書泉グランデ
高校生もわかる新しい数論研究
第1期　予稿3; 完全数の水平展開3

飯高 茂

2016 年 11 月 11 日

1　完全数の水平展開の目的

底が P で m だけ平行移動した完全数の方程式は

$$(P-1)\sigma(a) = Pa + Maxp(a)(P-2) - m(P-1)$$

である. $P=2$ なら $\sigma(a) = 2a - m$.

これは簡明な式であり簡単そうにみえるが, この解をすべて求めることは現代数学でも不可能であろう.

なぜなら $m=0$ の場合も解かれていないからである.

われわれの目的は, できる限り m だけ平行移動した完全数を探索して得られた完全数のもつ数論的性質を調べることである.

2　wxmaxima の使い方

受講生から予稿でよく使われている wxmaxima の使い方を解説し, さらにプログラムを提供してほしいという要望があった. そこでごく簡単に wxmaxima の紹介をする.

maxima は大型、中型のコンピュータで作動するもっとも歴史のある高級な数式処理系である. 今はパソコンで動き無料で使える.

windows 上でで動くのは wxmaxima と呼ばれ net で wxmaxima を探すと直ちに入手できて, インストールは容易.

私は手探りで状態で wxmaxima のプログラムを書いて 完全数の研究に使ってきた. 全くの自己流で恥ずかしい. だがブルーバックスにある竹内氏の maxima 入門よりは役に立つ解説にしたい.

2.1 関数の利用

ユークリッド関数 $\sigma(a)$ は関数 divsum(a)（約数の和） を使うと求められる.

(i30) divsum(10000); シフトリターン

(o30) 24211

オイラー関数 \varphi(a) の値は関数 totient(a) .

(i31) totient(10000); シフトリターン

(o31) 4000

2.2 関数の作成

値の代入は : を使い関数の作成には := を使う.

f(x,y):= 関数の本体

for 文 は

for e:1 thru 100 do(e の式)

if 文は

if A then B else C
が基本形

例.

sum_test(a,b) を定義. a から b までの和を与える関数.

```
sum_test(a,b):= (y:0,for x:a thru b do(y:x+y),print(y));
```

実行例

```
sum_test(1,1000);
```

結果

```
500500
```

a の最大素因子 Maxp(a) を求めるプログラムを作る.

```
maxpp(a):= (c:ifactors(a),cc:last(c), c1:cc[1]);
```

プログラムの説明

ifactors(a) は a の素因数分解をリストで与える.

```
ifactors(a)
```

```
[[2,3],[5,3]]
```

a の最大素因子を求めるためには
a の素因数分解をリスト c で出して, その最終因子 cc の第 1 成分 c1 をとればよい.

factor(1000); シフトリターンで

```
2^3*5^3
```

```
display(factor(1000));
```

factor(1000)=2^3*5^3 となる.

究極の完全数の定義式は

$$(P-1)\sigma(a) = Pa + Maxp(a)(P-2) - m(P-1)$$

これを移項して

$$w = (P-1)\sigma(a) - Pa - Maxp(a)(P-2) + m(P-1)$$

% 究極の完全数を探索するプログラム

```
maxpp(a):= (c:ifactors(a),cc:last(c), c1:cc[1]);
```

（これで補助プログラムを定義し，; を入れてシフトリターンし活性化しておく ）

```
ultimate_perfect(p,m,aa,bb):= for a:aa thru bb
do(mxp:maxpp(a),w:(p-1)*divsum(a)-p*a-(p-2)*mxp+m*(p-1),
if w=0 then (print(a),display(factor(a))) else 1=1);
```

ultimate_perfect(p,m,aa,bb) は４変数 p,m,aa,bb の関数として定義している．

変数への代入には コロン を使う．

```
(ultimate_perfect(2,-3,2,1000));
```

ここで ; を入れて シフトエンターで実行．

実行結果

```
18
factor(18)=2*3^2
(%o28) done
```

これは
a=18=2*3^2 が解になることを意味する．

p を底の素因子とし,
aa=2 から bb=1000 まで

a の最大素因子を mxp および divsum により

$$w = (P-1)\sigma(a) - Pa - mxp(P-2) + m(P-1)$$

とおき $w = 0$ になるとき, a の素因数分解 を行い display でそれを表示している.

底 がP, m だけ平行移動した完全数を
指数 e の範囲を限定して求める.

```
perfect_pms(p,m,aa,bb):= for e:aa thru bb do(w:p-1,x:(p^(e+1)-1)/w+m,
if factor(x)=x then (y:p^e*x,display(factor(y)),print(y)) else 1=1);
```

P=2, 8 だけ平行移動した完全数を求める.

