書泉グランデ
高校生もわかる新しい数論研究
第1期　予稿4; 完全数の水平展開4

飯高 茂

2016 年 11 月 25 日

目 次

1　10,11 月期のまとめ

完全数はユークリッドの時代 (紀元前 3 世紀) に導入された概念でその言葉の美しさから, フェルマの関心をよび起こし近代整数論の形成と発展に大きく貢献した.

しかし Weil が言うには完全数には数論の立場にたてば今更研究する価値などない.

1.1　Weil の見解

一方, プロの数学者は完全数を歓迎しない. たとえば A.Weil は『数論　歴史からのアプローチ』 足立恒雄・三宅克哉訳、日本評論社、1987 年。p6, 第 1 章 § III, で次のように完全数を軽んじる発言をしている.

ギリシャのみならずそれ以前においても, 完全性という観念が, そのすべての約数の和が自分自身と一致するような整数に結び付けられていた.

ユークリッドの数論に関する巻の最後の定理において

$2^n(2^{n+1}-1)$ はその第二因子が素数であるときには完全数であることが主張されている;

フェルマの同時代の人達、メルセンヌやフェルニクル、それにフェルマ自身も結構面白がっており、彼の初期の研究においてはそれなりの位置を占めていたことも事実である.

(中略) しかし理論的にはほとんど意味のないものであり, このような歴史的事実がなければ, ここに取り上げる必要もなかったろう.

著者自身も, これがその数論的な諸結果の中の白眉であると見ているように思える.　この題目とそれに伴って現れるいくつかのものは, 後世の著作にも散発的に顔を出す; 恐らくこれらの概念に付された呼称が特別な興味を惹くのだろう.

2　私の見解

そこで完全数を広くとらえ直し底の一般化, 平行移動などの操作をもとに種々の完全数を考えると, 研究する材料は豊富にありいくらでも研究できその結果ますます研究対象が大きな広がりを見せるにいたった.

古代ギリシャの数学者が完全数に真心を捧げて研究したと同じように, 現代の我々も拡張された完全数をそのまま受け入れて真心を捧げて研究する価値は十分あると信じる.

Weil が何を言おうとも, われわれの研究をさらに発展させて彼をして「恐れ入りました」と言わせてやりたいものだ.

3　私の小平次元

Weil が「これらの概念に付された呼称」と言わざるをえなかった完全数 (perfect numbers) という呼称のもつ圧倒的な存在感が重要である.

私はかって代数多様体 V の因子 D をひとつ決めて代数多様体 D 次元という概念を導入し, $\kappa(D, V)$ という記号を提唱した（最近 Wikipedia で紹介されている飯高次元というのはこのことであり, Wikipedia には珍しく内容はほぼ正しい）. D が標準因子 (canonical divisor) K_V のとき K_V 次元 $\kappa(K_V, V)$ を簡単に $\kappa(K)$ と書くのでこれを canonical divisor dimension と言いのが妥当だが, 略して canonical dimension という.

このような呼び名を提案してこれを用いた理学博士の学位論文の原稿 (On D dimension of algebraic varieties) を書いた.

しかし, canonical dimension はあまりにも平凡なので一計を案じて Kodaira dimension にしたいと考えて小平先生と通勤の途中でいつも寄る 喫茶店 近江屋で「Kodaira dimension にしたいと考えます. この概念の元は多重種数 P_m です. 代数曲面が一般型のとき P_m が 2 次式で表されるという小平先生の結果がヒントとなってこの概念にいたったのですから」 と言って頼み込んだ.

先生は,「ほうほう」とうなずかれたが反対はしなかったので学位論文には Kodaira dimension を用いて欧文誌のジャーナルに発表した.

数年たってから D.B.Mumford が「代数曲線の moduli 空間の小平次元について」と題した大作を英語で Annals of Mathematics 誌に発表した. これには正直のところ驚いた.

Mumford の論文のおかげで小平次元は一挙に認知され多くの研究が積まれるにいたった. 日本, イギリス, ドイツ, ソ連 (ロシア) の数学者が加わりその理論は急激な発展をとげ私はその流れについていけなくなった. これは真にさびしいものがあった.

そこで, 新しく対数的小平次元という概念を導入し, 新しく開多様体の双有理幾何学を始めた. この試みは意外にも成功しうまく発展した. このような成功には小平次元という言葉が大いに役だったのではないだろうか.

4 言葉の整理

a を未知数として方程式 $\sigma(a) = 2a - m$ の解を (広義の)m だけ平行移動した完全数という. これらをまとめて研究することを完全数の水平展開という.

$a = 2^e q, (q$:素数) を正規形の解という.

$a = 2^e q$ が正規形の解であれば $q = 2^{e+1} - 1 + m$ は素数になる.

そこで, 正規形の解は $A(m)_e$ 型ともいう.

$a = 2^e rq, r < q$(:素数) を第 2 正規形の解という.

$N = 2^{e+1} - 1, D = N(N+1) + m$ とおくときこれを 2 因数に分解して $r_0 q_0$ とし, $r = r_0 + N, q = q_0 + N,$ がともに素数なら a は第 2 正規形の解になる.

そこで, 第 2 正規形を $D(m)_e$ 型ともいう.

正規形の解と 第 2 正規形の解を併せて典型型の解という. 典型型の解ではない解を例外型またはモンスターという.

5 wxmaxima のプログラム追加

$c = a^{2^n} + 1$ について素因数分解をする.

c の素因数 p は $p = 1 + 2^{n+1}K$ と書ける. これを $a = 2, 6, 10, 3, 5, 7$ について c の素因数 p を調べる.

```
gab(a,aa,bb):=for n:aa thru bb
do(c:a^(2^n)+1,print(n),m:2^(n+1),print(m),display(factor(c)));

1
4
factor(5)=5
2
8
factor(17)=17
3
16
factor(257)=257
4
32
factor(65537)=65537
5
64
factor(4294967297)=641*6700417
(%o2) done
```

A=641,B=6700417 とおく.

