1 $P=3$ のときの完全数

$P=3$ なので $2\sigma(a)=3a+q-2m$ が方程式であり $3^e q(q:$ 素数$)$ の形の解を正規系という.

$a=3^e q$ が $2\sigma(a)=3a+q-2m$ の解とすると,

$$2\sigma(a)=(3^{e+1}-1)(q-1)=3^{e+1}q-q-3^{e+1}+1=3a-q-3^{e+1}+1.$$

$$3a-q-3^{e+1}+1=3a+q-2m.$$

$q=\frac{3^{e+1}-1}{2}+m$ となり $a=3^e q$ は狭義の完全数になる.

2 完全数の垂直的展開

$P=3,\ a\le 10^6$ について m が小さい場合の数表を見てみよう.

2.1 $P=3, m=0$

$m=0$ なので $2\sigma(a)=3a+q$ が方程式

表 1: $P=3, m=0$

a	factor
4	2^2
117	3^2*13
796797	3^6*1093
1212741	3^2*47^2*61

2.2 $P = 3, m = 1$

$m = 1$ なので $2\sigma(a) = 3a + q - 2$ が方程式

表 2: $P = 3, m = 1$

a	factor
2	2
15	$3 * 5$
741	$3 * 13 * 19$
1107	$3^3 * 41$
14883	$3 * 11^2 * 41$
38781	$3^2 * 31 * 139$

ここで素数解 $a = 2$ があるのでこれを一般化する.

$2\sigma(a) = 3a + q - 2m$ に素数解が p あるとする.

$2(p+1) = 3p + p - 2m$ により $q = p$ $2p + 2 = 4pp - 2m$ により $p = m + 1$.

よって一般に $m + 1$ が素数 p なら, m だけ平行移動した完全数の解に $a = p = m + 1$ がある.

ここで 2 素数の積の解 $a = 15 = 3 * 5$ があるのでこれを一般化する.

$a = pq(p < q :$ 素数$)$ とする.

$2\sigma(a) = 2(p+1)(q+1), 3a + q - 2m = 3pq + q - 2m$ により $\Delta = p + q$ を用いると

$2(pq + \Delta + 1) = 3pq + q - 2m$ によって,

$$2(\Delta + 1) = pq + q - 2m.$$

$2p + q + 2 = pq - 2m$ を変形して $q\overline{p} = 2p + 2m + 2 = 2\overline{p} + 2m + 4$.

$q_0 = q - 2$ とおくとき,

$$q_0\overline{p} = 2m + 4.$$

$m = 1$ のとき, $q_0\overline{p} = 6$. q_0 は奇数なので, $q_0 = 3; q = 5. \overline{p} = 2; p = 3$.

よって, $a = 15$.

$m = 2$ のとき, $q_0\overline{p} = 8$. q_0 は奇数なので, $q_0 = 3; q = 5. \overline{p} = 8; p = 9$.　矛盾

$m = 3$ のとき, $q_0\overline{p} = 10$. q_0 は奇数なので, $q_0 = 5; q = 7. \overline{p} = 2; p = 3$.

よって, $a = 21$.

2.3 $P = 3, m = 2$

$m = 2$ なので $2\sigma(a) = 3a + q - 4$ が方程式

表 3: $P = 3, m = 2$

a	factor
3	3
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7
6561	3^8
19683	3^9
59049	3^{10}
99807	$3 * 17 * 19 * 103$
177147	3^{11}
531441	3^{12}
603681	$3 * 13 * 23 * 673$
1594323	3^{13}

$a = 3 = m + 2$ という素数解がある.

$a = 3^e$ とおく.

$2\sigma(a) = 3^{e+1} - 1, 3a + q - 4 = 3^{e+1} + 3 - 4$ により $2\sigma(a) = 3a + q - 4$ なので 3^e はすべて解になる.

しかしモンスター $a = 3 * 17 * 19 * 103$, $a = 603681 = 3 * 13 * 23 * 673$ が 2 つでてきた.

これらの伏字問題を考えて解いてみよう.