P=2,W=P-1=1,m=8, 指数 e は aa=3 から bb=20 まで

```
perfect_pms(2,8,3,20);
```
と入力して シフトリターン

実行結果

```
factor(184)=2^3*23
184
factor(2272)=2^5*71
2272
factor(33664)=2^7*263
33664
factor(527872)=2^9*1031
527872
```

2.3 $[P=2, m=0]$ 完全数, 正規形

表 1: $[P=2, m=0]$ 完全数

a	素因数分解
6	$2*3$
28	2^2*7
496	2^4*31
8128	2^6*127
33550336	$2^{12}*8191$
8589869056	$2^{16}*131071$
137438691328	$2^{18}*524287$
2305843008139952128(Euler)	$2^{30}*2147483647$
2658455991569831744654692615953842176	$2^{60}*2305843009213693951$

$q=2^{e+1}-1$: 素数より次の結果はすぐ出るし, 昔から知られていた.

$e\equiv 0 \bmod 4$ のとき $a\equiv 6 \bmod 10$, $q\equiv 1 \bmod 10$.

$e\equiv 2 \bmod 4$ のとき $a\equiv 8 \bmod 10$, $q\equiv 7 \bmod 10$.

これは易しい性質なので, 今後完全数の水平展開ではこのことが他の m でどのように変化して成り立つかが興味あるしかし取り付きやすい性質になる.

2.4 $[P=2, m=2]$ の場合

表 2: $[P=2, m=2]$ 完全数

a	素因数分解
3	3
10	$2*5$
136	2^3*17
32896	2^7*257
2147516416	$2^{15}*65537$

$q=2^{e+1}-1+2=2^{e+1}+1$: はフェルマ素数でありこれまで人類には 5 個しか知られていない.

私は 6 個目がある方に 1 票いれる.

$e>1$ で考えると,

$e \equiv 3 \bmod 4$ のとき $a \equiv 6 \bmod 10$, $q \equiv 7 \bmod 10$.
これ以外にない.
$m = 0, 2$ なら完全数は正規形しかない. これは予想.

2.5 $[P=2, m=4]$ の場合

表 3: $[P=2, m=4]$ 完全数

a	素因数分解
5	5
14	$2*7$
44	2^2*11
110	$2*5*11$
152	2^3*19
884	$2^2*13*17$
2144	2^5*67
8384	2^6*131
18632	$2^3*17*137$
116624	$2^4*37*197$

正規形 $2^e q$ に限って探す.

表 4: $[P=2, m=4]$ 正規形 $2^e q$

a	素因数分解
44	2^2*11
152	2^3*19
2144	2^5*67
8384	2^6*131
8394752	$2^{11}*4099$
536920064	$2^{14}*32771$
2147581952	$2^{15}*65539$
34360131584	$2^{17}*262147$

$e \equiv 2 \bmod 4$ のとき $a \equiv 4 \bmod 10$, $q \equiv 1 \bmod 10$.
$e \equiv 3 \bmod 4$ のとき $a \equiv 2 \bmod 10$, $q \equiv 9 \bmod 10$.
$e \equiv 1 \bmod 4$ のとき $a \equiv 4 \bmod 10$, $q \equiv 7 \bmod 10$.
正規形はこのように a, q の末尾 1 桁の数をうまくあてている.
非正規形は $2^e rq$ の形をしている.

$a = 884 = 2^2 * 13 * 17$

$a = 18632 = 2^3 * 17 * 137$

$a = 116624 = 2^4 * 37 * 197$

これらは $2^e rq (r < q : primes)$ 形であり $\sigma(a) = 2a - 4$ を満たすが正規形ではない.

かくして, $m = 4$ の場合は広義の完全数で狭義の完全数にならないものが出てきた.

$m = 0, 2$ の場合のように, 広義の完全数は狭義の完全数になるという予想は $m = 4$ では成立せず反例がいくつもでてきた.

これを安易に予想をたてるものではない，という理解につなげてはいけない.

$m = 4$ の場合は予想を少し修正して, $m = 4$ のとき広義の完全数は $2^e q, 2^e rq$ と書ける. とすることができる.

コンピュータの計算によると千万以下の a については正しい. 果たして一般に成り立つだろうか？ これは大難問であると思う.

アルゴリズムを基に swiprolog で作ったプログラムによる解は次のとおり.

