底が 3 の完全数

飯高 茂

平成 29 年 8 月 3 日

1　3^e のとき

完全数では $\sigma(2^e) = 2^{e+1} - 1$ が基本的な役割を演じたので 2 の代わりに 3 を用いてみよう.

スリー, ツウ, ワン, ゼロ：研究開始.

$A = 3^e$ とおき, $\sigma(A) = \sigma(3^e)$ を計算する.

$\sigma(A) = \sigma(3^e) = \dfrac{3^{e+1} - 1}{2}$, なので $2\sigma(A) = 3^{e+1} - 1 = 3A - 1$.

そこで A を a に置き換えた式 $2\sigma(a) - 3a = -1$ を満たす a は何かを問題とする.

これだけを単独で考えるのはもったいないので 3 点セットにして

1. $2\sigma(a) - 3a = -1$ を満たす自然数 a は何か,
2. $2\sigma(a) - 3a = 1$ を満たす自然数 a は何か,
3. $2\sigma(a) - 3a = 0$ を満たす自然数 a は何か

を問題にする.

1.1 数値計算例

$2\sigma(a)-3a=-1$ を満たす自然数についてパソコンで計算.

表 1: $2\sigma(a)-3a=-1$

a	$\sigma(a)$	素因数分解
3	4	[3]
9	13	[3^2]
27	40	[3^3]
81	121	[3^4]
243	364	[3^5]
729	1093	[3^6]
2187	3280	[3^7]
6561	9841	[3^8]
19683	29524	[3^9]

この場合は期待通り 3 のべきが並んで出てきた. 言い換えれば $s(a)=1$ の解だけである. 次にこれを証明するのだが $s(a)=1,2$ に限って証明する.

1) $s(a)=1$.
$a=p^e$ とおく.$\overline{p}=p-1$, $N=p^{e+1}-1$ を以下で使う.
$\sigma(a)=\dfrac{p^{e+1}-1}{\overline{p}}=\dfrac{N}{\overline{p}}$ なので a を $2\sigma(a)-3a=-1$ に代入すると,

$$\frac{2N}{\overline{p}}-3p^e=-1.$$

p を掛けて整理する.

$$\frac{2Np}{\overline{p}}-3(N+1)=-p.$$

N で整理すると

$$N(\frac{2p}{\overline{p}-3})=3-p.$$

$2p-3\overline{p}=3-p$ を使うと

$$\frac{N(3-p)}{\overline{p}}=3-p.$$

$p\neq 3$ なら $N=p-1$ となり矛盾. よって a は 3 のべき 3^e になる.

2). $s(a)=2$

$2\sigma(a)=3a-1$ を満たすとして矛盾を導こう.

-1 は奇数で,$2\sigma(a)$ は偶数だから a は奇数. したがって a を素因数分解すると $a=p^e q^f(2<p<q:$ 素数$)$ となる.

$X=p^e, Y=q^f$ とおくと $a=XY$ となり $\overline{p}=p-1, \overline{q}=q-1$ を使えば

$$\sigma(a)=\frac{(pX-1)(qY-1)}{\overline{pq}}$$

であり,$A=pX-1, B=qY-1, \rho'=\overline{pq}$ とおけば

$$\frac{2AB}{\rho'}=3XY-1.$$

書き直して

$$2AB=3\rho' XY-\rho'.$$

$2AB-3\rho' XY$ の XY の係数を R とおくとき

$$R=2pq-3\rho'=6-(p-3)(q-3).$$

$-\rho'+pX+qY-1=RXY$ によって $R>0$.

$q>p\geq 3$ と $0<R=6-(p-3)(q-3)$ により $p=3, R=6$. $\rho'=2\overline{q}$ となり

$$-2\overline{q}=6XY-(3X+qY-1).$$

$Y(q-6X)=2q-3X-1=\frac{3q+q-6X-2}{2}$ により

$$(Y-\frac{1}{2})(q-6X)=\frac{3q-2}{2}.$$

$Y\geq q$ に注意して

$$\frac{3q-2}{2}\geq(q-\frac{1}{2})(q-6X).$$

2 倍すると,

$$3q-2\geq(2q-1)(q-6X).$$

$2q-1$ で割って,

$$\frac{3q-2}{2q-1}\geq q-6X.$$

$\dfrac{3q-2}{2q-1}=1+\dfrac{q-1}{2q-1}$ の整数部分は 1.