2.4 解 $3*17rq$

$a=3*17rq$ が $2\sigma(a)=3a+q-4$ の解とする.

$$\sigma(a)=\sigma(3*17rq)=4*18\widetilde{r}\widetilde{q}$$

$$3a+q-4=3*51rq+q-4=153rq+q-4$$

$A=8\widetilde{r}\widetilde{q}, B=qr, \Delta=q+r$ とおくとき $\sigma(a)=\sigma(3*17rq)=4*18A$, $2*4*18\widetilde{r}\widetilde{q}=144(B+\Delta+1)$ なので

$$144(B+\Delta+1)=153B+q-4.$$

整理して

$$9B=144r+143q+148.$$

$144=9*16$ なので, $9B-144q=9r(q-16)$.

$r_0=r-16, q_0=q-16$ とおくと

$$9rq_0=143q+148=143q_0+143*16+148.$$

$$q_0(9r-143)=143*16+148=2436=2^2*3*29.$$

q_0 は奇数なので, $1,3,29,3*29$ のどれか

i) $q_0=1; q=17$. $9r-143=2436; 9r=2436+143=2579$; 素数なので 9 で割れない‥

ii) $q_0=3*29=87; q=87+16=103$. $9r-143=28; 9r=171=9*19, r=19:$ 素数 $q=87+16=103$. $a=3*17*19*103$.

iii) $q_0=3; q=3+16=19$. $9r-143=4*29=116; 9r=259$, 右辺は 9 で割れないから不可. $q=87+16=103$. $a=3*17*19*103$.

iv) $q_0=29; q=29+16=45$. 非素数なので不可.

2.5 解 $3 * prq$

$a = 3prq$ は $2\sigma(a) = 3a + q - 4$ の解とする.
$A = 8\widetilde{rq}, B = qr, \Delta = q + r$ とおくとき
$\sigma(a) = 4(p+1)\widetilde{rp} = 4(p+1)A, 3a + q - 4 = 9pB + q - 4.$
$2\sigma(a) = 3a + q - 4$ によって,

$$8(p+1)A = 9pB + q - 4.$$

これより

$$p(8A - 9B) + 8A = q - 4.$$

$A = B + \Delta + 1$ により

$$p(8(\Delta + 1) - B) = q - 4 - 8(B + \Delta + 1).$$

$$qr(p-4) - q(8p+7) - 8r(p+1) = 12 + 8p. \tag{1}$$

$$q = \frac{8r(p+1) + 8p + 12}{r(p-8) - 8p - 7}$$

分子=$8r(p+1) + 8p + 12$, 分母 $= r(p-8) - 8p - 7$. $p < 8$ なら分母が負. これはおきない.

$p \geq 5, r \geq p+2, q \geq r+2$ を思い出しながらエクセルで次の計算を行う.

i).$p = 11$. この場合は微妙な判断が必要.

表 4: $p = 11$

r	分子	分母	q	$q - r - 2$
31	3076	− 2	− 1538	− 1571
37	3652	16	228.25	189.25
41	4036	28	144.1428571	101.1428571
43	4228	34	124.3529412	79.35294118
47	4612	46	100.2608696	51.26086957
53	5188	64	81.0625	26.0625
59	5764	82	70.29268293	9.292682927
61	5956	88	67.68181818	4.681818182
63	6148	94	65.40425532	0.404255319

$r \geq 63$ では $q \geq r+2$ が成り立たない.
分母が正になるには $r \geq 37$.
r が 37,61 の間の場合 q は整数にならない.

ii).$p = 13$ の場合.

表 5: $p = 13$

r	分子	分母	q	$q - r - 2$
17	2020	− 26	− 77.69230769	− 96.69230769
19	2244	− 16	− 140.25	− 161.25
23	2692	4	673	648
29	3364	34	98.94117647	67.94117647
31	3588	44	81.54545455	48.54545455
37	4260	74	57.56756757	18.56756757
41	4708	94	50.08510638	7.085106383
43	4932	104	47.42307692	2.423076923
45	5156	114	45.22807018	− 1.771929825

分母が正になるには, $23 \leq r \leq 43$.
q　が整数になるには $r = 23, q = 673$. このとき $p = 13$.

iii).$p = 17$ の場合.

