書泉グランデ
高校生もわかる新しい数論研究
第2期　予稿3; 完全数の水平展開6

飯高 茂

2017 年 3 月 10 日

目 次

1　素数べきの解

$\sigma(a)=2a-m$ に素数べき p^e の解があるとしよう.
$a=p^e$, のとき
$\sigma(a)=\dfrac{p^{e+1}-1}{\overline{p}}, 2a-m=2p^e-m$ によって

$$p^{e+1}-1=(2p^e-m)(p-1)$$

を変形して

$$m\overline{p}-1=p^e(\overline{p}-1)$$

これより

$$\overline{p}(m-p^e)=1-p^e.$$

$\overline{p}$ で除して

$$p^e-m=p^{e-1}+\cdots+1.$$

これより

$$m=p^e-(p^{e-1}+\cdots+1).$$

1.1　解 p

そこで $e=1$ とすれば $m=p-1$.

例
$m=4$ とすると $p=5$.
$\sigma(a)=2a-4$ の解に $a=5$

$m=6$ とすると $p=7$.
$\sigma(a)=2a-6$ の解に $a=7$

$m=10$ とすると $p=11$.
$\sigma(a)=2a-10$ の解に $a=11$

1.2 解 p^2

$e=2$ とすれば $m=p^2-p-1$.

例
$p=3$ とすれば $m=p^2-p-1=9-4=5$.
$\sigma(a)=2a-5$ の解に $a=3^2$.

$p=5$ とすれば $m=p^2-p-1=25-6=19$.
$\sigma(a)=2a-19$ の解に $a=5^2$.

$p=7$ とすれば $m=p^2-p-1=49-8=41$.
$\sigma(a)=2a-41$ の解に $a=7^2$.

1.3 解 p^3

$e=3$ とすれば $m=p^3-p^2-p-1$.

例
$p=3$ とすれば $m=27-9-3-1=14$.
$\sigma(a)=2a-14$ の解に $a=3^3$.

1.4 解 p^4

$e=4$ とすれば $m=p^4-p^3-p^2-p-1$.

例
$p=3$ とすれば $m=81-27-9-3-1=41$.
$\sigma(a)=2a-41$ の解に $a=3^4$.

$\sigma(a)=2a-41$ の解に $a=7^2,3^4$.

2 2素数の積の解

$a=pq(p<q:$ 素数$)$ が $\sigma(a)=2a-m$ の解とする.
$\sigma(a)=\sigma(pq)=\widetilde{p}\cdot\widetilde{q}=pq+\Delta+1$ ここで $\Delta=p+q$.

$$\widetilde{p}\cdot\widetilde{q}=pq+\Delta+1=2pq-m$$

によって

$$m+2=p_0q_0$$

ここで $p_o=p-1.q_0=q-1.$

1) $m=2.\ 4=p_0q_0$ により $p_0=1,q_0=4;p=2,q=5;a=10.$

2) $m=4.\ 6=p_0q_0$ により $p_0=1,q_0=6;p=2,q=7;a=14,$ 矛盾.

3) $m=6.\ 8=p_0q_0$ により $p_0=2,q_0=4;p=3,q=5;a=15.$

4) $m=8.\ 10=p_0q_0$ により $p_0=1,q_0=10;p=2,q=11;a=22.$

5) $m=10.\ 12=p_0q_0$ により $p_0=1,q_0=12;p=2,q=13;a=26;p_0=2,q_0=6;p=3,q=7;a=21.$

6) $m=14.\ 16=p_0q_0$ により $p_0=1,q_0=16;p=2,q=17;a=34.$

7) $m=16.\ 18=p_0q_0$ により $p_0=1,q_0=18;p=2,q=19;a=38.$

8) $m=18.\ 20=p_0q_0$ により $p_0=2,q_0=10;p=3,q=11;a=33.$

9) $m=20.\ 22=p_0q_0$ により $p_0=1,q_0=22;p=2,q=23;a=46.$

10) $m=22.\ 24=p_0q_0$ により $p_0=2,q_0=12;p=3,q=13;a=39.$

3 $m > 0, m:$ 奇数の場合

次の結果は $a \leq 1000000$ についてパソコンで調べた結果である.