$0<q-6X\leq 1$ によって, $q-6X=1$.

このとき, $Y(q-6X)=2q-3X-1=\dfrac{3q+q-6X-2}{2}$ により $2Y=3q+q-6X-2$. ゆえに $2Y=3q+1-2$.

$Y \geq q^2$ ならば $2q^2 \leq 2Y=3q+1-2$. これは矛盾.
$Y=q$ になるので, $2q=3q+1-2=3q-1$ これも矛盾.

$s(a) \geq 3$ のときも矛盾が導けるとよいのだが, 難しそうである. 読者の挑戦を待つ.

$2\sigma(a)-3a$　の値が小さいときに何がでるか調べておく.

表 2: $2\sigma(a)-3a$ の順に並べる

a	素因数分解	$\sigma(a)$	$\sigma(a)-2a$	$2\sigma(a)-3a$
51	$[3,17]$	72	-30	-9
35	$[5,7]$	48	-22	-9
11	$[11]$	12	-10	-9
39	$[3,13]$	56	-22	-5
7	$[7]$	8	-6	-5
33	$[3,11]$	48	-18	-3
5	$[5]$	6	-4	-3
27	$[3^3]$	40	-14	-1(3 のべき)
9	$[3^2]$	13	-5	-1
3	$[3]$	4	-2	-1
2	$[2]$	3	-1	0
21	$[3,7]$	32	-10	1
4	$[2^2]$	7	-1	2
15	$[3,5]$	24	-6	3
46	$[2,23]$	72	-20	6 ($a=2p$)
38	$[2,19]$	60	-16	6
34	$[2,17]$	54	-14	6
26	$[2,13]$	42	-10	6
22	$[2,11]$	36	-8	6
14	$[2,7]$	24	-4	6
10	$[2,5]$	18	-2	6

2 $2\sigma(a) - 3a = 0$ の場合

前頁の表によれば $2\sigma(a) - 3a = 0$ を満たす a は 2 だけらしい.
このことを次に証明する.

定理 1. $2\sigma(a) = 3a$ を満たすとき $a = 2$.

Proof.
$2\sigma(a) = 3a$ により a は偶数なので $a = 2^e L$ (L は奇数) とおく.

$$2\sigma(a) = 2(2^{e+1} - 1)\sigma(L) = 3 * 2^e L$$

これより $N = 2^{e+1} - 1$ とおくと

$$4N\sigma(L) = 3 * 2^{e+1} L = 3(N+1)L$$

$L > 1$ なら $\sigma(L) \geq L + 1$ なので

$$3(N+1)L = 4N\sigma(L) \geq 4N(L+1).$$

これより $3(N+1)L \geq 4N(L+1)$. $3L \geq NL + 4N$, $N \geq 3$ なので矛盾.
よって $L = 1$, $a = 2^e$. $4N = 3(N+1)$. ゆえに $N = 3, e = 1$. したがって $a = 2$.

3 点セットのうち 1 つは解けてしまった. これは意外な大成果である. 大変うれしい.

3　$2\sigma(a) - 3a = 1$ の場合

パソコンでの計算で得られた数値例をもとに次の表ができた.

表 3: $2\sigma(a) - 3a = 1$

a	$\sigma(a)$	素因数分解
21	32	$[3, 7]$
2133	3200	$[3^3, 79]$
19521	29282	$[3^4, 241]$
176661	264992	$[3^5, 727]$
129127041	193690562	$[3^8, 19681]$

この解の素因数分解は $3^e * q$ (q:素数) の形になっている. そこでこのような解があるとしてそれを決めよう.