表 6: $p = 17$

r	分子	分母	q	$q - r - 2$
19	2884	28	103	82
23	3460	64	54.0625	29.0625
29	4324	118	36.6440678	5.644067797
31	4612	136	33.91176471	0.911764706

分母が正になるには, $23 \geq r \geq 43$.
q　が整数になるには $19 \geq r$.
$q \geq r + 2$ のためには, $r \geq 31$.
r が 19,31 の間の場合 q が整数になるには $r = 19, q = 103$. このとき $p = 17$.

iv).$p \geq 23$.

表 7: $p = 23$

r	分子	分母	q	$q - r - 2$
25	4996	184	27.15217391	0.152173913
27	5380	214	25.14018692	$-$ 3.859813084
29	5764	244	23.62295082	$-$ 7.37704918

$p \geq 23$ になると, $q \geq r + 2$ が成り立たない.
このようにして計算だけで,$a = 3prq$ の伏せ字問題は解けた.
$a = tprq$ の伏せ字問題は解けないことはないと思う.

2.6 $P = 3, m = 3$

$m = 3$ なので $2\sigma(a) = 3a + q - 6$ が方程式

表 8: $P = 3, m = 3$

a	factor
21	$3 * 7$
1161	$3^3 * 43$
89181	$3^5 * 367$

pq 形の解に加えて, 正規形の解
$a = 1161 = 3^3 * 43$,$a = 89181 = 3^5 * 367$

2.7 $P = 3, m = 4$

表 9: $P = 3, m = 4$

a	factor
5	5
153	$3^2 * 17$
27639	$3^2 * 37 * 83$
51417	$3^2 * 29 * 197$
799713	$3^6 * 1097$
965007	$3^3 * 103 * 347$

$5 = m + 1$ なので 5 が素数解.
正規形の解 $a = 153 = 3^2 * 17$, $a = 514173^2 * 29 * 197$.
第 2 正規形の解
$a = 27639 = 3^2 * 37 * 83$, $a = 51417 = 3^2 * 29 * 197$, $a = 965007 = 3^3 * 103 * 347$.
これらが本当の第 2 正規形と言ってよいかどうか.

3　第2正規形

$P=3$ なので $2\sigma(a)=3a+q-2m$ が方程式でありこれに
第2正規形の解 $a=3^e rq(3<r<q:$ 素数$)$ があるとする.
$N=3^{e+1}-1, A=\widetilde{r}\widetilde{q}, B=rq, \Delta=r+q$ とおくとき

$$2\sigma(a)=N\widetilde{r}\widetilde{q}=NA, 3a+q-2m=(N+1)B+q-2m$$

なので

$$NA=(N+1)B+q-2m.$$

$NA=N(B+\Delta+1)=(N+1)B+q-2m$ により

$$B-N\Delta=N+2m-q.$$

これが基本方程式になる.

$q_0=q-N, r_0=r-N$ とおくとき

$$q_0r_0=qr-N\Delta+N^2=B-N\Delta+N^2.$$

これより

$$q_0r_0=B-N\Delta+N^2=N+2m-q+N^2$$

$N-q=-q_0$ なので

$$q_0(r_0+1)=2m+N^2.$$

$D_1=2m+N^2$ とおくとき $\widetilde{r_0}=r_0+1$ を使うと

$$q_0\widetilde{r_0}=D_1.$$

4　第 2 正規形, 一般の場合

$\overline{P}\sigma(a) = Pa + (P-2)q - m\overline{P}$ が方程式でありこれに
第 2 正規形の解 $a = P^e rq (P < r < q :$ 素数$)$ があるとする.
$N = P^{e+1} - 1, A = \widetilde{r}\widetilde{q}, B = rq, \Delta = r + q$ とおくとき

$$\overline{P}\sigma(a) = N\widetilde{r}\widetilde{q} = NA, Pa + (P-2)q - m\overline{P} = (N+1)B + (P-2)q - m\overline{P}$$

