C	D (Pervushin, 1883)	6
0	88	89	E	F (Powers, 1911)	6
0	106	107	G	H (Powers, 1914)	8
0	126	127	I	J (Lukas, 1876)	8

$A = 2^{30} * 2147483647$
$B = 2305843008139952128$
$C = 2^{60} * 2305843009213693951$
$D = 2658455991569831744654692615953842176$
$E = 2^{88} * 618970019642690137449562111$
$F = 191561942608236107294793378084303638130997321548169216$
$G = 2^{106} * 162259276829213363391578010288127$
$H = 13164036458569648337239753460458722910223$
$- 4723183869431177837281 28$
$I = 2^{126} * 170141183460469231731687303715884105727$
$J = 144740111546645244279463731260859884815736774 91$
$- 47483588906635434913119915 2128.$

最初の 4 つの完全数が見出されたのは紀元前のことであったが 15 世紀になって 5 番目の完全数が発見された．4 番目の完全数 8128 は 4 桁であったが, 5 番目の完全数 33550336 は 8 桁もあった. それから 130 年経って,6,7 番目が Cataldi によって見出された.

8 番目の完全数はオイラーが発見した．そのためには $2^{31} - 1$ が素数であることの証明が必要になった.

3.2 メルセンヌ素数と完全数の表

表 2: メルセンヌ素数 $M(p)$ 1

番号	p	$M(p)$ の桁数	$P(p)$ の桁数	発見年	発見者
5	13	4	8	1456	不明
6	17	6	10	1588	Cataldi
7	19	6	12	1588	Cataldi
8	31	10	19	1772	Euler
9	61	19	37	1883	Pervushin
10	89	27	54	1911	Powers
11	107	33	65	1914	Powers
12	127	39	77	1876	Lucas

表 3: メルセンヌ素数 $M(p)$ 2 コンピュータの活用

番号	p	$M(p)$ の桁数	$P(p)$ の桁数	発見年	発見者
13	521	157	314	1952	Robinson
14	607	183	366	1952	Robinson
15	1279	386	770	1952	Robinson
16	2203	664	1327	1952	Robinson
17	2281	687	1373	1952	Robinson
18	3217	969	1937	1957	Riesel
19	4253	1281	2561	1961	Hurwitz
20	4423	1332	2663	1961	Hurwitz
21	9689	2917	5834	1963	Gillies
22	9941	2993	5985	1963	Gillies
23	11213	3376	6751	1963	Gillies
24	19937	6002	12003	1971	Tuckerman
25	21701	6533	13066	1978	Noll , Nickel
26	23209	6987	13973	1979	Noll
27	44497	13395	26790	1979	Nelson , Slowinski
28	86243	25962	51924	1982	Slowinski
29	110503	33265	66530	1988	Colquitt
30	132049	39751	79502	1983	Slowinski
31	216091	65050	130100	1985	Slowinski
32	756839	227832	455663	1992	Slowinski
33	859433	258716	517430	1994	Slowinski e al.
34	1257787	378632	757263	1996	Slowinski

表 4: メルセンヌ素数 $M(p)$ 3 GIMPS の時代

番号	p	$M(p)$ の桁数	$P(p)$ の桁数	発見年	発見者
35	1398269	420921	841842	1996	
36	2976221	895932	1791864	1997	
37	3021377	909526	1819050	1998	
38	6972593	2098960	4197919	1999	
39	13466917	4053946	8107892	2001	
40	20996011	6320430	12640858	2003	
41	24036583	7235733	14471465	2004	
42	25964951	7816230	15632458	2005	
43	30402457	9152052	18304103	2005	
44	32582657	9808358	19616714	2006	
45	37156667	11185272	22370543	2008	
46	42643801	12837064	25674127	2009	
47	43112609	12978189	25956377	2008	
48	57885161	17425170	34850339	2013	
49	74,207,281	22,338,618	44,677,235	2016	

1996 年からはほぼ毎年のように発見されたが 2009 年からペースが落ちいている.