A-1=64*10, B-1=64*(4*3*17*449)

for 文 は e を 1 から 100 まで動かし, 各 e について (e の式) を計算する.

```
for e:1 thru 100 do(e の式)
```

if 文は A を行い正しければ B ただしくないなら C を行う

```
if A then B else C
```

が基本形

究極の完全数を, 指数を動かして求める.
底 が P, m だけ平行移動した完全数を指数 e の範囲を限定して求める.
$x = \dfrac{P^{e+1}-1}{P-1} + m$ を求めこれが素数なら $a = P^e q$ の素因数分解を与える

```
perfect_pms(p,m,aa,bb):= for e:aa thru bb do(w:p-1,x:(p^(e+1)-1)/w+m,
if factor(x)=x then (y:p^e*x,display(factor(y)),print(y)) else 1=1);
```

P=2，8 だけ平行移動した完全数を求める.

P=2,W=P-1=1,m=8, 指数 e は aa=3 から bb=20 まで

```
perfect_pms(2,8,3,20);
```

と入力して シフトリターン

実行結果

```
factor(184)=2^3*23
184
factor(2272)=2^5*71
2272
factor(33664)=2^7*263
33664
factor(527872)=2^9*1031
527872
```

6　$m < 0$ の場合

6.1　$m = -2$ のとき

a を 1 から千万まで動かし $\sigma(a) = 2a + 2$ を満たす a の素因数分解を与える

表 1: $[P = 2, m = -2]$ 完全数

a	素因数分解
20	$2^2 * 5$
104	$2^3 * 13$
464	$2^4 * 29$
650	$2 * 5^2 * 13$
1952	$2^5 * 61$
130304	$2^8 * 509$

解 $a = 650 = 2 * 5^2 * 13$ は異形だが他は正規形.
$2 * 5^2 * 13$ はヒトコブラクダを連想させる形なのでヒトコブと呼ぶ.
そこで 正規形に限ってプログラムで求めた結果:

表 2: $[P = 2, m = -2]$ 正規形

a	素因数分解
20	$2^2 * 5$
104	$2^3 * 13$
464	$2^4 * 29$
1952	$2^5 * 61$
130304	$2^8 * 509$
522752	$2^9 * 1021$
8382464	$2^{11} * 4093$
134193152	$2^{13} * 16381$
549754241024	$2^{19} * 1048573$
8796086730752	$2^{21} * 4194301$
140737463189504	$2^{23} * 16777213$
144115187270549504	$2^{28} * 536870909$

$a > 20$ のとき
$e \equiv 3 \mod 4$ のとき $q \equiv 3 \mod 10, a \equiv 4 \mod 10,$

$e \equiv 0 \mod 4$ のとき $q \equiv 9 \mod 10, a \equiv 4 \mod 10$,
$e \equiv 1 \mod 4$ のとき $q \equiv 1 \mod 10, a \equiv 2 \mod 10$.

6.2 ヒトコブ の伏せ字問題

命題 1 *$pr^2q, (p < r < q:$ 素数$)$ が $\sigma(a) = 2a + 2$ の解なら $a = 2 * 5^2 * 13$. すなわちヒトコブ になる.*

Proof.
$a = pr^2q$ のとき $R = 1 + r + r^2$ とおくと

$$\sigma(a) = \widetilde{p}R\widetilde{q} = 2a + 2 = 2pr^2q + 2$$

によって,p でまとめると $(p+1)R\widetilde{q} = 2pr^2q + 2$ により

$$p(R\widetilde{q} - 2r^2q) = 2 - R\widetilde{q}$$

$-$ 倍して

$$R\widetilde{q} - 2 = p(-R\widetilde{q} + 2r^2q).$$

1) $p = 2$ のとき
$R\widetilde{q} - 2 = -2R\widetilde{q} + 4r^2q$ によって

$$3R\widetilde{q} - 2 = 4r^2q.$$

i) $r = 3$ のとき
$R = 1 + 3 + 9 = 13$, $39\widetilde{q} - 2 = 36q$ によって $3q = -37$ になり, 矛盾.
ii) $r = 5$ のとき $R = 31$.

$$100q = 3 * 31(q + 1) - 2 = 93q + 91.$$

これより $7q = 91$; $q = 13$. $p = 2, r = 5, q = 13; a = 2 * 5^2 * 13$. これは解.
iii) $r \geq 7$ のとき $q \geq 11$.
q でまとめると

$$q(3R - 4r^2) = 2 - 3R.$$

$$3R - 2 = (-3R + 4r^2)q \geq 11(-3R + 4r^2) = -33R + 44r^2.$$

ゆえに

$$-2 \geq -36R + 44r^2.$$

2 でわって,

$$-1 \geq 22r^2 - 18(1+r) - 18r^2.$$

よって

$$17 \geq 4r^2 - 18 + r = 2r(2r-9).$$

$r \geq 7$ なので 右辺に $r = 7$ を入れると, $2r(2r-9) \geq 14(14-9) > 14 * 5 = 70$. これで矛盾した.

2) $p \geq 3$ のとき $r \geq 5$.

$$R\widetilde{q} - 2 = p(-R\widetilde{q} + 2r^2 q) \geq 3(-R\widetilde{q} + 2r^2 q) = 6r^2 q - 3R\widetilde{q}.$$

よって,

$$4R\widetilde{q} - 2 \geq 6r^2 q.$$

2 でわって,

$$2R\widetilde{q} - 1 = 2Rq + 2R - 1 \geq 3r^2 q.$$

よって,

$$2R - 1 \geq (3r^2 - 2R)q.$$

$q \geq 7$ によって

$$2R - 1 \geq (3r^2 - 2R)7 = 21r^2 - 14R.$$

$$16R - 1 = 16(1 + r + r^2) - 1 \geq 21r^2.$$

$$16(1+r) - 1 \geq 5r^2.$$

$$15 \geq 5r^2 - 16r = r(5r - 16).$$

右辺に $r = 5$ を入れると $r(5r-16) = 5(25-16) = 45$. $15 \geq 14 * 5 = 70$. これで矛盾.