表 1: $[P = 2, m > 0 :]$ 奇数, 完全数

m	a	素因数分解
$m = 1$	2	2
	4	2^2
	8	2^3
	16	2^4
	32	2^5
	64	2^6
	128	2^7
	256	2^8
	512	2^9
	1024	2^{10}
	2048	2^{11}
	4096	2^{12}
	8192	2^{13}
	16384	2^{14}
	32768	2^{15}
	65536	2^{16}

$m = 1$ のとき方程式は $\sigma(a) = 2a - 1$ になりこの解は $m = 1$ のときの広義の完全数は $a = 2^e$ に限りそうなコンピュータの計算結果である.

$\sigma(a) = 2a - 1$ の解は almost perfect number (準完全数) と呼ばれているがこれは $a = 2^e$ に限るという古来からの予想があるが解決されていない.

1. $m = 1$, すなわち $\sigma(a) = 2a - 1$ の場合. $a = 2^e$ は明らかに解である. したがって解は無数にある. この他に解があるかどうかは不明.

($\sigma(a) = 2a - 1$ の解を 概完全数という. 概完全数は 2^e と書けるか? は奇数完全数の存在問題に匹敵する難問らしい.)

2. $m = 3$, すなわち $\sigma(a) = 2a - 3$ の場合. 解はないらしい.

以上からわかることは $m:$ 奇数のとき解は, ごく少ない. 解は有限個しかない. このことをいつの日かを証明したいものだ.

表 2: $[P=2, m>0:]$ 奇数, 完全数

m	a	素因数分解
$m=5$	9	3^2
$m=7$	50	$2*5^2$
$m=11$	244036	$2^2*13^2*19^2$
$m=19$	25	5^2
	2312	2^3*17^2
$m=25$	98	$2*7^2$
$m=37$	484	2^2*11^2
$m=41$	49	7^2
	81	3^4
$m=47$	225	3^2*5^2
$m=61$	2888	2^3*19^2
$m=71$	676	2^2*13^2
$m=85$	242	$2*11^2$

4 $m<0$:奇数の場合

次の結果は $a \leq 1000000$ についてパソコンで調べた結果である.

表 3: $[P=2, m<0:]$ 奇数, 完全数

$m=$	a	素因数分解
$m=-89$	13456	2^4*29^2
$m=-71$	392	2^3*7^2
$m=-65$	200	2^3*5^2
$m=-59$	968	2^3*11^2
$m=-51$	72	2^3*3^2
$m=-41$	1352	2^3*13^2
$m=-39$	162	$2*3^4$
$m=-31$	15376	2^4*31^2
$m=-19$	36	2^2*3^2
$m=-7$	196	2^2*7^2
$m=-3$	18	$2*3^2$

1. $m=-1$, すなわち $\sigma(a)-2a=1$ の場合. 解は無いと予想されている.

$\sigma(a)-2a=1$ を満たす a は pseudo perfect number と呼ばれているが実際には存在しないと思われている.

ある日, 新聞紙上で $\sigma(a)-2a=1$ を満たす a が見つかったと報道されるかもしれない. その数は疑似完全数と呼ばれている.

私は, 宇宙生物の発見より可能性が低いと思う.

2. $m=-3$ すなわち $\sigma(a)-2a=3$ の場合. $a=2*3^2$ は解. 他の解は無いと予想されている.

これらを証明することはきわめて難しい.

ここでは $s(a)=1,2$ を満たす場合に絞って証明する.

最初に簡単な場合を扱う.

a) $m=5$ のとき

1). $s(a)=1$ を仮定する.

$\sigma(a)=2a-5$ なので, $a=p^e$ とおくと

$\sigma(a)=1+p+\cdots+p^e$, $2a-5=2p^e-5$ により

$p(1+p+\cdots+p^{e-2}-p^{e-1})=-6$ によれば p は 3 で割れるから $p=3$.

$$3^{e+1}-1=2(2*3^e-5)$$

によって,

$$3^{e+1}-1=4*3^e-10.$$

ゆえに, $9=3^e$. よって $e=2, a=3^2$.