表 5: メルセンヌ素数の発見者

N	発見年	発見者
35	1996	Armengaud, Woltman, et al. (GIMPS)
36	1997	Spence, Woltman,et al. (GIMPS)
37	1998	Clarkson, Woltman, Kurowskiet al. (GIMPS, PrimeNet)
38	1999	Hajratwala, Woltman, Kurowskiet al. (GIMPS, PrimeNet)
39	2001	Cameron, Woltman, Kurowski et al. (GIMPS, PrimeNet)
40	2003	Shafer, Woltman, Kurowski et al. (GIMPS, PrimeNet)
41	2004	Findley, Woltman, Kurowski et al. (GIMPS, PrimeNet)
42	2005	Nowak, Woltman, Kurowski et al. (GIMPS, PrimeNet)
43	2005	Cooper, Boone, Woltman, Kurowski et al. (GIMPS, PrimeNet)
44	2006	Cooper, Boone, Woltman, Kurowski et al. (GIMPS, PrimeNet)
45	2008	Elvenich, Woltman, Kurowski et al. (GIMPS, PrimeNet)
46	2009	Strindmo, Woltman, Kurowski et al. (GIMPS, PrimeNet)
47	2008	Smith, Woltman, Kurowski et al. (GIMPS, PrimeNet)
48	2013	Cooper, Woltman, Kurowski et al. (GIMPS, PrimeNet)
49	2016	Cooper, Woltman (prime95), Kurowski

New record prime: $2^{74,207,281} - 1$ with 22,338,618 digits
by Cooper, Woltman, Kurowski, Blosser and GIMPS (7 Jan 2016).

[注] 45 番目以降は他にメルセンヌ素数のある可能性があるので仮の番号

[注] GIMPS は Great Internet Mersenne Prime Search の略称.1996 年に発足. 分散型コンピューティングによって, 参加者のコンピュータの余剰処理能力などを利用して解析, 検証作業を行う.

このプロジェクトは George Woltman によってソフトが作られ, 開始された. Scott Kurowski が研究を手助けするサーバを稼動させている. これまで 15 ものメルセンヌ素数が発見された.

日本人による貢献がないのがやや残念というべきか.

4 弱い完全数

$Q = 2^{e+1} - 1$ が素数になるという条件をはずして, $e+1$ が素数になるという条件のみをつけるとき $a = 2^e Q$ を弱い完全数 (weakly perfect numbers) ということにする.

表 6: $P = 2$:弱完全数

p	$Q = 2^p - 1$	素因数分解	a:弱完全数
2	(3)	3	6
3	(7)	7	28
5	(31)	31	496
7	(127)	127	8128
11*	(2047)	23*89	2096128
13	(8191)	8191	33550336
17	(131071)	131071	8589869056
19	(524287)	524287	137438691328
23*	(8388607)	47*178481	35184367894528
29*	(536870911)	233*1103*2089	144115187807420416
31	(2147483647)	2147483647	2305843008139952128

(* は非完全数を示す.)

この表を観察すると $Q \equiv 1$ または $7 \mod 10$; $a \equiv 6$ または $8 \mod 10$ をやはり満たしていることがわかる.

詳しく述べると

- $p \equiv 1 \mod 4$ なら $Q \equiv 1 \mod 10$, $a \equiv 6 \mod 10$.
- $p \equiv 3 \mod 4$ なら $Q \equiv 7 \mod 10$, $a \equiv 8 \mod 10$.

5　弱弱完全数

条件をさらに弱めて, p を奇数にしても次からわかるように 末尾 1 桁が 6 または 8, はやはり成立している.