$a = 3^e * q, (q > 3 :$ 素数) として代入すると

$$2\sigma(a) = (3^{e+1} - 1)(q + 1) = 3a + 1 = 3^{e+1}q + 1.$$

これより $(3^{e+1} - 1)(q + 1) = (3^{e+1} - 1)q + 3^{e+1} - 1.$

よって $(3^{e+1} - 1)q + 3^{e+1} - 1 \quad = 3^{e+1}q + 1$ となり $3^{e+1}q$ が消えて

$$-q + 3^{e+1} - 1 = 1.$$

書き直して $q = 3^{e+1} - 2$. そこで $3^{e+1} - 2$ が素数になるときそれを q とおき $a = 3^e * q$ と定義すると $2\sigma(a) - 3a = 1$ を満たす.

4　亜完全数

このような $a = 3^e * q, (q : 3^{e+1} - 2$ が素数) を 3 を底とする**亜完全数**とよぼう. 亜完全数は $2\sigma(a) - 3a = 1$ を満たす.

逆に $2\sigma(a) - 3a = 1$ を満たすときそれは亜完全数か, という問題を考える.

一般に 自然数 a について $W = 2\sigma(a) - 3a$ とおき W を a の亜完全度とよぶ. 亜完全数の 亜完全度は 1 である.

与えられた正の数 W について $W = 2\sigma(a) - 3a$ を満たす a を仮定 $s(a) = 2$ の下で求めよう.

a を素因数分解し $a = p^e q^f (p < q :$ 素数) とする.

4.1　亜完全度が奇数の場合

W は奇数と仮定する.

$W = 2\sigma(a) - 3a$ によって a は奇数. したがって $2 < p < q$ となる.

$X = p^e, Y = q^f$ とおくと $a = XY$ となる.

$$\sigma(a) = \frac{(pX-1)(qY-1)}{\overline{pq}}$$

であり,$A = pX - 1, B = qY - 1, \rho' = \overline{pq}$ とおけば $2\sigma(a) = W + 3a$ に注意すると,

$$\frac{2AB}{\rho'} = 3XY + W.$$

書き直して

$$2AB = \rho'(3XY + W)$$

$2AB - 3\rho' XY = \rho' W$ になり $2AB - 3\rho' XY$ の XY の係数を R とおくとき $R = 2pq - 3\rho'$. さらに

$$\begin{aligned} R &= 2pq - 3\rho' \\ &= -pq + 3(p + q - 1) \\ &= -(p-3)(q-3) + 6. \end{aligned}$$

$\rho' W = 2AB - 3\rho' XY$ により

$$\rho' W = RXY - 2(pX + qY - 1).$$

$\rho' W + 2(pX + qY - 1) = RXY$ によって $RXY > \rho' W + 2(p^2 + q^2 - 1) > 0$.

これより $R > 0$ なので $p \geq 3$ に注意し $p = 3, R = 6$. このとき $\rho' = 2\overline{q}$ になり

$$2\overline{q}W = 6XY - 2(3X + qY - 1).$$

2 で割って

$$\overline{q}W = (3X - q)Y - 3X + 1.$$

(1) $Y = q$ と仮定すると

$$\overline{q}W = (3X - q)q - 3X + 1 = 3X\overline{q} - \overline{q}(q + 1)$$

により, $\overline{q}$ を払うことによって

$$W = 3X - (q + 1).$$

ここで話を逆転させる. $3X - W - 1$ が素数のときこれを q とおいて $a = 3^e q$ を定めれば亜完全度 W の数 a を得るのである.

とくに $W = 1$ なら $a = 3^e q$.

これより $q = 3^{e+1} - 2$. q は素数なので,$a = 3^e q$ は亜完全数.

(2) $Y > q$. $W = 1$ の仮定の元で矛盾を導く.

