# ポケモンGo より<br>面白い半完全数の世界

# 2016 年8月26日

飯高 茂

平成28 年8 月29 日

## 1　完全数

$a$ を自然数とするときその約数の和を $\sigma(a)$ と書く.

$\sigma(a)=2a$ を満たす数を 完全数といい, 6,28,496,8128 などがあり古代の数学者ユークリッドによって考えられた.

これらを素因数分解すると

$$6=2*(2^2-1), 28=2^2*(2^3-1), 496=2^4*(2^5-1), 8128=2^6*(2^7-1)$$

などとなる.

2 のべきから1引いた $Q=2^{e+1}-1$ が素数になるとき $a=2^eQ$ は完全数 (perfect numbers ) でありとくにこの形の数をユークリッドの完全数という.

$Q=2^{e+1}-1$ とかける素数 $Q$ をメルセンヌの素数という.

一般に $2^{e+1}-1$ が素数になるとき $e+1$ は素数になることが証明できる.

$Q=2^{e+1}-1$ が素数になるという条件をはずして, $e+1$ が素数になるという条件のみをつけるとき $a=2^eQ$ を弱い完全数 (weakly perfect numbers) ということにする.

### 1.1　弱完全数

* 非完全数 を指す.

表 1: $P=2$ :弱完全数

| $p$ | $Q=2^p-1$ | 素因数分解 | $a$:弱完全数 |
|---|---|---|---|
| 2 | (3) | 3 | 6 |
| 3 | (7) | 7 | 28 |
| 5 | (31) | 31 | 496 |
| 7 | (127) | 127 | 8128 |
| 11* | (2047) | 23*89 | 2096128 |
| 13 | (8191) | 8191 | 33550336 |
| 17 | (131071) | 131071 | 8589869056 |
| 19 | (524287) | 524287 | 137438691328 |
| 23* | (8388607) | 47*178481 | 35184367894528 |
| 29* | (536870911) | 233*1103*2089 | 144115187807420416 |
| 31 | (2147483647) | 2147483647 | 2305843008139952128 |

## 2 $m$ だけ平行移動した完全数

$m$ だけ平行移動した完全数とは何か.
$q=2^{e+1}-1+m$ : 素数のとき $a=2^eq$ を $m$ だけ平行移動した完全数という.
$\sigma(a)=2a-m$ を満たす.

表 2: $[P=2,m=2]$ ;2 だけ平行移動した完全数

| $a$ | 素因数分解 |
|---|---|
| 3 | 3 |
| 10 | $2*5$ |
| 136 | $2^3*17$ |
| 32896 | $2^7*257$ |
| 2147516416 | $2^{15}*65537$ |

$a=2^eq(,q$ : フェルマ素数) の形をしたものが出ている.

## 3 半完全数

完全数 $2^eq$ を半分にして $a=2^{e-1}q$ を狭義の半完全数 (half perfect numbers) という.

$q=2^{e+1}-1+m$ : 素数のとき $a=2^e q$ を狭義の $m$ だけ平行移動した完全数という.

同様に $a=2^{e-1}q$ を狭義の $m$ だけ平行移動した半完全数という.

狭義の半完全数の満たす方程式を求めよう.

半完全数 $a=2^{e-1}q$ に対して,

$$\sigma(a)=\sigma(2^{e-1}q)=(2^e-1)(q+1)=(2^e-1)q+2^e-1=2a-q+2^e-1.$$

$q=2^{e+1}-1+m$ を用いて

$$2\sigma(a)=4a-2q+2^{e+1}-2=4a-2q+q+1-m-2=4a-q-m-1.$$

$\mathrm{Maxp}(a)$ を $a$ の最大素因子とおくと半完全数の満たす方程式

$$2\sigma(a)=4a-\mathrm{Maxp}(a)-m-1$$

が得られた. これを満たす解を広義の半完全数という.

# 4 重完全数

$q=2^{e+1}-1+m$ : 素数のとき $a=2^e q$ を $m$ だけ平行移動した完全数 ( perfect numbers) という. これを重ねた $a=2^{e+1}q$ を狭義の $m$ だけ平行移動した重完全数 (double perfect numbers) という.

狭義の重完全数の満たす方程式を求めよう.