表 7: $P = 2$

p	$Q = 2^p - 1$	素因数分解	a: 弱弱完全数
2	3	3	6
3	7	7	28
5	31	31	496
7	127	127	8128
9	511	7*73	130816
11	2047	23*89	2096128
13	8191	8191	33550336
15	32767	7*31*151	536854528
17	131071	131071	8589869056
19	524287	524287	137438691328
21	2097151	$7^2 * 127 * 337$	2199022206976
23	8388607	47*178481	35184367894528
25	33554431	31*601*1801	562949936644096
27	134217727	7*73*262657	9007199187632128
29	536870911	233*1103*2089	144115187807420416
31	2147483647	2147483647	2305843008139952128

p を奇数とだけ仮定している場合,$Q = 2^p - 1$ とおき $a = 2^e Q$ を弱々しいが完全な数, さらに簡潔に弱弱完全数と呼ぶ.

6　オイラーによる証明

偶数の完全数はユークリッドの完全数に限る.
このことはオイラーによりはじめて証明された.

図 2: Euler 1707–1783

没後に公表された彼の証明をリライトすると次のとおり.
a を偶数の完全数とし, $a = 2^e L (L:$ 奇数$)$ の形に書く.

$$\sigma(a) = \sigma(2^e)\sigma(L) = (2^{e+1} - 1)\sigma(L), 2 \times a = 2^e L = 2^{e+1} L$$

となるので
$(2^{e+1} - 1)\sigma(L) = 2^{e+1} L$ により

$$\frac{2^{e+1} - 1}{2^{e+1}} = \frac{L}{\sigma(L)}.$$

左辺は既約分数だから $L = c(2^{e+1} - 1), \sigma(L) = 2^{e+1} c$ を満たす自然数 c がある.

1). $c=L$ なら $2^{e+1}-1=1$ になり $e=0$. a は奇数となり仮定に反する.

2). $c=1$ なら $\sigma(L)=L+1$ になるので L は素数.

3). $c>1$ なら c は $1,L$ 以外の L の約数である. $\sigma(L)\geq 1+L+c$ を満たすから

$$2^{e+1}c=\sigma(L)\geq 1+L+c=1+c(2^{e+1}-1)+c=1+2^{e+1}c$$

となって矛盾.

証明のキーは $\sigma(L)=L+1$ は L が素数 p になる必要十分条件になることである.

6.1 $2p$ の特徴づけ

$a=2p, p\neq 2$ のとき関数 $\sigma(a)$ の乗法性を用いて

$$\sigma(a)=\sigma(2p)=\sigma(2)\sigma(p)=3(p+1)=3(\frac{a}{2}+1)$$

となるので整理すると

$$2\sigma(a)=3(a+2).$$

$a=2p$ のときにあった p がうまく消えている.

この逆問題を考える. すなわちこの式を a についての方程式と考えこれを満たす解 a をすべて求めよう.

方程式の解 a としては $2p$ がある. これらに限るか? という問題を考える.

式から a は偶数になることがわかる. これは大きなアドバンテージである.

それゆえ $a=2^eL(L:奇数)$ と書けるのでこれを代入する.

$$2\sigma(a)=2(2^{e+1}-1)\sigma(L)=3(a+2)=3(2^eL)+6.$$

ゆえに

$$2(2^{e+1}-1)\sigma(L)=3(2^eL)+6.$$

2 で除して

$$(2^{e+1}-1)\sigma(L)=3(2^{e-1}L)+3.$$

$L=1$ のとき.

$$2^{e+1}-1=3\cdot 2^{e-1}+3.$$

よって $2^{e-1}=3+1=4$. ゆえに $e=3; a=8$.

$L > 1$ のとき. $\sigma(L) \geq L + 1$ を用いて

$$3(2^{e-1}L) + 3 = (2^{e+1} - 1)\sigma(L) \geq (2^{e+1} - 1)(L + 1).$$

$$3(2^{e-1}L) + 3 \geq (2^{e+1} - 1)(L + 1) = (4 \cdot 2^{e-1} - 1)L + 4 \cdot 2^{e-1} - 1.$$

整理すると

$$3(2^{e-1}L) + 3 \geq (4 \cdot 2^{e-1} - 1)L + 4 \cdot 2^{e-1} - 1.$$

ゆえに

$$-4(2^{e-1} - 1) \geq (2^{e-1} - 1)L.$$

$e = 1$ とすると $0 = 0$ となって上の式は成り立つ. そこで前の式に戻り,

$$(4 - 1)\sigma(L) = 3L + 3.$$

3 で割ったら $\sigma(L) = L + 1$. よって L は素数 p. ゆえに $a = 2p$.