$a = 2^2 * 13 * 17 = 884$

$a = 2^3 * 17 * 137 = 18632$

$a = 2^4 * 37 * 197 = 116624$

$a = 2^6 * 137 * 1753 = 15370304$

$a = 2^7 * 293 * 1973 = 73995392$

$e < 15$ まで調べたが解はこれ以上見つからない.

2.6 $[P=2, m=6]$ 完全数

表 5: $[P=2, m=6]$ 完全数

a	素因数分解
7	7
15	$3*5$
52	2^2*13
315	3^2*5*7
592	2^4*37
1155	$3*5*7*11$
2102272	$2^{10}*2053$

驚いたことにここの解は非常に特色があり本当に面白い.
正規形の解は $a=52=2^2*13, 592=2^4*37, 2102272=2^{10}*205$
で意外に少ない.
無理して探すと正規形の解はまだある (たぶん無数にある).

表 6: $[P=2, m=6]$ 完全数, 正規形

a	素因数分 height52
2^2*13	
592	2^4*37
2102272	$2^{10}*2053$
9903520314283394042913882112	$2^{46}*140737488355333$
40564819207303363365892639424512	$2^{52}*9007199254740997$

(
$e\equiv 2 \bmod 4$ のとき $a\equiv 2 \bmod 10$, $q\equiv 3 \bmod 10$.
$e\equiv 0 \bmod 4$ のとき $a\equiv 2 \bmod 10$, $q\equiv 7 \bmod 10$.
$e\equiv 1 \bmod 4$ のとき $q=2^{e+1}+5=2^{4K+2}+5\equiv 0 \bmod 3$.
$e\equiv 3 \bmod 4$ のとき $q=2^{e+1}+5=2^{4K+4}+5\equiv 0 \bmod 3$.
さらに非正規形の解がいくつか登場する.
$a=7$ (a が素数の場合は後でふれる)

$a=15=3*5$ ($a=pq$ は $p<q$, p,q : 素数の場合は後でふれる)

これらは易しい解である.

非正規形の解:
$a=315=3^2*5*7$, $1155=3*5*7*11$ が 2 つ出てきた.
これは正規形の解とは全く異なり、今までにない新種の解である. これにはびっくりポン. そこで, これら新種の解をモンスターと呼んでみたい.
$a=315=3^2*5*7$ はモンスター 315 であるが ニックネームとしてシチゴサンと呼ぶ.
これは奇数で $3^e rq$ の形に書ける.

一方 $a=1155=3*5*7*11$ は小さいほうから奇素数 4 つの積であり, その姿形が美しい. これは和服の帯を連想させるものがあるのでオビと命名しよう.

2.7 オビ 1155 の特徴づけ

略

2.8 シチゴサン $a=315=3^2*5*7$ の特徴づけ

略

2.9 ナガオビ の特徴づけ

(水谷一さんの示唆によるところ大, 記して感謝する.)
3 から初めて順に素数 r 個の積 $a=3*5*7*\cdots*$ を一般にナガオビという.

命題 1 長さ r の ナガオビを $a=q_1*q_2*\cdots q_r$ と書く.
$M=-\sigma(a)+2a$ とし $M>0$ を仮定する.
素数の積 $b=\prod_{j=1}^r p_j (2<p_1<p_2<\cdots<p_r)$ があり $M=-\sigma(b)+2b$ を満たすとき, $b=a$

Proof $p_j \geq q_j$ なので $b=\prod_{j=1}^r p_j \geq a=\prod_{j=1}^r q_j$.
$\sigma(a)=2a-M$ の両辺を a で割ると,

$$\prod_{j=1}^r (1+\frac{1}{q_j}) = 2-\frac{M}{a}.$$

$\prod_{j=1}^r (1+\frac{1}{q_j}) \geq \prod_{j=1}^r (1+\frac{1}{p_j})$ によって

$$-\frac{M}{a} \geq -\frac{M}{b}.$$

ゆえに, $-\dfrac{1}{a} \geq -\dfrac{1}{b}$. よって $a \geq b$. これより, $a = b$.

表 7: ナガオビの例

a	素因数分解	$m = -\sigma(a) + 2a$
35	$3*5$	6
105	$3*5*7$	18
1155	$3*5*7*11$	6
15015	$3*5*7*11*13$	-2226
255255	$3*5*7*11*13*17$	-70098

ここで 15015, 255255 は m が負になるので命題 1 が使えない.