なので

$$NA = (N+1)B + (P-2)q - m\overline{P}.$$

$NA = N(B+\Delta+1) = (N+1)B+(P-2)q-m\overline{P}. B-N\Delta = N-(P-2)q+m\overline{P}.$
これが基本方程式になる.
$q_0 = q - N, r_0 = r - N$ とおくとき

$$q_0 r_0 = qr - N\Delta + N^2 = B - N\Delta + N^2.$$

これより

$$q_0 r_0 = N^2 + N - (P-2)q + m\overline{P} = N^2 + N - (P-2)(q_0 + N) + m\overline{P}$$

$$q_0(r_0 + P - 2)) = N^2 + N(3-P) + m\overline{P}.$$

$D_P = N^2 + N(3-P) + m\overline{P}$ とおくとき $r_{0+P} = r_0 + P - 2$ を使うと

$$q_0 r_{0+P} = D_P. \tag{2}$$

これが基本方程式になる.

4.1　$m = 4$ のときの計算

$e = 2, m = 4$ とおくとき, $N = 3^3 - 1 = 26, D_1 = 26^2 + 8 = 684 = 2^2 * 3^2 * 19.$
$q_0 :$ 奇数, $\widetilde{r_0}$:偶数 なので

i) $q_0 = 9 * 19 :, \widetilde{r_0} = 4$
$r_0 = 3, r = 29; q_0 = 9 * 19, q = 197$ $a = 3^2 * 31 * 197$
ii) $q_0 = 57 :, \widetilde{r_0} = 12$
$r_0 = 11, r = 37; q_0 = 57, q = 83$ $a = 3^2 * 37 * 83$
iii) $q_0 = 19 :, \widetilde{r_0} = 36$
$r_0 = 35, r = 61; q_0 = 19, q = 45$:非素数.

表 10: $P = 3, m = 4$, 第二正規形

e	a	factor
2	51417	$a3^2 * 29 * 197$
2	27639 $3^2 * 37 * 83$	
3	965007 $3^3 * 103 * 347$	
5	4162847823 $3^5 * 751 * 22811$	
11	277979312695831119	$3^{11} * 695047 * 2257691$

4.2 $P = 3, m = 6$

表 11: $P = 3, m = 6$

a	factor
7	7
171	$3^2 * 19$
10287	$3^4 * 127$

$7 = m + 1$ により 7 が素数解.

4.3 $P = 3, m = 7$

表 12: $P = 3, m = 7$

a	factor
33	$3 * 11$
385	$5 * 7 * 11$
1269	$3^3 * 47$
2975	$5^2 * 7 * 17$
53751	$3 * 19 * 23 * 41$

2 素数の積 pq が解とする.
$m = 7$ のとき, $q_0\overline{p} = 4+2*7 = 18$. q_0 は奇数なので, $q_0 = 9; q = 11.\overline{p} = 2; p = 3$.
$a = 3 * 11$.

4.4 $P = 3, m = 8$

表 13: $P = 3, m = 8$

a	factor
35	$5 * 7$
51939	$3^2 * 29 * 199$
279055	$5 * 7^2 * 17 * 67$
279609	$3 * 11 * 37 * 229$
1336047	$3 * 17^2 * 23 * 67$

表 14: $P = 3, m = 8$

e	a	factor
2	51939	$3^2 * 29 * 199$
4	10214836272423	$3^8 * 36821 * 42283$
11	435027039990994161	$3^{11} * 612671 * 4008253$
12	21539587380792522005259	$3^{12} * 1594421 * 25420220719$

2 素数の積 pq が解とする.

$m = 8$ のとき, $q_0\overline{p} = 4+2*8 = 20$. q_0 は奇数なので, $q_0 = 5; q = 7.\overline{p} = 4; p = 5$. $a = 5 * 7$.

4.5 $P = 3, m = 9$

表 15: $P = 3, m = 9$

a	factor
25	5^2
39	$3 * 13$
90639	$3^5 * 373$

2 素数の積 pq が解とする.

$m = 9$ のとき, $q_0\overline{p} = 4 + 2 * 9 = 22$. q_0 は奇数なので, $q_0 = 11; q = 13. \overline{p} = 2; p = 3$.

$a = 5 * 7$.

$2\sigma(a) = 3a + q - 2m$ に素数のべき解 $a = p^e$ があるとする.