$e > 1$ とすると $2^{e-1} - 1 > 0$ なのでこれで割ると $-4 \geq L$ となり矛盾.

以上によって, 方程式の解は $a = 2p$ (通常解という) のほかに $a = 8$ がありこれらだけであることがわかった.

通常解 $2p$ 以外の解 $8 = 2 \times 4$ の形を見ると, 4 が「ボクも素数に入れて」と叫んでいるようである. そこで 4 を擬素数とみて $a = 2 \times 4$ を擬素数解という.

できてみると証明はやさしいがオイラーの証明と似ているところがカワイイ.

6.2 $a = P^{\varepsilon}p$ の特徴づけ

素数 P の累乗 P^{ε} をとる. $p \neq P$ を満たす素数 p をとり $a = P^{\varepsilon}p$ とおく.

$$\sigma(a) = \sigma(P^{\varepsilon}p) = \sigma(P^{\varepsilon})\sigma(p) = \frac{P^{\varepsilon+1} - 1}{\overline{P}}(p + 1)$$

となる. 分母を払ってから,P^{ε} を乗ずると

$$\begin{aligned}\overline{P}P^{\varepsilon}\sigma(a) &= (P^{\varepsilon+1} - 1)(a + P^{\varepsilon})\\ &= a(P^{\varepsilon+1} - 1) + \delta.\end{aligned}$$

ここで $\delta = P^{\varepsilon}(P^{\varepsilon+1}-1)$ とおく．すなわち

$$\overline{P}P^{\varepsilon}\sigma(a) = a(P^{\varepsilon+1}-1)+\delta$$

が基本方程式である．

この解は擬素数解 $a = P^{2\varepsilon+1}$ と通常解 $a = P^{\varepsilon}p$ ($p \neq P$ となる素数) となることが証明できる．

7　$a = 6p$ の特徴づけ

素因子が 1 個の場合には方程式の問題の完全に解決ができた．次に簡単な素因子が 2 個, とくに $a = 6p$ の場合を考える．$p \neq 2, 3$ と仮定する．6 はいわゆる完全数である．

$\sigma(a) = \sigma(6)\sigma(p) = 12(p+1) = 2a + 12$ により $\sigma(a) = 2a + 12$ ができる．

そこで方程式 $\sigma(a) = 2a + 12$ の解をすべて求めたい．

この式を使うだけでは a が偶数とは言えないしその証明は難しいようだ.「

奇数完全数は存在するか?」 という 2000 年来の数学世界の懸案問題より難しそうである．

ところでこの解をコンピュータで探索すると通常解 $a = 6p(p \neq 2, 3$:素数) と擬素数解 $a = 6 * 2^2, 6 * 3^2$ の他にわけのわからない解が出てきた．このような解をエイリアン解と呼ぶ．

表 8: $\sigma(a) = 2a + 12$ のエイリアン解

a	素因数分解
304	$2^4 * 19$
127744	$2^8 * 499$

エイリアン解は 2 個しか出てこなかったがいずれも $a = 2^e p, (p = 2^{e+1} - 13:$ 素数) の形をしている．そこでその形になるエイリアン解を探す

表 9: $q = 2^{e+1} - 13$: 素数

e	$q = 2^e - 13$
12	8179
16	131059
56	144115188075855859
104	40564819207303340847894502572019
136	174224571863520493293247799005065324265459