7 $m = -4$ のとき

$\sigma(a) = 2a + 4$ を満たす解を次のように求めた.

表 3: $[P = 2, m = -4]$ 完全数一般の場合、

a	素因数分解
12	$2^2 * 3$
70	$2 * 5 * 7$
88	$2^3 * 11$
1888	$2^5 * 59$
4030	$2 * 5 * 13 * 31$
5830	$2 * 5 * 11 * 53$
32128	$2^7 * 251$
521728	$2^9 * 1019$
1848964	$2^2 * 13 * 31^2 * 37$
8378368	$2^{11} * 4091$

正規形以外の解は $a = 2 * 5 * 7$
これは $2^e rq$ 型. すなわち第 2 基本形. パソコンで計算しても $1 < e < 20$ では解がない.

表 4: $[P = 2, m = -4]$ 完全数 正規形の解

a	素因数分解
1888	$2^5 * 59$
32128	$2^7 * 251$
521728	$2^9 * 1019$
8378368	$2^{11} * 4091$
34359083008	$2^{17} * 262139$
549753192448	$2^{19} * 1048571$
2251799645913088	$2^{25} * 67108859$
9223372026117357568	$2^{31} * 4294967291$
2361183241263023915008	$2^{35} * 68719476731$
2596148429267413634121263069790208	$2^{55} * 72057594037927931$

一般の場合の表にある巨大数 $a = 8378368 = 2^{11} * 4091$ が正規形の解の表ではかわいく見える.

a の末尾は常に 9, q の末尾は 1,9.

一般の場合の表にある非正規の解は 3 つは次の通り.

はじめの 2 つは $a = 4030 = 2 * 5 * 13 * 31$, $a = 5830 = 2 * 5 * 11 * 53$ であり $2^e r_1 r_2 q$ 型.

表の最後にある非正規の解は真に恐ろしい.

$2^2 * 13 * 31^2 * 37$　は頭と体の中央にこぶがある. お前は, 何者だ!. と叫びたくなる.

8　伏字 prq を解く

命題 2 $a = prq, (p < r < q)$ が $\sigma(a) = 2a + 2$ の解なら $a = 70 = 2 * 5 * 7$.

8.1　伏字 prq を解く

Proof.

$a = 2rq$ 形, $a = prq$ 形と順序を踏んで段階的に証明する.

$a = 2rq, \widetilde{r} = r + 1, \widetilde{q} = q + 1, A = \widetilde{rq}, B = rq, \Delta = r + q$ とおくとき, $A = B + \Delta + 1$.

$\sigma(a) = 3A, 2a + 4 = 4B + 4$ によって,

$$3A = 3(B + \Delta + 1) = 4B + 4.$$

これより

$$B = 3\Delta - 1.$$

$r_0 = r - 3, q_0 = q - 3$ とおくとき, $r_0 q_0 = B - 3\Delta + 9$.

ゆえに,$r_0 q_0 = 8$. $r_0 = 2, q_0 = 4$. したがって $r = r_0 + 3 = 5, q = q_0 + 3 = 7$. よって, $a = 70 = 2 * 5 * 7$ 解.

$a = prq, 2 < p < r < q :$ 素数, の場合

$\sigma(a) = (p + 1)A, 2a + 4 = 2pB + 4$,$\sigma(a) = 2a + 4$ によって,

$(p + 1)A = 2pB + 4$ をえて整理すると $A = p(2B - A) + 4$.

$p \geq 3$ なので $r \geq 5, q \geq 7$.

$$A = p(2B - A) + 4 \geq 3(2B - A) + 4 = 6B - 3A + 4.$$

$4A \geq 6B + 4$. よって, $2A \geq 3B + 2$.

$$2(B + \Delta + 1) = 2A \geq 3B + 2.$$

ゆえに

$$2\Delta \geq B.$$

$r_0 = r-2, q_0 = q-2$ とおくと $r_0q_0 = B - 2\Delta + 4 \leq 4.$

r_0, q_0 はともに奇数なので $r_0q_0 \leq 3.$ $r_0 = 1, q_0 = 3.$ ゆえに $r = 3, q = 5.$ $r \geq 5$ に反する.

9 伏字 $tprq$ 形を解く

$10rq$ 形, $2prq$ 形, $tprq$ 形 と順序を踏んで証明する.

命題 3 $a = tprq, (t < p < r < q)$ が $\sigma(a) = 2a+4$ の解なら $a = 4030 = 2*5*13*31$, $a = 5830 = 2*5*11*53.$

9.1 伏字 $10rq$ 形を解く

$a = 4030 = 2*5*13*31$, $a = 5830 = 2*5*11*53$ を伏せ字で解く. すなわち $a = tpqr, (t < p < r < q:$ 素数) として, 解くのだが, 一般には難しそうなので最初は $10rq$ 形として r, q を求める.

I) $a = 10rq$ のとき

$\sigma(a) = \sigma(10rq) = 18\widetilde{rq}, 2a+4 = 20rq+4,$ により

$A = \widetilde{rq}, B = rq, \Delta = r+q$ とおいて $\sigma(a) = 2a+4$ を整理すると $\sigma(a) = 18\widetilde{rq} = 18B + 18\Delta + 18, 2a+4 = 20B+4$ により

$$9(B + \Delta + 1) = 10B + 2.$$

$9\Delta + 7 = B$ となる.

$r_0 = r-9, q_0 = q-9$ とおくと, $r_0q_0 = rq - 9\Delta + 81 = B - 9\Delta + 81$ なので

$$r_0q_0 = 88$$

r_0, q_0 は偶数なので, i) $r_0 = 2, q_0 = 44,$ii) $r_0 = 4, q_0 = 22.$

i) のとき $r = 11, q = 44+9 = 53.$ よって $a = 10*11*53.$

ii) のとき $r = 13, q = 22+9 = 31.$ よって $a = 10*rq = 10*13*31.$

因数分解が 2 通りあり, そのどちらからも r, q が素数になり 2 つの解ができた. これは奇跡的なことと言ってよいだろう.