2). $s(a)=2$ を仮定し矛盾を導く.

$a=p^eq^f, p<q$:素数, として $X=p^e, Y=q^f$ とおく. さらに $\overline{p}=p-1, \overline{q}=q-1, \rho'=\overline{p}\,\overline{q}$ を使うと

$$\frac{(pX-1)(qY-1)}{\rho'}=2XY-5$$

$$(pX-1)(qY-1)-\rho'(2XY-5)=0$$

を得るがこの左辺の XY の係数を R とおくと, $R=pq-2\rho'=-(p-2)(q-2)+2$.

次の定理を使うことにより $R>0$.

よって, $p=2, R=2, \rho'=\overline{q}$.

$$2XY-(2X+qY-1)=-5\overline{q}.$$

$Y(2X-q)-2X+1=5\overline{q}$ を変形して

$$Y = \frac{2X-1-5\overline{q}}{2X-q} = \frac{2X-q-4\overline{q}}{2X-q}.$$

さらに変形して

$$Y-1 = \frac{-4\overline{q}}{2X-q}.$$

ここで場合を分ける.

i). $f=1$. $Y=q$ なので

$$Y-1 = \overline{q} = \frac{-4\overline{q}}{2X-q}.$$

$4=q-2X$, から $q=4+2X$ なので $q=2$; 矛盾.

ii). $f>1$. $Y=q^f$ なので

$$Y-1 = \overline{q}(q^{f-1}+\cdots+q+1) = \frac{-4\overline{q}}{2X-q}.$$

$4=(q-2X)(q^{f-1}+\cdots+q+1)$ から $f=2, q=3$. $q=1+2X$ なので $X=1$; 矛盾.

5 m : 奇数の場合の証明

$\sigma(a)-2a=-m$ の解で $s(a)=2$ を満たすと仮定する.

$a=p^eq^f, p<q$:素数, として $X=p^e, Y=q^f$ とおく. さらに $\overline{p}=p-1, \overline{q}=q-1, \rho'=\overline{p}\,\overline{q}$ を使うと

$$\frac{(pX-1)(qY-1)}{\rho'} = 2XY-m$$

$$(pX-1)(qY-1)-\rho'(2XY-m)=0$$

を得るがこの左辺の XY の係数を R とおくと,

$$(pX-1)(qY-1)-\rho'(2XY-m) = RXY-pX-qY+1+\rho'm=0$$

定義により

$$R = pq-2\rho' = -(p-2)(q-2)+2.$$

$R>0$ となる適当な条件を次に探そう.
$q>p\geq 3$ と仮定する.
$R=-(p-2)(q-2)+2\leq 4-q\leq -1$.

$$1+\rho' m=-RXY+pX+qY-1\geq XY+pX+qY-1.$$

これより $m<0$ は成り立たない.
不等式にして

$$mpq>m\rho'\geq XY+pX+qY-2.$$

相加・相乗平均により

$$pX+qY\geq 2\sqrt{pqXY}.$$

一方, $e=1$ なら $\sigma(X)=\sigma p=1+p$:偶数. このとき $\sigma(a)-2a$ は偶数.
m : 奇数 を仮定しているので $e\geq 2$. 同様に $f\geq 2$.
それゆえ $X\geq p^2, Y\geq q^2$ により

$$2+mpq>XY+pX+qY\geq p^2q^2+2\sqrt{p^3q^3}=pq(pq+2\sqrt{pq}).$$

$$2>pq(pq+2\sqrt{pq}-m).$$

$q>p\geq 3$ で評価すると,

$$2>pq+2\sqrt{pq}-m\geq 15+2\sqrt{15}-m>22-m.$$

これによって, $m>20$ になる.
$m\leq 20$ のとき矛盾する. よって $m\leq 20$ のとき $p=2, R=2$.
m が最小になる場合は $a=3^2*5^2$.
このとき計算すると $m=47$. したがって,
以上をまとめて定理とする.

定理 1 *1.* $m<1$ なら $p=2, R=2$.

2. m : 奇数なら $m<20$ のとき $p=2, R=2$.