重完全数 $a=2^{e+1}q$ に対して,

$$\sigma(a)=\sigma(2^{e+1}q)=(2^{e+2}-1)(q+1)=(2^{e+1}-1)q+2^{e+2}-1=2a-q+2^{e+2}-1.$$

$q=2^{e+1}-1+m$ を用いて

$$\sigma(a)=2a+\mathrm{Maxp}(a)-2m+1.$$

これを狭義の $m$ だけ平行移動した重完全数の満たす方程式といい, これを満たす解を広義の $m$ だけ平行移動した重完全数という.

# 5 計算例

## 5.1 $P=2, m=0$

完全数の方程式は $\sigma(a)=2a$.
$\sigma(a)=2a$ の解は $a$ が偶数なら $a=2^e q, (q=2^{e+1}-1$:素数,) の形になる.(Euler)

$a$ が奇数なら解 $a$ は存在しないと予想されている. これを奇数完全数の問題といい, 数学界では難問中の難問とされている.

$m=0$ のとき重完全数の方程式は

$$\sigma(a)=2a+\mathrm{Maxp}(a)+1.$$

表 3: $[P=2, m=0]$ 重完全数

| $a$ | 素因数分解 |
|---|---|
| 12 | $2^2*3$ |
| 56 | $2^3*7$ |
| 66 | $2*3*11$ |
| 992 | $2^5*31$ |
| 3230 | $2*5*17*19$ |
| 4730 | $2*5*11*43$ |
| 8415 | $3^2*5*11*17$ |
| 16256 | $2^7*127$ |
| 28035 | $3^2*5*7*89$ |
| 491536 | $2^4*31*991$ |
| 9914264 | $2^3*17*269*271$ |

$12=2^2*3$,
$56=2^3*7$,
$992=2^5*31$,

$16256 = 2^7 * 127$ は完全数の 2 倍になっている (重完全数の定義の意味).

しかしそれだけではなく新規参入組があり, それは次のとおり:
$66 = 2*3*11$,
$3230 = 2*5*17*19$
$4730 = 2*5*11*43$
$8415 = 3^2*5*11*17$
$28035 = 3^2*5*7*89$
$491536 = 2^4*31*991$
$9914264 = 2^3*17*269*271$

新規参入組は珍種のモンスターと呼びたくなる. これらをポケモンに例えることは許される事だろう.
ポケモンを調べこれらが重完全数になる数学的理由が明らかにできればポケモンを get したという
これは興味ある課題である.
ポケモンは無数にあるが, 手の内にできるのは 100 個もない. 私はそのうち 4 個 get した.
get するには証明がいる.
get したポケモン同士の対戦は証明が長いほうが 勝ちとする.
今までポケモン同士の対戦した例はない.
後に, 優美なポケモンがでてくるが get することはきわめて困難であろう.
ポケモンである新規参入組は $s(a) \geq 3$ を満たすことを次に証明する.

$s(a) = 2$ を仮定すると, $a = p^e q^f, p < q$ : 素数, と書ける.
$X = p^e, Y = q^f \rho' = \overline{pq}$ とおくと, $\sigma(a) = 2a + \mathrm{Maxp}(a) + 1$ は次のように書きなおせる.

$$(pX-1)(qY-1) = 2\rho' XY + (q+1)\rho'.$$

計算して $XY$ の係数を $R$ とおくとき

$$R = pq - 2\rho' = -(p-2)(q-2) + 2.$$

さらに $-pX - qY + 1 + RXY = (q+1)\rho'$ が成り立つので $R \geq 0$. よって $p = 2, R = 2, \rho' = \overline{q}$.

$$-2X - qY + 1 + 2XY = (q+1)\overline{q}.$$

$f=1$ とする. $Y=q$ なので

$$-2X-q^2+1+2Xq=(q+1)\overline{q}=q^2-1.$$

$$2X(q-1)+1=q^2-1+q^2.$$

これより $q-1$ で割ると $2^e=X=q+1$.
$q=2^e-1, a=2^e q$. $a$ はまさに狭義の重完全数.

$f \geq 2$ として矛盾を導く. $Y \geq q^2$ に注意して

$$Y(2X-q)=2X-1+q^2-1 \geq q^2(2X-q).$$

$2X-q>0$ なので $\xi=2X-q$ とおけば

$$Y(2X-q)=Y\xi=2X-1+q^2-1=\xi+q^2+q-2.$$

$\xi=1$ と仮定して矛盾を導く. 上式より

$$Y=q^2+q-1.$$

$q^2(q^{f-1}-1)=q-1$ により矛盾.

$$(Y-1)\xi=q^2+q-2 \geq 2(Y-1) \geq 2(q^2-1).$$

矛盾.