II) $a = 2prq, (2 < p < r < q)$ のとき

$\sigma(a) = 3\widetilde{p}\widetilde{q}\widetilde{r}, 2a+4 = 2prq+4,$ により $A = \widetilde{r}\widetilde{q}, B = rq, \Delta = r+q$ とおくと, $a = 2pB$. $\sigma(a) = 3(p+1)A, 2a+4 = 4pB+4$ なので $3(p+1)A = 4pB+4$ となる. 変形して $3A-4 = p(4B-3A)$.

i) $p = 3$ のとき.

$$3A - 4 = 3(4B - 3A) = 12B - 9A.$$

$12A - 4 = 12B$. これは矛盾.

$p = 5$ の場合はすでに考察した.

ii) $p \geq 7$ のとき. $r > p$ により $r \geq 11$.

$3A - 4 = p(4B - 3A) \geq 7(4B - 3A) = 28B - 21A$ によって $24A - 4 \geq 28B$.

4 で除して

$$6A - 1 \geq 7B$$

$6(B + \Delta + 1) - 1 \geq 7B$ により

$$6(\Delta + 1) - 1 \geq B.$$

$5 \geq B - 6\Delta$ と変形して $r_0 = r - 6, q_0 = q - 6$ とおくと $r_0q_0 = B - 6\Delta + 36$.

$$5 \geq B - 6\Delta = r_0q_0 - 36.$$

ゆえに

$$41 \geq r_0q_0 \geq r_0(r_0 + 2).$$

よって, $r_0 \leq 5$.

一方 , $r \geq 11; r_0 = r - 6 \geq 11 - 6 = 5$ により $r_0 = 5; r = 11$. $41 \geq r_0q_0$ に注意すると, $41/5 \geq q_0$; $8 \geq q_0 = q - 6$.

$$13 \geq q \geq r + 2 \geq 13.$$

ゆえに, $r = 11, q = 13, p = 7$. $a = 2 * 7 * 11 * 13$. $\sigma(a) = 4032, 2a + 4 = 4008$. これは解にならない.

III) $a = tprq, (t < p < r < q)$ のとき

$a = tprq$ とおき $\sigma(a) = (t+1)\widetilde{p}\widetilde{r}\widetilde{q}, 2a + 4 = tprq + 4,$ により

$A = \widetilde{p}\widetilde{r}\widetilde{q}, B = prq, \Delta = r + q$ とおく. さらに $C = \widetilde{r}\widetilde{q}, D = rq$ とおくと $A = (p+1)C, B = pD$. $C = D + \Delta + 1$.

$(t+1)A = 2tB + 4$ により,

$$t(2B - A) = A - 4.$$

$t=2$ はすでに扱ったので, $t \geq 3$ と仮定して良い.

$$A-4=t(2B-A) \geq 6B-3A.$$

よって,

$$2A \geq 3B+2.$$

$2(p+1)C \geq 3pD+2$ になり

$$2C-2 \geq p(3D-2C).$$

$p \geq 5$ によって,

$$2C-2 \geq 5(3D-2C)=15D-10C.$$

$$12C \geq 15D+2.$$

$12(D+\Delta+1) \geq 15D+2$ となるので

$$12\Delta+10 \geq 3D.$$

$10 \geq 3rq-12(r+q)=3q(r-4)-12r$ と書き直して $q \geq r+2$ によって

$$10 \geq 3(r+2)(r-4)-12r=3r^2-18r-24=3r(r-6)-24$$

.

$$0 \geq 3r^2-18r-34=3r(r-6)-34.$$

$r \geq 7$ により右辺に $r=7$ を代入すると -11. $r=11$ を代入すると 131. したがって, $r=7$.

$10 \geq 3rq-12(r+q)=3q(r-4)-12r$ に $r=7$ とするとき $10 \geq 3q(7-4)-12*7=9q-84$.

$94 \geq 9q$ より $10 \geq q$. しかし $q > r = 7$ により素数条件から $q \geq 11$ となり矛盾.

手間はかかるが証明は単純にできた. 次は 5 素因子の積の場合である.

$a=stprq, (2 \leq s < p < r < q)$ とかける解はあるか.

9.2 第2正規形

$m=-4$ のとき $N=2^{e+1}-1, D=N(N+1)-4=2^{e+1}(2^{e+1}-1)-4=4(2^{2e}-2^{e-1}-1)$.

$e=1$ なら $L=2D=8$. よって $r_0q_0=D=8$ から $r_0=2, q_0=4$ になるので $r=5, q=7; a=70$.

一方,$e>1$ のとき $L=2^{2e}-2^{e-1}-1$ は奇数になる. 因数分解式は $r_0q_0=D=4L$.

r_0, q_0 はともに偶数なので $r_0=2A, q_0=2B, AB=L$. となる. L を求めると意外にも素数が多い.

L が素数のとき. $A=1, B=L$. $r=2+N=2^{e+1}+1$ が素数なので, これはフェルマ素数.

ここは素数の持つきまぐれさが力を出しているだけだ, という言い分けをしてこれ以上は考えない.

Prolog のプログラムで 指数を与えて, L をリスト表示で与える.

```
17 ?- m4_2016(2,L).
L = [13].

18 ?- m4_2016(3,L).
L = [59].
```

L が素数のリスト.

```
19 ?- m4_2016(4,L).
L = [13, 19].

20 ?- m4_2016(5,L).
L = [19, 53].

21 ?- m4_2016(6,L).
L = [17, 239].
```

たとえば, $e=4, N=2^5-1=31$. $r_0q_0=4*13*19$.

i) $r_0=2, q_0=2*13*19$. このとき $r=r_0+31=33$. 素数ではない

ii) $r_0=26, q_0=38$. このとき $r=r_0+31=57$. 素数ではない

$e=5, N=2^6-1=63$. $r_0q_0=4*19*53$.

i) $r_0=2, q_0=2*19*53$. このとき $r=r_0+63=65$. 素数ではない.

ii) $r_0=2*19, q_0=2*53$. このとき $r=r_0+63=101$. 素数,$q=q_0+63=169=13^2$. 素数ではない.