エイリアン解は末尾が 9．また指数 e は 4 の倍数であるらしいことがわかる．これらはメルセンヌ素数を -12 だけ平行移動した形をしている．

完全数は無限にあるという予想は, 完全なるものが無数にあるという意味で美しい．

$q = 2^{e+1} - 13$ が素数になる e はコンピュータで探してもその数はごく少ない．それにもかかわらず無数にあるにあるに違いない．

この予想はだれも証明してくれそうも無い. 実に恐ろしい予想である．

表 10: $q=2^{e+1}-13; e=4k$

e	$q=2^{e+1}-13; e=4$	素因数分解
4	19	19
8	499	499
12	8179	8179
16	131059	131059
20	2097139	11*190649
24	33554419	197*170327
28	536870899	23*23342213
32	8589934579	1237*1549*4483
36	137438953459	5507*24957137
40	2199023255539	11*19*10521642371
44	35184372088819	59*596345289641
48	562949953421299	229*919*17729*150881
52	9007199254740979	149*60451001709671
56	144115188075855859	144115188075855859

8　半完全数と重完全数

完全数の定義を復習する:

$q=2^{e+1}-1$: 素数のとき $a=2^e q$ を完全数という.

$q=2^{e+1}-1+m$: 素数のとき $a=2^e q$ を狭義の m だけ平行移動した完全数という.

m だけ平行移動した完全数の満たす方程式を求めよう.

$$\sigma(a)=\sigma(2^e q)=(2^{e+1}-1)(q+1)=2^{e+1}q-2^{e+1}+q+1=2a-m.$$

かくして m だけ平行移動した完全数の満たす方程式 $\sigma(a)=2a-m$ が得られた.

これを満たす解を広義の m だけ平行移動した完全数という.

広義の m だけ平行移動した完全数で狭義の m だけ平行移動した完全数にならないものを発見することがわれわれの課題である.

次に $q=2^{e+1}-1+m$: 素数のとき $a=2^{e-1}q$ を狭義の m だけ平行移動した半完全数という.

狭義の半完全数の満たす方程式を求めよう.

半完全数 $a=2^{e-1}q$ に対して,

$$\sigma(a) = \sigma(2^{e-1}q) = (2^e-1)(q+1) = (2^e-1)q + 2^e - 1 = 2a - q + 2^e - 1.$$

$q = 2^{e+1} - 1 + m$ を用いて

$$2\sigma(a) = 4a - 2q + 2^{e+1} - 2 = 4a - 2q + q + 1 - m - 2 = 4a - q - m - 1.$$

$a = 2^{e-1}q$ の最大素因子が q. 一般に a の最大素因子を $\mathrm{Maxp}(a)$ と書く.
よって半完全数の満たす方程式として

$$2\sigma(a) = 4a - \mathrm{Maxp}(a) - m - 1.$$

これを満たす解を広義の半完全数という.

広義の m だけ平行移動した半完全数で狭義の m だけ平行移動した半完全数にならないものを発見することは面白い課題である.

9 重完全数

$q = 2^{e+1} - 1 + m$: 素数のとき $a = 2^e q$ を m だけ平行移動した完全数という. また $a = 2^{e+1}q$ を狭義の m だけ平行移動した重完全数という.

狭義の重完全数の満たす方程式を求めよう.

重完全数 $a = 2^{e+1}q$ に対して,

$$\sigma(a) = \sigma(2^{e+1}q) = (2^{e+2} - 1)(q + 1) = (2^{e+1} - 1)q + 2^{e+2} - 1 = 2a - q + 2^{e+2} - 1.$$

$q = 2^{e+1} - 1 + m$ を用いて

$$\sigma(a) = 2a + q - 2m + 1.$$

これが狭義の m だけ平行移動した重完全数の満たす方程式で, これを満たす解をすべて広義の m だけ平行移動した重完全数という.

$$\sigma(a) = 2a + \mathrm{Maxp}(a) + 1 - 2m.$$

9.1 $P=2, m=0$ の場合

表 11: $[P=2, m=0]$; 完全数

a	素因数分解
6	$2*3$
28	2^2*7
496	2^4*31
8128	2^6*127

これは古典的完全数

表 12: $[P=2, m=0]$ 重完全数

a	素因数分解
12	2^2*3
56	2^3*7
66	$2*3*11$
992	2^5*31
3230	$2*5*17*19$
4730	$2*5*11*43$
8415	$3^2*5*11*17$
16256	2^7*127
28035	$3^2*5*7*89$
491536	$2^4*31*991$