## 5.2 $a=2^e qr, (r<q:$ 素数) と書ける解

$q=\mathrm{Maxp}(a)$ とおくとき

$$\sigma(a)=2a+q+1$$

の解で $a=2^e qr, (r<q:$ 素数) と書ける解を求める.

$\sigma(a)=(2^{e+1}-1)\widetilde{qr}$ また $2a+q+1=2^{e+1}qr+q+1$ なので

$$(2^{e+1}-1)\widetilde{qr}=2^{e+1}qr+q+1.$$

$$(2^{e+1})(\widetilde{qr}-qr)=\widetilde{qr}+q+1.$$

$\Delta=q+r$ を使うと

$$(2^{e+1})(\Delta+1)=qr+\Delta+1+q+1=q\widetilde{r}+\Delta+2.$$

よって,

$$q\widetilde{r} = 2^{e+1}(\Delta + 1) - \Delta - 2.$$

$\Delta' = \Delta + 1$ とおくとき $\Delta' = q + \widetilde{r}$.
それゆえ

$$q\widetilde{r} = (2^{e+1} - 1)\Delta' - 1.$$

$N_0 = 2^{e+1} - 1$ とおくとき

$$q\widetilde{r} = N_0\Delta' - 1.$$

$q_0 = q - N_0, \widetilde{r}_0 = \widetilde{r} - N_0$ とおけば

$$q_0\widetilde{r}_0 = N_0^2 - 1.$$

$D = N_0^2 - 1$ とおくとき $q_0\widetilde{r}_0 = D$.

$e = 1, 2, 3, \cdots$ に応じて, $N_0, D$ を求め因数分解 $q_0\widetilde{r}_0 = D$ に応じて, $q = q_0 + N_0, r = \widetilde{r}_0 + N_0 - 1$ が素数になるものを選べばよい.

パソコンでの計算の結果
$a = 2 * 11 * 3$
$a = 2^4 * 991 * 31$
$e < 10$ ではこの他に解はない.

かくして 2 つの ポケモン $66 = 2 * 3 * 11$, $491536 = 2^4 * 31 * 991$ が
$a = 2^e qr, (r < q :$ 素数$)$ と書ける解として捕らえられた. このとき, 2 つの ポケモン 66,491536 を get したと言ってよい.

```
55 ?- all_nee1(0,0).
n=8
$a=2^1*3*11$    66      a=66
true.

56 ?- all_nee1(1,0).
n=48
true.

57 ?- all_nee1(2,0).
n=224
true.
```

```
58 ?- all_nee1(3,0).
n=960
$a=2^4*31*991$  491536  a=491536
true.
```

### 5.3 $a=2*5*qr,(r<q:$ 素数) と書ける解

$q=\mathrm{Maxp}(a)$ とおくとき

$$\sigma(a)=2a+q+1$$

の解で $a=2*5*qr,(r<q:$ 素数), と書けるものを探す.

$\sigma(a)=18\widetilde{qr}$,

$2a+q+1=20qr+q+1=18(qr+q+1)$ なので

$$18\widetilde{qr}=20qr+q+1.$$

$\Delta=q+r$ とおくとき $18\widetilde{qr}=18(qr+\Delta+1)=20qr+q+1$ によって

$$-2(qr-9\Delta-9)=q+1.$$

$q_0=q-9,r_0=r-9$ とおけば $q_0r_0=qr-9\Delta+81$ になり

$$q_0r_0=qr-9\Delta-9+90.$$

$$-2(q_0r_0-90)=q+1=q_0+10.$$

これを整理して

$$170=q_0(2r_0+1).$$

$q_0:$ 偶数 , $2r_0+1>2:$ 奇数なので, $170=10*17=2*5*17$ により

1) $2r_0+1=5$,2)$2r_0+1=17$,3)$2r_0+1=5*17$.

1) $2r_0+1=17,q_0=10;\ q=19,r=r_0+9=17.$ これより $a=2*17*19.$

2) $2r_0+1=5,q_0=34.\ q=43,2r_0+1=5;r_0=2,r=11.$ これより $a=2*11*43.$

3) $2r_0+1=5*17=85,q_0=2.\ q=11,r_0=42;r=51.$ これは素数ではないから矛盾.

こうしてポケモン $a=2*17*19$,$a=2*11*43$ を get.