このようにして分が悪いので, $e > 1$ のとき解がないらしい. 悪あがきになりそうだが, L を素因数分解しながら解を探してみよう.

```
22 ?- m4_2016(7,L).
L = [16319].

23 ?- m4_2016(8,L).
L = [65407].

24 ?- m4_2016(9,L).
L = [261887].

25 ?- m4_2016(10,L).
L = [1048063].

26 ?- m4_2016(11,L).
L = [4193279].
```

プログラムでの n は D 　を指す.

```
43 ?- univ_nee1(12,2,-4).
n=67100668[2,2,1531,10957]

42 ?- univ_nee1(13,2,-4).
n=268419068[2,2,47,281,5081]

40 ?- univ_nee1(14,2,-4).
n=1073709052[2,2,13,13,13,17,7187]

39 ?- univ_nee1(15,2,-4).
n=4294901756[2,2,149,307,23473]

38 ?- univ_nee1(16,2,-4).
n=17179738108[2,2,13,12911,25589]

37 ?- univ_nee1(17,2,-4).
n=68719214588[2,2,353,1361,35759]
```

10　$m = -6$ のとき

$\sigma(a) = 2a + 6$ を満たす解は次の通り.

表 5: $[P = 2, m = -6]$ 完全数

a	素因数分解
8925	$3 * 5^2 * 7 * 17$
32445	$3^2 * 5 * 7 * 103$
442365	$3 * 5 * 7 * 11 * 383$
151115727449904501489664	$2^{38} * 549755813881$

上の 3 つとも異形. これは非常に複雑で研究は困難.

よく見ると, これらには因子 $3 * 5 * 7$ がありこれらに指数 2 が付着している. 少し興味深い.

4 番目は正規形なのだが値が大きい. にもかかわらずこれがもっとも簡単な正規形.

10.1　ミヤビオビの特徴づけ

$a = 442365 = 3*5*7*11*383$ に注目しよう. $a = 3*5*7*11$ は $m = 6$ のとき出てきた. 姿かたちが美しくこれをオビと呼んだ. $m = -6$ のときオビに 383 がついてきた. 383 をみやびと読んで, $a = 3*5*7*11*383$ にニックネームとしてミヤビオビをつける. これの特徴付けは次の通りであるがきわめて不十分である.

命題 4 $a = 3*5*7*rq(r < q:$ 素数) が $\sigma(a) = 2a+6$ を満たすなら $rq = 11*383$.

Proof.

$a = 3*5*7*rq$ のとき

$$\sigma(a) = 192idetilderR\widetilde{q} = 2a + 6 = 210rq + 6.$$

$A = \widetilde{rq}, B = rq, \Delta = r + q$ とおく.

$$192A = 210B + 6.$$

これより,$192A = 210B + 6$,$A = B + \Delta + 1$ なので

$$96(B + \Delta + 1) = 105B + 3.$$

整理して $96\Delta+93=9B$ により 3 で割って

$$32\Delta+31=3B.$$

これより

$$-\Delta+31=3(B-11\Delta).$$

ここで, $r=11$ とすると $q=383$ となることを確認する.

$r_0=r-11, q_0=q-11$ とおき, $B_0=r_0q_0, \Delta_0=r_0+q_0$ を使う.

$$B_0=B-11\Delta+121$$

を前式に代入して

$$-\Delta+31=3(B_0-121).$$

整理して

$$372=3B_0+\Delta_0.$$

元に戻して

$$372=3r_0q_0+r_0+q_0.$$

q_0 でまとめて $q_0\geq r_0+2$ により

$$372=q_0(3r_0+1)+r_0\geq(r_0+2)(3r_0+1)+r_0=3r_0^2+8r_0+2=r_0(3r_0+8)+2.$$

$r_0=10$ では上の不等式は成り立たない. これより $r_0<10$. ゆえに $r<21$. r は 11 より大きい素数なので, $r=11,13,17,19$. したがって, $r_0=0,2,5,7$.

$r_0=0$ なら $q_0=372, q=q_0+11=383$. したがって $a=3*5*7*11*393$.

$r_0=2,5,7$ のときは q_0 は整数にすらならない.

11　$m=-8$ のとき

これらの解は正規形と, 第 2 正規形な 2^erq とさらに形が複雑な $2^er_1r_2q$ 形になっている.

a の末尾 1 桁の数は 6,8.(完全数に似ている)

$e\equiv 0 \mod 4$ のとき $q\equiv 3 \mod 10, a\equiv 8 \mod 10$,

$e\equiv 2 \mod 4$ のとき $q\equiv 9 \mod 10, a\equiv 6 \mod 10$.

第 2 正規形を求めるアルゴリズムによって,2^erq の解を求めたところ意外に多かった.

表 6: $[P=2, m=-8]$ 完全数

a	素因数分解
56	$2^3 * 7$
368	$2^4 * 23$
836	$2^2 * 11 * 19$
11096	$2^3 * 19 * 73$
17816	$2^3 * 17 * 131$
45356	$2^2 * 17 * 23 * 29$
77744	$2^4 * 43 * 113$
91388	$2^2 * 11 * 31 * 67$
128768	$2^8 * 503$

表 7: $m=-8$ 正規形のみ

a	素因数分解
56	$2^3 * 7$
368	$2^4 * 23$
128768	$2^8 * 503$
2087936	$2^{10} * 2039$
8589344768	$2^{16} * 131063$
2199013818368	$2^{20} * 2097143$
36893488108764397568	$2^{32} * 8589934583$

```
24 ?- univ_nee1(2,2,-8).
D=48[2,2,2,2,3]
836     $a=2^2*11*19$

N=7,D=48=.r_0=4,q_0=12;r=4+7=11,q=12+7=19

25 ?- univ_nee1(3,2,-8).
D=232[2,2,2,29]
17816   $a=2^3*17*131$
11096   $a=2^3*19*73$

N=15,D=8*29=2*116,r_0=2,q_0=116;r=2+15=17,q=116+15=131
N=15,D=8*29=4*98,r_0=4,q_0=58;r=4+15=19,q=58+15=73
```