$12=2^2*3$,$56=2^3*7$, $992=2^5*31, 16256=2^7*127$ は古典的完全数の 2 倍
新規参入組は次の通り.
$66=2*3*11,$
$3230=2*5*17*19$
$4730=2*5*11*43$
$8415=3^2*5*11*17$
$28035=3^2*5*7*89$
$491536=2^4*31*991$

表 13: $[P=2, m=0]$ 半完全数

a	素因数分解
3	3
14	$2*7$
248	2^3*31
1155	$3*5*7*11$
4064	2^5*127
483945	$3*5*7*11*419$
11532050	$2*5^2*19*61*199$
16775168	$2^{11}*8191$

$3=3$,$14=2*7$, $248=2^3*31$, $4064=2^5*127$

これらは古典的完全数の半分の場合
古典的完全数の 6 がその半分の 3 となって現れている.

新規参入組
$1155=3*5*7*11$,
$483945=3*5*7*11*419$.
11532050 $2*5^2*19*61*199$.

9.2 $P = 2, m = 2;$ の場合

表 14: $[P = 2, m = 2]$ 完全数

a	素因数分解
3	3
10	$2 * 5$
136	$2^3 * 17$
32896	$2^7 * 257$

フェルマ素数がでてきた.

表 15: $[P = 2, m = 2]$ 半完全数

a	素因数分解
5	5
68	$2^2 * 17$
130	$2 * 5 * 13$
16448	$2^6 * 257$
24616	$2^3 * 17 * 181$
244036	$2^2 * 13^2 * 19^2$
272228	$2^2 * 11 * 23 * 269$

$m=2$, 重完全数 の方程式は

$$\sigma(a) = 2a + \mathrm{Maxp}(a) - 3.$$

表 16: $[P=2, m=2]$ 重完全数

a	素因数分解
2	2
4	2^2
6	$2*3$
8	2^3
16	2^4
20	2^2*5
32	2^5
64	2^6
70	$2*5*7$
128	2^7
256	2^8
272	2^4*17
512	2^9
1024	2^{10}
1652	2^2*7*59
2048	2^{11}
4096	2^{12}
8192	2^{13}
16384	2^{14}
32768	2^{15}
65536	2^{16}
65792	2^8*257
131072	2^{17}
262144	2^{18}
524288	2^{19}
1048576	2^{20}
2097152	2^{21}
4194304	2^{22}

500 万以下のとき重完全数の解が無数にでてきた.
しかも, 1)$s(a)=1, a=2^e$, 2) $s(a)=2, a=2^q$,3) $a=2^e qr, r<q$: 素数と解

がきれいに分類されている．このままの形で証明することは困難だが条件付で証明は可能.

9.3 proof

$\sigma(a) = 2a + \mathrm{Maxp}(a) - 3$ の解について.
1)$a = 2^e$ はすべて解
$a = 2^e$ のとき,$\sigma(a) = 2^{e+1} - 1$, 一方 $2a + \mathrm{Maxp}(a) - 3 = 2 * 2^e + 2 - 3 = 2^{e+1}$.
よって, $a = 2^e$ は解.

一般に, p : 素数,$a = p^e$ のとき $\sigma(a) = 2a + \mathrm{Maxp}(a) - 3$ を満たすとする.
$\sigma(a) = \dfrac{p^{e+1} - 1}{\overline{p}}$. 一方 $2a + \mathrm{Maxp}(a) - 3 = 2 * p^e + p - 3$.
ゆえに,

$$p^{e+1} - 1 = (2 * p^e + p - 3)(p - 1).$$

変形して

$$p(p-4) + p^e(p-2) + p + 4.$$

$p > 2$ で素数とすると矛盾. よって, $p = 2$.