2.10 $[P=2, m=8]$ 完全数

表 8: $[P=2, m=8]$ 完全数

a	素因数分解
22	$2*11$
130	$2*5*13$
184	2^3*23
1012	$2^2*11*23$
2272	2^5*71
18904	$2^3*17*139$
33664	2^7*263
70564	$2^2*13*23*59$
85936	$2^4*41*131$
100804	$2^2*11*29*79$

表 9: $[P=2, m=8]$ 完全数, 正規形

a	素因数分解
184	2^3*23
2272	2^5*71
33664	2^7*263
527872	2^9*1031
2147713024	$2^{15}*65543$
34360655872	$2^{17}*262151$
549759483904	$2^{19}*1048583$

$e \equiv 1, 3 \mod 4$

$e \equiv 1 \mod 4$ なら $a \equiv 2 \mod 10$

$e \equiv 3 \mod 4$ なら $a \equiv 4 \mod 10$

Proof

$e = 4k+j, q = 2^{e+1}-1-8$ について $j = 2, 4, 3, 1$ に関して q の素因数分解 L, e について $e = L$ を表示した.

$j = 1$ なら q は 5 の倍数.

Proof

$q = 2^{4k+2}-1-8$ なので

$q = 16^k \cdot 4 - 9 \equiv 0 \mod 5$

```
4 ?- q139(9,2,2=<6).
10=[2039]
14=[17,41,47]
18=[7,74897]
22=[17,493447]
26=[23,5835553]


7 ?- q139(9,4,2=<6).
12=[7,7,167]
16=[131063]
20=[2097143]
24=[7,4793489]
28=[311,1726273]

5 ?- q139(9,3,2=<6).
11=[61,67]
15=[7,11,23,37]
19=[13,79,1021]
23=[4093,4099]
27=[7,2341,16381]


6 ?- q139(9,1,2=<6).
9=[5,7,29]
13=[5,5,5,131]
17=[5,103,509]
21=[5,7,293,409]
25=[5,11,19,149,431]
```

$2^e rq$ の解

$a = 130 = 2 * 5 * 13$

$a = 1012 = 2^2 * 11 * 23$

$a = 18904 = 2^3 * 17 * 139$

は $2^e rq$ 形

$a = 70564 = 2^2 * 13 * 23 * 59$

は $2^e r_1 r_2 q$ 形

$a = 85936 = 2^4 * 41 * 131$

は $2^e rq$ 形

$a = 100804 = 2^2 * 11 * 29 * 79$

は $2^e r_1 r_2 q$ 形

これらは $s(a) = 3, s(a) = 4$ の非正規形の解であるが形はわかりやすい.

アルゴリズム解

$a = 2 * 5 * 13 = 130$

$a = 2^2 * 11 * 23 = 1012$

$a = 2^3 * 17 * 139 = 18904$

$a = 2^4 * 41 * 131 = 85936$

$a = 2^5 * 73 * 467 = 1090912$

これ以上はないのだろう.　と思ったが念のため指数を大きくしたらさらにあった.

$a = 2^{13} * 16421 * 7080043 = 952413274955776$

$a = 2^{13} * 16693 * 882251 = 120646991405056$

$a = 2^{13} * 16763 * 722749 = 99249696661504$

$a = 2^{14} * 32771 * 268460033 = 144141578099802112$

$a = 2^{15} * 65537 * 2147516419 = 4611826763432034304$

2.11 $a = 2^2 * 13 * 23 * 59$ と $a = 2^2 * 11 * 29 * 79$ の特徴付け

これらは $2^e r_1 r_2 q$ 形で 4 つの素因子をもつ場合. 扱いはかなり困難になる.

そこで目的を絞り, 伏字問題を解く.

$a = 4pqr, (2 < p < q < r$:素数) とし, $\sigma(a) = 2a - 8$ を満たすとき p, q, r を求めることにしよう.

$a = 4 * pqr$ $(2 < p < q < r$: 素数) とおく.

$\sigma(a) = 7\widetilde{pqr}$ になり

$A = \widetilde{qr}, B = qr$ とおくと $\sigma(a) = 7(p+1)A, 2a - 8 = 8pB - 8$ により

$$7(p+1)A = 8pB - 8.$$

変形して

$$p(8B - 7A) = 8 + 7A.$$

$\Delta = q + r$ を用いて $A = B + \Delta + 1$.

$$8B - 7A = B - 7(\Delta + 1), 8 + 7A = 8 + 7(B + \Delta + 1)$$

$p(8B - 7A) = 8 + 7A$ により

$$p(B - 7(\Delta + 1)) = 8 + 7(B + \Delta + 1).$$

次のように q, r を用いて表す:

$$p(qr - 7(q + r + 1)) = 8 + 7(qr + q + r + 1).$$

qr でまとめると

$$(p - 7)qr - 7(q + 1)r = 7(p + 1)q + 15 + 7r.$$

r でまとめると

$$((p - 7)q - 7(q + 1))r = 7(p + 1)q + 15 + 7p.$$

これより $p - 7 \leq 0$ なら左辺は 負になり, 右辺は正なので矛盾.