表 8: $[P=2, m=-8]$ $2^e rq$ 形の解

a	素因数分解
836	$2^2 * 11 * 19$
17816	$2^3 * 17 * 131$
11096	$2^3 * 19 * 73$
77744	$2^4 * 43 * 113$
2291936	$2^5 * 67 * 1069$
13174976	$2^6 * 139 * 1481$
45335936	$2^7 * 337 * 1051$
35021696	$2^7 * 419 * 653$
4856970752	$2^9 * 1171 * 8101$
1461083549696	$2^{12} * 10939 * 32609$
144141575952121856	$2^{14} * 32771 * 268460029$
933386556194816	$2^{14} * 33409 * 1705211$

```
26 ?- univ_nee1(4,2,-8).
D=984[2,2,2,3,41]
77744   $a=2^4*43*113$
```

```
27 ?- univ_nee1(5,2,-8).
D=4024[2,2,2,503]
2291936 $a=2^5*67*1069$
```

11.1　$m = -10$ のとき

表 9: $[P = 2, m = -10]$ 完全数

a	素因数分解
40	$2^3 * 5$
1696	$2^5 * 53$
518656	$2^9 * 1013$

再び正規形のみ出てきた.

表 10: $[P = 2, m = -10]$ 正規形のみ

a	素因数分解
40	$2^3 * 5$
1696	$2^5 * 53$
518656	$2^9 * 1013$
34358296576	$2^{17} * 262133$
9671406556892844141838336	$2^{41} * 4398046511093$
45671926166590716193863488749381874249132670976	$2^{77} * 302231454903657293676533$

a の末尾 1 桁の数は 6.(完全数に似ている)
$e \equiv 1 \mod 4$ のとき $q \equiv 3 \mod 10, a \equiv 6 \mod 10,$
$q = 2^{e+1} - 11, e = 4k + j$ を計算してみた.

```
1 ?-  q139(11,0,1=<5).
4=[3,7]
8=[3,167]
12=[3,3,3,3,101]
16=[3,7,79,79]
20=[3,349,2003]

2 ?- q139(11,1,1=<5).
5=[53]
9=[1013]
13=[7,2339]
17=[262133]
```

```
21=[107,39199]


3 ?- q139(11,2,1=<5).
6=[3,3,13]
10=[3,7,97]
14=[3,61,179]
18=[3,3,13,4481]
22=[3,7,173,2309]

4 ?- q139(11,3,1=<5).
7=[5,7,7]
11=[5,19,43]
15=[5,5,2621]
19=[5,7,29959]
23=[5,83,40427]
```

$e \equiv 1 \mod 4$ のとき $q = 2^{e+1} - 11$ は素数になれるが他の場合は, 3 または 5 の倍数.

12　第1完全数 6

12.1　$m = -12$ のとき

$\sigma(a) = 2a + 12$ を満たす.

表 11: $[P = 2, m = -12]$ 完全数

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$
30	$2 * 3 * 5$
42	$2 * 3 * 7$
54	$2 * 3^3$
66	$2 * 3 * 11$
78	$2 * 3 * 13$
102	$2 * 3 * 17$
114	$2 * 3 * 19$
138	$2 * 3 * 23$
174	$2 * 3 * 29$
186	$2 * 3 * 31$
222	$2 * 3 * 37$

$a = 6p, (p \neq 2, 3 :$ 素数$)$ が続くので途中略す.
$a = 6p$ を通常解という.
$a = 24 = 2^3 * 3$ と $a = 54 = 2 * 3^3$ はいわゆる擬素数解である.

表 12: $[P = 2, m = -12]$ 完全数 続き

a	素因数分解
282	$2 * 3 * 47$
304	$2^4 * 19$
318	$2 * 3 * 53$
354	$2 * 3 * 59$
366	$2 * 3 * 61$
402	$2 * 3 * 67$

ここで通常の解 $6p$ と異なる異常な解 $a = 304 = 2^4 * 19$ が出てきた. これをエイリアンという. これは正規形 $2^e q$ なので正規形としての一般の解を探す.

逆に正規形 $2^e q$ が解なら $q = 2^{e+1} - 13$ を満たす.
正規形も求めるプログラムを用いて次の解の表がえられた.

表 13: $[P = 2, m = -12; a = 2^e q]$ 完全数 続き

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$
304	$2^4 * 19$
127744	$2^8 * 499$
33501184	$2^{12} * 8179$
8589082624	$2^{16} * 131059$
10384593717069654320312270165377024	$2^{56} * 144115188075855859$

24 を除くと,

$$e \equiv 0 \mod 4, q \equiv 9 \mod 10, a \equiv 4 \mod 10$$

を満たす.

以上見たように, $a = 6p, (2 < 3 < p:$ 素数), $a = 24 = 2^3 * 3$, $a = 54 = 2 * 3^3$ 擬素数解 の他に全く異質のエイリアン解の 3 種の解がある.

この他の形もあるかもしれない.

12.2　$6r$ の特徴づけ

3 素数の積 $a = pqr, (p < q < r$: 素数$)$ が $\sigma(a) = 2a + 12$ の解となるとき $a = 6r$ を示す.

$a = pqr$ のとき

$$\sigma(a) = \widetilde{pqr}, 2a + 12 = 2pqr + 12.$$

$A = \widetilde{qr}, B = qr$ とおくと

$$(p + 1)A = 2pB + 12.$$

すると

$$p(A - 2B) = 12 - A.$$

$\Delta = q + r$ とおくとき

$$A - 2B = \widetilde{qr} - 2qr = \Delta + 1 - qr.$$

$12 - A = 12 - (qr + \Delta + 1)$ によって,

$$p(\Delta + 1 - qr) = 12 - (qr + \Delta + 1)$$

これより式を整理して

$$12 = (1 - p)qr + \Delta(p + 1) + p + 1.$$

ここで $p = 2$ と仮定する.

$$12 = -qr + 3\Delta + 3.$$

よって,

$$qr = 3\Delta - 9.$$

$q_0 = q - 3, r_0 = r - 3$ とおくと $q_0 r_0 = 0$.