問 $a=3^erq$ の形の解を求めよ.

解は存在しない.

レアなポケモンの存在の噂をきいて探したが不存在が証明できた

## 5.4 $a = 3^2 * 5 * qr, (7 \leq r < q:$ 素数) と書ける解

$$\sigma(a) = 2a + q + 1$$

の解で $a = 3^2 * 5 * qr, (r < q:$ 素数), と書けるものを探す. $\Delta = r + q$ とおくとき
$\sigma(a) = 13 * 6 * \widetilde{qr} = 13 * 6 * (rq + \Delta + 1)$, $2a + q + 1 = 90rq + q + 1$ なので

$$13 * 6 * (rq + \Delta + 1) = 90rq + q + 1.$$

整理して

$$12rq + q + 1 = 78(\Delta + 1)$$

$q \geq r + 2 \geq 7$ により $q \geq 11$.
$r_0 = r - 7, q_0 = q - 11$ を用いると

$$77 = (12r - 77)q - 78 = (12r_0 + 7)q - 78(r_0 + 7).$$

さらに整理して

$$(12r_0 + 7)q = (12r_0 + 7)(q_0 + 11) = (12r_0 + 7)q_0 + 132r_0 + 77.$$

$$78 * 7 = 546 = q_0(12r_0 + 7) + 54r_0.$$

$r_0$ は偶数なのでこれを順次調べる.

a) $r_0 = 0$. $546 = 7q_0$ になるので $q_0 = 78; q = 89, r = 7$. $a = 3^2 * 5 * 7 * 89$.
b) $r_0 = 2$. $546 = 31q_0 + 108$ になるが整数解はない.
c) $r_0 = 4$. $546 = q_0(48 + 7) + 54 * 4$ になるので $q_0 = 6; q = 17, r = 11$. $a = 3^2 * 5 * 11 * 17$.
$r_0 \geq 6$. $546 \geq q_0(72 + 7) + 54 * 6$ になるので $324 \leq 79q_0; q_0 \leq 2$. $q \leq 13$ になるが $r \geq 6 + 7 = 13$. 矛盾

こうしてポケモン $a = 3^2 * 5 * 7 * 89, a = 3^2 * 5 * 11 * 17$ を get.

しかし解 $9914264 = 2^3 * 17 * 269 * 271$ は今のところ仲間がいないのでこの正体がわからない. これをポケモンとみたてても get できていない.

方程式

$$2\sigma(a) = 4a - \mathrm{Maxp}(a) - 1.$$

3 ,$14 = 2 * 7$,$248 = 2^3 * 31$, $4064 = 2^5 * 127$ は狭義の半完全数である.

新規参入組は次のとおり:

$1155 = 3 * 5 * 7 * 11$ , (小さいほうから 4 個の奇素数の積である. 姿が優美なポケモンと言ってよいだろう)

$483945 = 3 * 5 * 7 * 11 * 419$ , 3267770 $2 * 5 * 11 * 61 * 487$.

表 4: $[P=2, m=0]$ 半完全数

| $a$ | 素因数分解 |
|---|---|
| 3 | 3 |
| 14 | $2*7$ |
| 248 | $2^3*31$ |
| 1155 | $3*5*7*11$ |
| 4064 | $2^5*127$ |
| 483945 | $3*5*7*11*419$ |
| 3267770 | $2*5*11*61*487$ |

これらは $s(a)=4,5$ なので扱いづらい.

新規参入組は $s(a)\geq 3$ を満たすことを次に証明する.

$s(a)=2$ を仮定すると, $a=p^e q^f, p<q$ : 素数, と書ける.

$X=p^e, Y=q^f \rho'=\overline{pq}$ とおくと, $2\sigma(a)=4a-\mathrm{Maxp}(a)-1$ は次のように書きなおせる. $q=\mathrm{Maxp}(a)$ とおく.

$$2(pX-1)(qY-1)=\rho'(4XY-(q+1)).$$

計算して $XY$ の係数を $R$ とおくとき

$$R=2pq-4\rho'=2(-(p-2)(q-2)+2).$$

さらに $-pX-qY+1+RXY=(q+1)\rho'$ が成り立つので $R\geq 0$. よって $p=2, R=4, \rho'=\overline{q}$.