$Y = q^f \geq q^2$ となる.

$$\overline{q} = (3X - q)Y - 3X + 1 \geq (3X - q)q^2 - 3X + 1.$$

$$\begin{aligned}
\overline{q} &= (3X - q)Y - 3X + 1 \\
&\geq (3X - q)q^2 - 3X + 1 \\
&= 3Xq^2 - q^3 - 3X + 1 \\
&= 3X(q^2 - 1) - \overline{q}(q^2 + q + 1) \\
&= 3X(q + 1)\overline{q} - \overline{q}(q^2 + q + 1).
\end{aligned}$$

これより $\overline{q}$ で割って

$$1 \geq 3X(q + 1) - (q^2 + q + 1).$$

移項して

$$q^2 + q + 2 \geq 3X(q + 1).$$

$\overline{q} = (3X - q)Y - 3X + 1$ により $\overline{q} + 3X - 1 = (3X - q)Y$ なので $3X - q > 0$. さらに強く $3X \geq q + 1$.

$$q^2 + q + 2 \geq 3X(q + 1) \geq (q + 1)^2.$$

これで矛盾.

得られた結果を次のように記録する.

命題 1. $s(a)=2$ の下で $2\sigma(a)-3a=1$ のとき $a=3^e q, (q=3^{e+1}-2$:素数$)$ となる.

5　3のべきとそのユークリッド関数の値

$A=3^e$ とおくとき, $2\sigma(A)=3^{e+1}-1$.

表 4: $a-3^e$

$3^e=A$	$\sigma(A)$	素因数分解
$3^2=9$	13	[13]
$3^4=81$	121	$[11^2]$
$3^6=729$	1093	[1093]
$3^{10}=59049$	88573	[23, 3851]
$3^{12}=531441$	797161	[797161]
$3^{16}=43046721$	64570081	[1871, 34511]
$3^{18}=387420489$	581130733	[1597, 363889]
$3^{22}=31381059609$	47071589413	[47, 1001523179]
$3^{30}=205891132094649$	308836698141973	[683, 102673, 4404047]

$\sigma(3^e)$ が素数 q になるとき $q=13, 1093, 797161$ であり数少ない. これらを **底を3としたメルセンヌ素数**という.

6　底を3とする完全数

$\sigma(3^e)$ が素数 q になったとする. このとき $a=3^e q$ を底を 3 とする狭義の完全数と言う.

$a=3^e q=9*13=117, 729*1093=796797$ などは底を 3 とする狭義の完全数である.

11 月 7 日は底を 3 とする完全数記念日と命名しよう.

6.1 底を3とする狭義の完全数

表 5: 底を 3 とする完全数

$e \bmod 4$	e	素因数分解	$q \bmod 10$	a	$a \bmod 10$
2	2	$3^2 * 13$	3	117	7
2	6	$3^6 * 1093$	3	796797	7
0	12	$3^{12} * 797161$	1	423644039001	1
2	70	A	3	B	7
2	102	C	3	D	7

$A = 3^{70} * 3754733257489862401973357979128773$
$B = 939868122326695556888433629151289424673228917359519725450340403327$
$C = 3^{102} * 6957596529882152968992225251835887181478451547013$
$D = 32272099648418784474661930627347224659751864497385 11$
$--$ 2062067563800310073569424269938090581449997117 (ここで $--$ は継続を意味する.)

これらから次の結論を導くことができる.

- $e \equiv 2 \mod 4$ のとき q の末尾の数は 3, a の末尾の数は 7.
- $e \equiv 0 \mod 4$ のとき q の末尾の数は 1, a の末尾の数は 1.

言い換えると普通の完全数 (これを元祖完全数という) では末尾の数が 4 または 6 であったが底を 3 とする完全数の末尾の数は 7 または 1.

命題 2. 底を *3* とする完全数の末尾の数は *7* または *1*.