$0 \le q_0 < r_0$ により $q_0 = 0; q = 3, p = 2$. r は単なる素数で 5 より大きいという条件以外の制約がない. $a = 6r$ が解.

次に $p > 2$ と仮定して矛盾を導く.

$12 = (1 - p)qr + \Delta(p + 1) + p + 1$ を p で整理すると,

$$12 = -p(qr - \Delta - 1) + qr + \Delta + 1.$$

$$p(qr - \Delta - 1) = qr + \Delta - 11.$$

$p \geq 3$ により

$$p(qr - \Delta - 1) = qr + \Delta - 11 \geq 3(qr - \Delta - 1).$$

$$0 \leq 2qr - 4\Delta + 8.$$

$q_2 = q - 2, r_2 = r - 2$ とおくとき $q_2 r_2 = qr - 2\Delta + 4$ によって

$$0 \geq qr - 2\Delta + 4 = q_2 r_2$$

なので $q_2 \leq 0$. ゆえに $q \leq 2$ となり矛盾.

12.3 解 $a = 2^e q^f$

$\sigma(a) = 2a + 12$ の解で $a = 2^e q^f, f > 1$ となるものを調べよう.
$X = 2^e, Y = q^f$ とおくとき
$\sigma(a) = (2X - 1)\dfrac{qY - 1}{\overline{q}} = 2XY + 12$ なので

$$(2X - 1)(qY - 1) = \overline{q} = 2\overline{q}XY + 12\overline{q},$$

$$2X + qY - 1 = 2XY - 12\overline{q}.$$

$12\overline{q} + 2X - 1 = Y(2X - q)$ より $2X - q > 0$.
$12\overline{q} + 2X - 1 = 12\overline{q} + 2X - q + \overline{q} = Y(2X - q)$ から

$$12\overline{q} + \overline{q} = (Y - 1)(2X - q).$$

そこで $Z = 1 + q + \cdots + q^{f-1}$ とおくとき $\dfrac{Y - 1}{\overline{q}} = Z$ なので

$$13 = Z(2X - q).$$

$Z = 1$ または $Z = 13$.

i) $Z = 1$. $2X - q = 13$ より $q = 2^{e+1} - 13$.
$e = 3$ のとき $q = 2^{e+1} - 13 = 3$. ここで $a = 2^3 * 3$. 擬素数解.
$q = 2^{e+1} - 13$ が素数になる例はいろいろある.
$e = 4$ のとき $q = 2^{e+1} - 13 = 32 - 13 = 19$ によって, $a = 2^4 * 19 = 403$ はエイリアン解.
結果として e が 4 の倍数になることがわかるがプログラムで実証してみよう.

表 14: $m = -12$

a	factor
304	$2^4 * 19$
127744	$2^8 * 499$
33501184	$2^{12} * 8179$
8589082624	$2^{16} * 131059$
10384593717069654320312270165377024	$2^{56} * 144115188075855859$

e=4k に対して

```
10 ?- q13(0,1=<5).
4=[19]
8=[499]
12=[8179]
16=[131059]
20=[11,190649]
```

このとき素数が出る.

e=1+4k に対して

```
10 ?- q13(1,1=<5).
5=[3,17]
9=[3,337]
13=[3,3,17,107]
17=[3,23,29,131]
21=[3,17,82241]
```

3 で割れる

e=2+4k に対して

```
11 ?- q13(2,1=<5).
6=[5,23]
10=[5,11,37]
14=[5,6551]
```

```
18=[5,5,67,313]
22=[5,19,88301]
```

5 で割れる

`e=3+4k` に対して

```
12 ?- q13(3,1=<5).
7=[3,3,3,3,3]
11=[3,1361]
15=[3,21841]
19=[3,3,116507]
23=[3,53,105517]
```

3 で割れる

ii) $Z = 13$. $Z = 1 + q + \cdots + q^{f-1} = 13$ によって, $f = 3, q = 3$. $2X - q = 1$ より $q = 2^{e+1} - 1$. したがって $e = 1$. $a = 2 * 3^3$ は擬素数解

13 完全数と第 2 正規形

m_0 を完全数として $a = m_0 p$ とおき (ただし $m_0 \not\equiv 0 \mod p$), $\sigma(a) - 2a$ を計算する.

$$\sigma(a) - 2a = \sigma(m_0 p) - 2m_0 p = 2m_0(p + 1) - 2m_0 p = 2m_0.$$

$\sigma(a) > 2a$ を満たす場合 a を過剰数という. $a = m_0 p$ は過剰数の解で無限にある.

m だけ平行移動した完全数の方程式は $\sigma(a) = 2a - m$. $m < 0$ の場合も考慮に入れてこの第 2 正規形解 $a = 2^e rq$ を考える.

$\sigma(a) = \sigma(2^e)\widetilde{rq}$ なので $N = 2^{e+1} - 1$ とおく t き

$$N\widetilde{rq} = (N + 1)rq - m.$$

$A = \widetilde{rq}, B = rq, \Delta = r + q$ とおくとき

$$NA = N(B + \Delta + 1) = (N + 1)B - m.$$

これより

$$B = N\Delta + N + m$$

$r_0 = r - N, q_0 = q - N$ とおくとき, $r_0 q_0 = B - N\Delta + N^2$ になりこれを代入すると

$$N + m = B - N\Delta = r_0 q_0 - N^2.$$

$D = N(N+1) + m = 2^{e+1}(2^{e+1} - 1) + m$ とおけば

$$r_0 q_0 = D.$$

r_0, q_0 は D の因子なのだが $D = 0$ となることは $m < 0$ の場合に起きうる. この場合, r_0, q_0 に特段の条件はつかない.