$\sigma(a) = \sigma(p^e) = \dfrac{p^{e+1} - 1}{\overline{p}}$ によって $2\sigma(a) = 3a + q - 2m$ を用いて

$$2(p^{e+1} - 1) = (3p^e + p - 2m)(p - 1).$$

$$-2 = p^e(p - 3) + p(p - 1) + 2m(1 - p).$$

$\overline{p} = p - 1$ に注意して

$$0 = p^e(p - 3) + 2 + p(p - 1) + 2m(1 - p) = p^e(\overline{p} - 2) + 2 + p\overline{p} - 2m\overline{p}.$$

整理して

$$p^e(\overline{p} - 2) + 2 + p\overline{p} - 2m\overline{p} = \overline{p}(p^e + p - 2m + 2(1 + p + \cdots + pe - 1))$$

これより

$$2m = p^e + p - 2(1 + p + \cdots + p^{e-1}).$$

$e = 2$ のとき, $2m = p(p - 1) - 2$

$p = 3$ のとき $2m = p(p - 1) - 2 = 4$. $m = 2$ のとき $a = 3^2$ が解.

$p = 5$ のとき $2m = p(p - 1) - 2 = 18$. $m = 9$ のとき $a = 5^2$ が解.

$e = 3$ のとき, $2m = p^2(p - 2) - p - 2$.

$p = 2$ のとき, $2m = -4$. $m = -2$ のとき $a = 2^3$.

$p = 3$ のとき, $2m = 9 - 5 = 4$. $m = 2$ のとき $a = 3^3$.

一般に, $p = 3, m = 2$ とすると, $4 = 3^e + 3 - 2(1 + 3 + \cdots + 3^{e-1}) = 3^e + 3 - (3^e - 1)$ が成り立ち, $a = 3^e$ が解になる.

4.6 $P = 3, m = 10$

表 16: $P = 3, m = 10$

a	factor
11	11
957	$3 * 11 * 29$
10611	$3^4 * 131$
112805	$5 * 7 * 11 * 293$
607269	$3 * 13 * 23 * 677$
804087	$3^6 * 1103$

4.7 $P = 3, m = 12$

表 17: $P = 3, m = 12$

a	factor
13	13

4.8 $P = 3, m = 17$

表 18: $P = 3, m = 17$

a	factor
455	$5 * 7 * 13$
1645719	$3 * 17 * 23^2 * 61$

4.9 $P = 3, m = 23$

表 19: $P = 3, m = 23$

a	factor
969	$3 * 17 * 19$
54723	$3 * 17 * 29 * 37$
1017171	$3^3 * 101 * 373$

4.10 $P = 3, m = -1$

表 20: $P = 3, m = -1$

a	factor
27755	$5 * 7 * 13 * 61$
218225	$5^2 * 7 * 29 * 43$

4.11 $P = 3, m = -2$

表 21: $P = 3, m = -2$

a	factor
8	2^3
99	$3^2 * 11$
759	$3 * 11 * 23$
795339	$3^6 * 1091$

表 22: $P = 3, m = -2$, 第二正規形の解

e	a
factor	
4	19184931
$3^4 * 433 * 547$	
5	8061750261
$3^5 * 739 * 44893$	
5	721889577
$3^5 * 947 * 3137$	
5	629690031
$3^5 * 1019 * 2543$	
7	998897581791
$3^7 * 7331 * 62303$	
12	156372861294706304709
$3^{12} * 1608337 * 182948677$	
13	43612339225270702734885159
$3^{13} * 4782971 * 5719200505223$	

4.12 $P = 3, m = -3$

表 23: $P = 3, m = -3$

a	factor
999	$3^3 * 37$

4.13 $P = 3, m = -4$

表 24: $P = 3, m = -4$

a	factor
147	$3 * 7^2$
3185	$5 * 7^2 * 13$
50373	$3^2 * 29 * 193$
283176230906781	$3^9 * 100511 * 143137$

4.14 $P = 3, m = -5$

表 25: $P = 3, m = -5$

a	factor
663	$3 * 13 * 17$
38223	$3^2 * 31 * 137$
87237	$3^5 * 359$
862299	$3^3 * 109 * 293$