$p > 7$ を満たす素数なので, $p = 11, 13, 17, 19$ など. q は $p+2$ から始まる素数.

r は $q + 2$ から始まるる素数なのでエクセルでプログラムを書く.

表 10: $p = 11$ のとき

q	bunshi	bunbo	r	$r-q-2$
23	2024	8	253	228
29	2528	32	79	48
31	2696	40	67.4	34.4
37	3200	64	50	11
41	3536	80	44.2	1.2
43	3704	88	42.09090909	5.777777778

$q = 23, r = 253 = 11 * 23$ 非素数. これは不可.
$p = 11, q = 29, r = 79$ 素数; $a = 2^2 * 11 * 29 * 79$ は解.

表 11: $p = 13$ のとき

q	bunshi	bunbo	r	$r-q-2$
23	2360	40	59	34
29	2948	76	38.78947368	7.789473684
31	3144	88	35.72727273	2.727272727

$p = 13, q = 23, r = 59$ 素数; $a = 2^2 * 13 * 23 * 59$ は解.

表 12: $p = 17$ のとき

q	bunshi	bunbo	r	$r - q - 2$
23	3032	104	29.15384615	4.153846154

解はない.

表 13: $p = 19$ のとき

q	bunshi	bunbo	r	$r - q - 2$
21	3088	112	27.57142857	4.571428571

解はない.

表 14: $p = 23$ のとき

q	bunshi	bunbo	r	$r - q - 2$
21	3704	168	22.04761905	-1

これより $q > 21$ で解がない. のみならず $p > 22$ で解がない.

2.12 $[P = 2, m = 10]$ 完全数

$e \equiv 1 \bmod 4$ なら $a \equiv 6 \bmod 10$, $q \equiv 3 \bmod 10$,
$e \equiv 2 \bmod 4$ なら $a \equiv 8 \bmod 10$,$q \equiv 7 \bmod 10$
$e \equiv 4 \bmod 4$ なら $a \equiv 6 \bmod 10$,$q \equiv 1 \bmod 10$
$e \equiv 3 \bmod 4$ なら $q = 2^{4k+4} + 9 \equiv 0 \bmod 5$; 素数ではない.

$a = 11$,
$a = 21 = 3 * 7$

これら以外はみな正規形になっているのが不思議である. このことを証明できたらスゴイ.

表 15: $[P=2,m=10]$ 完全数

a	素因数分解
11	11
21	$3*7$
26	$2*13$
68	2^2*17
656	2^4*41
2336	2^5*73
8768	2^6*137
133376	2^8*521
528896	2^9*1033

表 16: $[P=2,m=10]$ 正規形

a	素因数分解
528896	2^9*1033
34360918016	$2^{17}*262153$
35184409837568	$2^{22}*8388617$
576460757135261696	$2^{29}*1073741833$
9444732966357765718016	$2^{36}*137438953481$
9903520314283675517890592768	$2^{46}*140737488355337$

表 17: $[P=2,m=12]$ 完全数

a	素因数分解
13	13
45	3^2*5
76	2^2*19
688	2^4*43
8896	2^6*139
133888	2^8*523

2.13 $[P=2,m=12]$ 完全数

$a=13$, $a=45=3^2*5$

以外はみな正規形これは不思議である.

表 18: $[P=2, m=12]$ 正規形

a	素因数分解
76	$2^2 * 19$
688	$2^4 * 43$
8896	$2^6 * 139$
133888	$2^8 * 523$
537051136	$2^{14} * 32779$
35184418226176	$2^{22} * 8388619$
144115191028645888	$2^{28} * 536870923$
2305843021024854016	$2^{30} * 2147483659$

$e \equiv 0 \bmod 4$ なら $a \equiv 8 \bmod 10$, $q \equiv 3 \bmod 10$,
$e \equiv 2 \bmod 4$ なら $a \equiv 6 \bmod 10$,$q \equiv 9 \bmod 10$
a の末尾 1 桁の数は 6,8. 完全数みたい.