Proof.
$3^2 = 9 \equiv -1 \mod 5$ により $3^4 \equiv 1 \mod 5$. これを以下使う.
$2q = 3^{e+1} - 1$ となる素数 q についてその末尾の数は 3 または 1 を示す.
1. $e = 4k + 2$ のとき

$$2q = 3^{e+1} - 1 = 3^{4k+3} - 1 \equiv -3 - 1 \equiv 1 \equiv 6 \mod 5.$$

よって $q \equiv 3 \mod 5$. $q = 3 + 5L$ となるが q は素数なので奇数. L は偶数になるので $q \equiv 3 \mod 10$.

$a = 3^e q \equiv -q \equiv 2 \mod 5$ により $a = 2 + 5L'$. L' は奇数になるので $a \equiv 7 \mod 10$.

2. $e=4k$ のとき

$$2q=3^{e+1}-1=3^{4k+1}-1\equiv 3-1\equiv 2 \mod 5.$$

よって $q\equiv 1 \mod 5$. $q=1+5L$ となるが q は奇数. L は偶数になるので $q\equiv 1 \mod 10$.

$a=3^eq\equiv q\equiv 1 \mod 5$ により $a=1+5L'$. L' は偶数になるので $a\equiv 1 \mod 10$.

3. $e=4k+3$ のとき $A=3^{k+1}$ とおくとき

$$2q=3^{e+1}-1=3^{4k+4}-1=A^4-1=(A-1)(A^3+A^2+A+1).$$

$A-1=3^{k+1}-1=2(3^k+3^{k-1}+\cdots+1)$ なので $k>0$ なら $\frac{A-1}{2}>1$. よって q が素数に矛盾.

$k=0$ なら $e=3$ なので $2q=3^4-1=80.q=40$; これは矛盾.

4. $e=4k+1$ のとき $A=3^{2k+1}$ とおくとき

$$2q=3^{e+1}-1=3^{4k+2}-1=A^2-1=(A-1)(A+1).$$

$A-1=3^{2k+1}-1=2(3^{2k}+3^{2k-1}+\cdots+1)$

$$q=\frac{A^2-1}{2}=\frac{A-1}{2}(A+1)=(3^{2k}+3^{2k-1}+\cdots+1)(A+1).$$

q が素数に矛盾.

6.2 底を 3 とする完全数の公式

普通の完全数では $\sigma(a)-2a=0$ を満たす数 a を完全数という.

a が偶数の場合, オイラーにより $a=2^e\sigma(2^e)$;(ただし,$\sigma(2^e)$ は素数) と書けることが証明された.

ここではオイラーの与えた形の類似式から出発する.

$A=3^e$ とおき $\sigma(A)$ が素数 q になったとき $a=Aq=3^eq$ を底を 3 とする (狭義の) 完全数と呼ぶことにした.(ここが少しずるい.)

そこで $\sigma(a)$ を計算する. $N=3^{e+1}-1$ とおくとき $2q=2\sigma(A)=N$.

$$2\sigma(a)=2\sigma(A)\sigma(q)=N\sigma(q)=N(q+1)=Nq+N=3a-q+N$$

になる. $N=2q$ なので

$$2\sigma(a)=3a-q+N=3a+q.$$

ここから q を消すことができないので a の最大素因子 $\mathrm{Maxp}(a)$ と書くことにすると, 次の形の式となる.

$$2\sigma(a) = 3a + \mathrm{Maxp}(a).$$

定義 1. 式 $2\sigma(a) = 3a + Maxp(a)$ を満たす a を *3* を底とする広義の完全数という.

すると大きな問題は a を底を 3 とする広義の完全数は　$q = \sigma(3^e)$ が素数になる q を用いて $a = 3^e q$ と書ける (底を 3 とする狭義の完全数) か, という問題である.

これを底を 3 とする完全数の基本問題と呼ぶ.

難しそうな問題だが, 案外反例をつくりやすいかもしれない.