# 6 $P=2, m=2$

## 6.1 $[P=2, m=2]$ 半完全数

この場合の方程式は

$$2\sigma(a)=4a-\mathrm{Maxp}(a)-3.$$

新規参入組みは次のとおり:

$130=2*5*13$

$24616=2^3*17*181$

$244036=2^2*13^2*19^2$

$272228=2^2*11*23*269$

表 5: $[P=2, m=2]$ 半完全数

| $a$ | 素因数分解 |
|---|---|
| 5 | 5 |
| 68 | $2^2 * 17$ |
| 130 | $2 * 5 * 13$ |
| 16448 | $2^6 * 257$ |
| 24616 | $2^3 * 17 * 181$ |
| 244036 | $2^2 * 13^2 * 19^2$ |
| 272228 | $2^2 * 11 * 23 * 269$ |

これらは $a = 2^e qr, 2^e q^2 r, 2^e q^2 r^2, 2^2 * r_1 * r_2 * q$ の形をしている. 不思議な形といえよう.

$244036 = 2^2 * 13^2 * 19^2$ はとくに珍しい形で私は恐竜 ステゴザウルス を連想する. 3 つの平方の印が背中についた装甲の板のように見える.

$q = 19$ により方程式 $2\sigma(a) = 4a - \mathrm{Maxp}(a) - 3$ に代入すると, $2\sigma(a) = 4a - \mathrm{Maxp}(a) - 3 = 4a - 22$ なので

$$\sigma(a) = 2a - 11.$$

これは 11 だけ平行移動した完全数を意味する.

$\sigma(a) = 2a - 11$ をパソコンで解の探索をすると, $2^2 * 13^2 * 19^2$ が唯一の解らしい.

半完全数が実は完全数だったという物語である.

## 6.2 $[P=2, m=2]$ 重完全数

$m=2$, 重完全数 の方程式は

$$\sigma(a) = 2a + \mathrm{Maxp}(a) - 3.$$

表 6: $[P=2, m=2]$ 重完全数

| $a$ | 素因数分解 |
|---|---|
| 2 | $2$ |
| 4 | $2^2$ |
| 6 | $2*3$ |
| 8 | $2^3$ |
| 16 | $2^4$ |
| 20 | $2^2*5$ |
| 32 | $2^5$ |
| 64 | $2^6$ |
| 70 | $2*5*7$ |
| 128 | $2^7$ |
| 256 | $2^8$ |
| 272 | $2^4*17$ |
| 512 | $2^9$ |
| 1024 | $2^{10}$ |
| 1652 | $2^2*7*59$ |
| 2048 | $2^{11}$ |
| 4096 | $2^{12}$ |
| 8192 | $2^{13}$ |
| 16384 | $2^{14}$ |
| 32768 | $2^{15}$ |
| 65536 | $2^{16}$ |
| 65792 | $2^8*257$ |
| 131072 | $2^{17}$ |
| 262144 | $2^{18}$ |
| 524288 | $2^{19}$ |
| 1048576 | $2^{20}$ |
| 2097152 | $2^{21}$ |
| 4194304 | $2^{22}$ |

これからもわかるように重完全数の解がたくさんでてきた.

しかも, 1)$s(a)=1, a=2^e$, 2) $s(a)=2, a=2^q$ ,3) $a=2^e qr, r<q$ : 素数と解がきれいに分類されている. このままの形で証明することは困難だが条件を少しつければ証明は可能.

1)$s(a)=1, a=2^e$, 2) $s(a)=2, a=2^q$ は普通のものでポケモンとは言わない.

3) $a=2^e qr, r<q$ : はポケモンと言ってよい. すでに get されている.

### 6.3 いくつかの命題

$\sigma(a)=2a+\mathrm{Maxp}(a)-3$ の解について.

1) $a=2^e$ はすべて解

$a=2^e$ のとき,$\sigma(a)=2^{e+1}-1$, 一方 $2a+\mathrm{Maxp}(a)-3=2*2^e+2-3=2^{e+1}$. よって, $a=2^e$ は解.

一般に, $p$ : 素数,$a=p^e$ のとき $\sigma(a)=2a+\mathrm{Maxp}(a)-3$ を満たすとする.

$\sigma(a)=\dfrac{p^{e+1}-1}{\overline{p}}$. 一方 $2a+\mathrm{Maxp}(a)-3=2*p^e+p-3$.

ゆえに,

$$p^{e+1}-1=(2*p^e+p-3)(p-1).$$

変形して

$$p(p-4)+p^e(p-2)+4.$$

$$(p-2)(p^2+p-2)=0.$$

よって, $p=2$.