$D = 0$ のとき, $r_0 = 0, q_0 > r_0$ により $r = N = 2^{e+1} - 1$:素数 になるがこれはメルセンヌ素数.

m は偶数なので $2m_0 = -m$ とおけば $0 = 2^{e+1}(2^{e+1} - 1) - 2m_0$ によって

$$m_0 = 2^e(2^{e+1} - 1), r = 2^{e+1} - 1.$$

m_0 はユークリッドの完全数になる.

第 2 正規形解 $a = 2^e rq = 2^e(2^{e+1} - 1)q = m_0 q$ となりこれは通常解になる. 用語の簡易化のためにこの場合は第 2 正規形解にいれない.

14　第 2 完全数 28

14.1　$m = -56$ の場合

$28p$: (p は 2,7 以外の素数) はみな解でありこれを通常解という.

この表で $28p$ 以外の解を探すと

$a = 22 = 2^5 * 7$, $a = 1372 = 2^2 * 7^3$

がある.

この 2 つの解は予期できる解といってよい.

通常解である $2^2 * 7p$ において p が擬素数 2^3 に変身してできた $2^5 * 7$ と p が擬素数 7^2 に変身してできた $2^2 * 7^3$ があり, これらは擬素数解とみなすことができる.

擬素数解は素性の確かな変わり者である.

通常解は無限にあるのでこれらを排除した解の表を求めてみた.

これらの解は正規形 $2^e q$ および 第二正規形 $2^e rq$ である.

表 15: $m=-56$ しかし $a=2^2*7p$ 以外

a	factor
84	2^2*3*7
140	2^2*5*7
224	2^5*7
308	2^2*7*11
364	2^2*7*13
476	2^2*7*17
532	2^2*7*19
644	2^2*7*23
812	2^2*7*29
868	2^2*7*31
1036	2^2*7*37
1148	2^2*7*41
1204	2^2*7*43
1316	2^2*7*47
1372	2^2*7^3
1484	2^2*7*53
1652	2^2*7*59
1708	2^2*7*61

$\sigma(a)=2a+56$ が正規形の解 2^eq を持つなら, $q=2^{e+1}-1-56$ を満たす. 通常型の解が非常に多いので, 28 で割れない解に制限して正規形の解だけを求めた. 得た表は次の通り:

$e\equiv 1 \mod 4, q\equiv 7 \mod 10, a\equiv 4 \mod 10,$

$e\equiv 2 \mod 4, q\equiv 1 \mod 10, a\equiv 4 \mod 10,$

$e\equiv 3 \mod 4, q\equiv 9 \mod 10, a\equiv 2 \mod 10.$

2^erq ($r<q$: 素数) の解をアルゴリズムでさがしてみたら次のようになった.

表 16: $m = -56, a : 28$ で割れない解

a	factor
4544	$2^6 * 71$
9272	$2^3 * 19 * 61$
14552	$2^3 * 17 * 107$
25472	$2^7 * 199$
74992	$2^4 * 43 * 109$
495104	$2^9 * 967$
6019264	$2^6 * 163 * 577$

表 17: $m = -56$ 正規形

a	factor
224	$2^5 * 7$
4544	$2^6 * 71$
25472	$2^7 * 199$
495104	$2^9 * 967$
2145615872	$2^{15} * 65479$
137424011264	$2^{18} * 524231$
8795973484544	$2^{21} * 4194247$
36028789368553472	$2^{27} * 268435399$
38685626227417444939464704	$2^{42} * 8796093022151$
2475880078568755040589185024	$2^{45} * 70368744177607$

これらの解の数論的性質は皆目わからない.

表 18: $m = -56$, 第二正規形

a	factor
14552	$2^3 * 17 * 107$
9272	$2^3 * 19 * 61$
74992	$2^4 * 43 * 109$
35019968	$2^6 * 131 * 4177$
15317696	$2^6 * 137 * 1747$
6019264	$2^6 * 163 * 577$
53032832	$2^7 * 317 * 1307$
3365232128	$2^9 * 1277 * 5147$
26882784256	$2^{10} * 2557 * 10267$
17374747648	$2^{10} * 3691 * 4597$
125619603976192	$2^{12} * 8209 * 3736003$
12659380301824	$2^{12} * 8377 * 368947$
2306054088064335872	$2^{15} * 65539 * 1073790961$

15　第 3 完全数 496

解 $2^4 * 13p = 496p$ は通常解.
$2^2 * 3 * 241, 2^3 * 7 * 109$ は不思議な解. 第二正規形.

15.1　$[P = 2, m = -992]$ 496 で割れない場合

最後の解はすさまじい異形
$A = 10633823966279324693528348333044662272$
$B = 2^{61} * 4611686018427386911$
$C = 1141798154164767904839125879691612816790677094 4$
$D = 2^{76} * 151115727451828646837279$

$a = 15872 = 2^9 * 31$ は擬素数解
もう 1 つの擬素数解
$a = 476656 = 2^4 * 31^3$

表 19: $m = -992, 1 = a < 10000$

a	factor
1488	$2^4 * 3 * 31$
2480	$2^4 * 5 * 31$
2892	$2^2 * 3 * 241$
3472	$2^4 * 7 * 31$
5456	$2^4 * 11 * 31$
6104	$2^3 * 7 * 109$
6448	$2^4 * 13 * 31$
8432	$2^4 * 17 * 31$
9424	$2^4 * 19 * 31$

表 20: $m = -992, a = 2^e rq$

a	factor
2892	$2^2 * 3 * 241$
6104	$2^3 * 7 * 109$
170612	$2^2 * 13 * 17 * 193$
458144	$2^5 * 103 * 139$
857312	$2^5 * 73 * 367$
1006496	$2^5 * 71 * 443$
1764512	$2^5 * 67 * 823$
4041152	$2^6 * 233 * 271$
9865304	$2^3 * 17^3 * 251$

表 21: $m = -992, a = 2^e q$ 正規形

a	factor
15872	$2^9 * 31$
126083072	$2^{13} * 15391$
8524857344	$2^{16} * 130079$
2251766494134272	$2^{25} * 67107871$
144114921519448064	$2^{28} * 536869919$
162259276829204419242718052483072	$2^{53} * 18014398509480991$
A	B
C	D