6.3 底を 3 とする完全数の基本問題

1) $s(a) = 1$.
$a = q^f$ が $2\sigma(a) = 3a + \mathrm{Maxp}(a)$ を満たすと仮定する.
$Y = q^f$ とおくと

$$\frac{2(qY-1)}{\overline{q}} = 3Y + q.$$

これより

$$Y(2q - 3\overline{q}) = 2 + q\overline{q}.$$

$2q - 3\overline{q} > 0$ により, $q = 2$.
$Y(2q - 3\overline{q}) = 2 + q\overline{q}$ に $q = 2$ を代入すると $Y = 4$. よって $a = 4$.
このように素因子が 1 つ, 言い換えれば $a = p^e$ と書ける解を微小解という.
底を 3 とする完全数の微小解は 4, と言うことができる.

2) $s(a)=2$. 場合を扱う.

$2\sigma(a)=3a+\mathrm{Maxp}(a)$ を満たすと仮定する.

ここで a は奇数である. なぜなら $\mathrm{Maxp}(a)$ は奇数で,$2\sigma(a)$ は偶数だから.

a を素因数分解し $a=p^e q^f (2<p<q)$ とする. $X=p^e, Y=q^f$ とおくと $a=XY$ となる. すると $\overline{p}=p-1, \overline{q}=q-1$ を使うと

$$\sigma(a)=\frac{(pX-1)(qY-1)}{\overline{pq}}$$

であり,$A=pX-1, B=qY-1, \rho'=\overline{pq}$ とおけば

$\mathrm{Maxp}(a)=q$ なので

$$\frac{2AB}{\rho'}=3XY+q.$$

書き直して

$$2AB=3\rho' XY+q\rho'.$$

$2AB-3\rho' XY$ の XY の係数を R とおけば

$$R=2pq-3\rho'=6-(p-3)(q-3).$$

$q\rho'=RXY-(pX+qY-1)$ によって $R>0$.

$0<R=6-(p-3)(q-3)$ により,a は奇数になるので $p=3, R=6$. $\rho'=2\overline{q}$.

$$2\overline{q}q=6XY-2(3X+qY-1)$$

を 2 で割って

$$\overline{q}q=3XY-(3X+qY-1)=(3X-q)Y-3X+1.$$

$0<\overline{q}q+3X-1=(3X-q)Y$ により $3X>q$ かつ $Y\geq q$ によって

$$\overline{q}q\geq(3X-q)q-3X+1=3X\overline{q}-\widetilde{q}\overline{q}.$$

$\overline{q}q\geq 3X\overline{q}-\widetilde{q}\overline{q}$ から $\overline{q}$ を消すと

$$q\geq 3X-\widetilde{q}.$$

よって

$$2q+1\geq 3X.$$

ここで $Y=q$ を仮定すると $2q+1=3X$ が成り立ち $q=\frac{3^{e+1}-1}{2}=\sigma(3^e)$ は素数. $a=3^e q$ は 3 を底とした完全数になる.

$Y>q$ のとき $Y\geq q^2$ になる. そこで $\widetilde{q}=q+1$ とおくとき

$$
\begin{aligned}
\overline{q}q &= (3X-q)Y - 3X + 1 \\
&= (3X-q)Y - 3X + q + 1 - q \\
&= (3X-q)(Y-1) + 1 - q \\
&\geq (3X-q)(q^2-1) + 1 - q \\
&\geq (3X-q)\overline{q}\widetilde{q} - \overline{q}.
\end{aligned}
$$

よって

$$q \geq (3X-q)\widetilde{q} - 1.$$

1 を移項すると $\widetilde{q} \geq (3X-q)\widetilde{q}$ になるので $\widetilde{q}$　で割ると

$$1 \geq 3X - q > 0.$$

ゆえに $3X - q = 1$. しかし $q = 3X - 1 = 3^{e+1} - 1 = 2\sigma(3^e)$ の右端は素数ではない. これは矛盾.