2) $a = 2^e q$ は解とする.

$$\sigma(a) = (2^{e+1})(q+1), 2a + q - 3 = 2^{e+1} + q - 3$$

によって, $2^{e+1} = 2q - 2$. $q = 2^e + 1$: フェルマ素数

2)* $a = 2^e q$ は偶数とする. $q = 2^e L.L$:奇数, とおく. $\mathrm{Maxp}(a) = \mathrm{Maxp}(L) = q$ に注意.

$$\sigma(a) = (2^{e+1} - 1)\sigma(L), 2a + \mathrm{Maxp}(a) - 3 = 2^{e+1}L + q - 3$$

を用いて,

$$(2^{e+1} - 1)\sigma(L) = 2^{e+1}L + q - 3.$$

$$(2^{e+1} - 1)\mathrm{co}\sigma(L) = \sigma(L) + q - 3.$$

L が素数なら $L = q$. $\mathrm{co}\sigma(L) = 1, L = q$ により,

$$(2^{e+1} - 1) = q + 1 + q - 3.$$

$2q - 2 = 2^{e+1}$ なので $q = 2^e + 1$. これはフェルマ 素数.
ここで $L = q^f$ を仮定する.[1] このとき $f = 1, Y = q$ を示す.
$X = 2^e, Y = L = q^f$ とおけば

[1]望ましくない仮定

$$(2^{e+1}-1)\sigma(L)=(2X-1)\frac{qY-1}{\overline{q}}.$$

計算して

$$2XY-qY-2X=q^2-4q+2.$$

$$2X(Y-1)-q(Y-1)=q^2-3q+2,$$

により

$$(2X-q)(Y-1)=q^2-3q+2=(q-1)(q-2).$$

$$(2X-q)(Y^{f-1}+\cdots+q+1)=(q-2).$$

これより $f=1$. ゆえに $a=2^eq:,q=2^e+1$. これはフェルマ 素数.

3) $a=2^eqr, r<q:$ 素数, は解とする.
$\widetilde{q}=q+1,\widetilde{r}=r+1$, を用いて

$$\sigma(a)=(2^{e+1}-1)\widetilde{q}\widetilde{r}=2^{e+1}\widetilde{q}\widetilde{r}-\widetilde{q}\widetilde{r}=2a+q-3.$$

$\Delta=q+r$ を使うと

$$2^{e+1}(\Delta+1)-(qr+\Delta+1)=q-3.$$

$\widetilde{r}$ を用いると,

$$2^{e+1}(\Delta+1)=(qr+\Delta+1)+q-3=q\widetilde{r}+q+\widetilde{r}-3.$$

$N=2^{e+1}-1$ とおくとき
$q\widetilde{r}=(q+\widetilde{r})N+3, q_0=q-N, r_0'=\widetilde{r}-N$ により $D=N^2+3$ とおけば

$$q_0r_0'=D.$$

$e=1$ とすると, $N=3,D=9+3=12=4*3$. $q_0=q-3$ は偶数,$r_0'=r'-3$ は奇数.

よって, $q_0=q-3=4;\ q=7.\ r_0'=r'-3=3.\ r'=6;r=5.\ a=2*5*7$ がえられた.

これからパソコン計算でいくつかの解が出る.
$a=2^1*7*5$, a=70
$a=2^2*11*19$, a=836

$a = 2^2 * 59 * 7$, a=1652

$a = 2^3 * 19 * 71$, a=10792

$a = 2^6 * 131 * 4159$, a=34869056

$a = 2^6 * 563 * 163$, a=5873216

$a = 2^8 * 3203 * 607$, a=497720576

しかしながら $q > r$ を満たす必要があり

$70 = 2 * 7 * 5, 413 = 2^2 * 59 * 7, 91769 = 2^6 * 563 * 163, a = 497720576 = 2^8 * 3203 * 607$ のみが解として残る.