2) $a=2^e q$ は解とする.

$$\sigma(a)=(2^{e+1})(q+1), 2a+q-3=2^{e+1}+q-3$$

によって, $2^{e+1}=2q-2$. $q=2^e+1$ : フェルマ素数

2)* 解 $a$ は $s(a)=2$ とする.

$a=p^e*q^f, (p<q$ : 素数), と書くとき, $X=p^e, Y=q^f$, $\rho'=\overline{pq}$ とおけば

$a=XY, \sigma(a)=\dfrac{(pX-1)(qY-1)}{\rho'}=2XY+q-3$ によって

$R$ を $XY$ の係数とおけば

$$RXY - pX - qY + 1 = \rho'(q-3).$$

これより, $R > 0$.

$$R = Pq - 2\rho' = 2 - p_0 q_0,$$

ここで $(p_0 = p-2, q_0 = q-2)$.

$R > 0$ によって $p_0 = 0, p = 2, R = 2$.

よって

$$2XY - 2X - qY + 1 = \overline{q}(q-3).$$

$Y = q; (f = 1)$ のとき

$$2Xq - 2X - q^2 + 1 = \overline{q}(q-3).$$

$2Xq - 2X - q^2 + 1 = 2X\overline{q} - q^2 + 1$ により $q-1$ で割って

$2X - q - 1 = q - 3$ により $q = X + 1 = 2^e + 1$ : フェルマ素数.

$a = 2^e q$ は $m = 2$, 狭義の重完全数.

$Y = q^f; (f \geq 2)$ のとき矛盾を導く.

$2XY - 2X - qY + 1 = \overline{q}(q-3)$ によって, $(2X - q)Y = 2X - 1 = \overline{q}(q-3)$.

これより $\xi = 2X - q \geq 1$.

$\xi Y = 2X - 1 + \overline{q}(q-3)$.

$$2X - 1 = \overline{q}(q-3) = \xi + \overline{q}(q-2)$$

を代入して

$$\xi Y = \xi + \overline{q}(q-2) = \overline{q}(q-3).$$

$Y = q^f \geq 2$ により

$$\overline{q}(q-3) = \xi Y \geq \xi q^2.$$

$$q^2 - 4q + 3 \geq \xi q^2 \geq q^2.$$

これは矛盾.

3) $a = 2^e qr, (r < q :$ 素数$)$ は解とする.

$\widetilde{q} = q+1, \widetilde{r} = r+1,$ を用いて

$$\sigma(a) = (2^{e+1}-1)\widetilde{q}\widetilde{r} = 2^{e+1}\widetilde{q}\widetilde{r} - \widetilde{q}\widetilde{r} = 2a + q - 3.$$

$\Delta = q + r$ を使うと

$$2^{e+1}(\Delta+1) - (qr + \Delta + 1) = q - 3.$$

$\widetilde{r}$ を用いると,

$$2^{e+1}(\Delta+1) = (qr + \Delta + 1) + q - 3 = q\widetilde{r} + q + \widetilde{r} - 3.$$

$N = 2^{e+1} - 1$ とおくとき
$q\widetilde{r} = (q+\widetilde{r})N + 3, q_0 = q - N, r_0' = \widetilde{r} - N$ により $D = N^2 + 3$ とおけば

$$q_0 r_0' = D.$$

$e = 1$ とすると, $N = 3, D = 9 + 3 = 12 = 4 * 3.$ $q_0 = q - 3$ は偶数,$r_0' = r' - 3$ は奇数.

よって, $q_0 = q - 3 = 4; q = 7.$ $r_0' = r' - 3 = 3.$ $r' = 6; r = 5.$ $a = 2 * 5 * 7$ がえられた.

これからパソコン計算でいくつかの解が出る.

$a = 2 * 7 * 5$ , a=70
$a = 2^2 * 11 * 19$ , a=836
$a = 2^2 * 59 * 7$ , a=1652
$a = 2^3 * 19 * 71$ , a=10792
$a = 2^6 * 131 * 4159$ , a=34869056
$a = 2^6 * 563 * 163$ , a=5873216
$a = 2^8 * 3203 * 607$ , a=497720576

しかしながら $q > r$ を満たす必要があり
$70 = 2*7*5, 413 = 2^2*59*7, 91769 = 2^6*563*163, a = 497720576 = 2^8*3203*607$ のみが解として残る.