7　底を 3 とする広義の完全数

底を 3 とする完全数の方程式は簡単である.

$$2\sigma(a) = 3a + \mathrm{Maxp}(a).$$

表 6: $2\sigma(a) = 3a + \mathrm{Maxp}(a)$, 底を 3 とする広義の完全数

a	素因数分解	$\sigma(a)$
4	$[2^2]$	7
117	$[3^2, 13]$	182
796797	$[3^6, 1093]$	1195742
1212741	$[3^2, 47^2, 61]$	1819142

底を 3 とする広義の完全数にはまず微小解として 4 が出てきた.
$a = 117 = 3^2 * 13$
$a = 796797 = 3^6 * 1093$
に続いて　決定的な $s(a) = 3$ の解　$a = 1212741 = [3^2, 47^2, 61]$
が出た.
これは基本問題の反例である.

反例が出たので基本問題は否定的な解決をみたが $s(a) = 3$ の解をさらに探求しこれらの解の構造を考えることはきわめて興味深い問題である.

実は反例があるなど否定的解決にいたるときの方が新しい数学の発見につながる可能性があり実はその方が意義は深いのである.

7.0.1 Wieferch 素数

3 番目に出たの素数 1093 は Wieferch 素数である. $\sigma(3^6) = 1093$ として華麗に登場した.

ところで, $2^p \equiv 1 \mod p^2$ を満たす素数 p を Wieferch 素数という.

現在のところ 1093 と 3511 だけ知られている. (2 個しかないという理論が無い以上もっとあるだろう)

8　底を 3 とする完全数の平行移動

定義によれば $q = \sigma(3^e) = \dfrac{3^{e+1}-1}{2}$ が素数 q のとき $a = 3^e q$ を 3 を底とする完全数という．これを m だけ 平行移動することを考える.

$q = \dfrac{3^{e+1}-1}{2} + m$ が素数 q のとき $a = 3^e q$ を底を 3 とする m だけ 平行移動した狭義の完全数という.

これらが存在しなければ意味がないのでパソコンで確認する.

8.1　$m = 1$ の場合

$m = 1$ のとき

表 7: $m = 1$

e mod 4	e	素因数分解	q mod 10	a	a mod 10
1	1	$3 * 5$	5	15	5
3	3	$3^3 * 41$	1	1107	7
3	15	$3^{15} * 21523361$	1	308836705316427	7
3	31	$3^{31} * 926510094425921$	1	X	7
3	63	A	1	B	7

$X = 572280636715419056279672990187$
$A = 3^{63} * 1716841910146256242328924544641$
$B = 196503076295643052858681214356932539158308401746008315969770 7$
以上の表を観察すると $e > 1$ のとき a の末尾は 7 らしい. 証明を試みた.

命題 3. *a の末尾の数は 7.*

Proof.
方程式は $m = 1$ のときなので $2q = 3^{e+1} + 1$ となる.
e を 4 を法として考える.

1. $e = 4k + 3$.
$3^4 = 81 \equiv 1 \mod 5$ を以下繰り返し使う.

$$2q = 3^{e+1} + 1 = 3^{4k+4} + 1 \equiv 2 \mod 5.$$

$q=1+5L$ となり L は偶数なので $q \equiv 1 \mod 10$.

$$a = 3^e q \equiv 2q \equiv 2 \mod 5.$$

$a = 2+5L'$ となるが a は奇数なので L' も奇数. よって $a \equiv 7 \mod 10$.

2. $e = 4k+1$. $3^2 = 9 \equiv -1 \mod 5$.

$$2q = 3^{e+1}+1 = 3^{4k+2}+1 \equiv 0 \mod 5.$$

q は素数に反する.

3. $e = 4k+2$.

$$2q = 3^{e+1}+1 = 3^{4k+3}+1 \equiv -2 \mod 5.$$

$q \equiv 4 \mod 5$. したがって, $q \equiv 9 \mod 10$. 今のところここから矛盾も例も出ない.

計算例が 4 つしかないので, 何とも言えない. こうして簡単そうでも解決できない.

$m=2$ の場合.

このとき, 解無し. これは当然である. $q = \frac{3^{e+1}+3}{2}$ の右辺は 3 の倍数だから, 素数にならない.

8.2 $m = 3$

$m = 3$ のときは $q = \dfrac{3^{e+1} + 5}{2}$.

表 8: $m = 3$

e	素因数分解	a
3	$3^3 * 43$	1161
5	$3^5 * 367$	89181
9	$3^9 * 29527$	581179941
59	A	B

$A = 3^{59} * 21195579137608101757147216603$
$B = 299501716652405201735529971620260138517926107518220545401$
q の末尾の数は 3 または 7. a の末尾の数は 1 になることを証明したい.
解決するのは君の番だ. そして読者に丸投げ.

8.3　m だけ平行移動した完全数の公式

$q=\dfrac{3^{e+1}-1}{2}+m$ が素数 q のとき $a=3^e q$ とおく．これの満たす方程式を決定しよう．

$N=3^{e+1}-1$ とおく．$q=\dfrac{N}{2}+m$ により, $N=2(q-m)$.

$\sigma(a)=\sigma(3^e)\sigma(q)=\dfrac{N(q+1)}{2}$, $Nq=3a-q$ により

$$2\sigma(a)=Nq+N=3a-q+N=3a-q+2(q-m)=3a+q-2m.$$

かくして $q=\mathrm{Maxp}(a)$ を使うと方程式

$$2\sigma(a)=3a+\mathrm{Maxp}(a)-2m$$

がえられた.

この式を満たす解を, 底を 3 とする m だけ平行移動した広義の完全数という
.

8.4　$m=1$ の場合

$$2\sigma(a)=3a+\mathrm{Maxp}(a)-2$$

表 9: $2\sigma(a)=3a+\mathrm{Maxp}(a)-2$

a	素因数分解
15	$3*5$
741	$3*13*19$
1107	3^3*41
14883	$3*11^2*41$
38781	$3^2*31*139$

底を 3 とする 1 だけ 平行移動した狭義の完全数では $a=15,1107$ が出ていたが広義の完全数では特色ある解がいくつも出ていて実に愉快である.

$a=3^e \quad q(q$:素数) の形の解を 正規形の解という. $a=15=3*5, a=3^3*41$ がその例である.

$a=3^e \quad rq(r,q$:2 素数) の形の解は 第 2 正規形の解という.

$a=74=3*13*19, a=38781=3^2*31*139$ がその例

$a=14883=3*11^2*41$ はレアな形の解であり, 私は彼を ヒトコブ と呼びたい.

9　$m=2$ と素数のべき

$2\sigma(a)=3a+\mathrm{Maxp}(a)-4$

表 10: $2\sigma(a)=3a+\mathrm{Maxp}(a)-4$

a	素因数分解
3	[3]
9	$[3^2]$
27	$[3^3]$
81	$[3^4]$
243	$[3^5]$
729	$[3^6]$
2187	$[3^7]$
6561	$[3^8]$
19683	$[3^9]$
59049	$[3^{10}]$
99807	$[3,17,19,103]$
177147	$[3^{11}]$
531441	$[3^{12}]$
603681	$[3,13,23,673]$
1594323	$[3^{13}]$

ここでは 3 のべき 3^e はみな解になる．実際, $a=3^e$ とおくとき,

$$2\sigma(a)-3a-\mathrm{Maxp}(a)=(3^{e+1}-1)-3^{e+1}-3=-4.$$

その上,3^e と比べてあまりにも異質な解 (エイリアン解) $a=99807=[3,17,19,103]$,$a=603681=3*13*23*673$

が出たのである.

このような解がでたので私は鳩が豆鉄砲をくらったような気がした．ほかにこのようなエイリアンみたいな解はあるのだろうか.

狭義の完全数の定義式に $m=2$ を無理に入れると $q=\frac{3^{e+1}-1}{2}+2=\frac{3^{e+1}+3}{2}=3\frac{3^e+1}{2}$ なので素数になりえない．$m=2$ は無理筋の数になるが広義の完全数と見れば悪くない.

このように底を 3 にするだけで興味深い例が多数出てきた.

これらを若人は自分に与えられた問題と信じて取り組んでほしい.