以上の評価はかなり甘い. いくらでも精密化できるだろう.
m が最小になる場合は $a=3^2*5^2$.
このとき計算すると $m=47$. したがって, $m<47$ で定理は成立する.

6 $p = 2, R = 2$

$p = 2$ とすると $\rho' = \overline{q}, R = 2$ となり 基本方程式は

$$-2XY + 2X + qY - 1 = m\overline{q}.$$

これより

$$Y(q-2X) + 2X - 1 = Y(q-2X) + 2X - q - 1 + q = (q-2X)(Y-1) + \overline{q} = m\overline{q}.$$

$$Y - 1 = \frac{\overline{qm}}{q-2X}.$$

したがって $\overline{q}$ で割れば

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{m-1}{q-2X}.$$

$q - 2X$ は $\overline{m}$ の約数になる.

7　m:奇数で正の場合

7.1　$m = 5$

このとき $a = p^e$ の形の解があり $a = 3^2$.

7.2　$m = 7$

このとき $a = p^e$ の形の解はない.
$s(a) = 2$ とする.
$m = 7 < 21$ によって,

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{6}{q - 2X}.$$

i. $q - 2X = 1$ $q^{f-1} + \cdots + q + 1 = 6$. によれば $q = 5, f = 2$.
$q - 2X = 5 - 2X = 1$ より $X = 2$. よって $a = 2 * 5^2$.

7.3　$m = 19$

このとき $a = p^e$ の形の解があり $a = 5^2$.
$s(a) = 2$ とする.
$m = 19 < 21$ によって,

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{18}{q - 2X}.$$

$f = 1$ ならば $q - 2X = 18$. q : 偶数となり矛盾.
$\dfrac{18}{q - 2X} \geq 1 + q \geq 4$ によって,
i. $q - 2X = 3$.
$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = 6$ によって, $f = 2, q = 5$. $q - 2X = 3; X = 1$ となり矛盾.
ii. $q - 2X = 1$.
$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = 18$ によって, $f = 2, q = 17$. $q - 2X = 1; X = 8$. $a = 2^3 * 17^2$.

7.4　$m = 37$

このとき $a = p^e$ の形の解があり $a = 5^2$.
$s(a) = 2, p = 2$ とする.

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{36}{q - 2X}.$$

$f=1$ ならば $q-2X=36$. q : 偶数となり矛盾.

$\dfrac{36}{q-2X}\geq 1+q\geq 4$ によって,

i. $q-2X=3$.

$q^{f-1}+\cdots+q+1=12$ によって, $f=2, q=11$. $q-2X=3; X=4$ となり $a=2^2*11^2$.

ii. $q-2X=1$.

$q^{f-1}+\cdots+q+1=36$ によって, $f=2, q=35$ 矛盾.

8　m 奇数で負の場合

8.1　$m=-3$

$m<0$ のとき条件は自動的に満たされ, $p=2, R=2$.

$$q^{f-1}+\cdots+q+1=\frac{-3-1}{q-2X}=\frac{4}{2X-q}.$$

i. $2X-q=1$. $q+1=4, f=2$ により, $2X=q+1=4.X=2, a=2*3^2$.

ii. $2X-q>1$ は起きない.

8.2　$m=-7$

$p=2, R=2$.

$$q^{f-1}+\cdots+q+1=\frac{-7-1}{q-2X}=\frac{8}{2X-q}.$$

i. $2X-q=1$. $q+1=8, q=7, f=2$ により, $2X=q+1=8.X=4, a=2^2*7^2$.

ii. $2X-q>1$ は起きない.

8.3　$m=-17$

$p=2, R=2$.

$$q^{f-1}+\cdots+q+1=\frac{18}{2X-q}.$$

i. $2X-q=3$. $q+1=6, q=5, f=2$ により, $2X-q=3.X=4, a=2^2*5^2$.

ii. $2X-q=1,2$ は起きない.

8.4 $m = -31$

$p = 2, R = 2.$

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{-31 - 1}{q - 2X} = \frac{32}{2X - q}.$$

i. $2X - q = 1$. $q + 1 = 32, q = 31, f = 2$ により, $2X = q + 1 = 32. X = 16 = 2^4, a = 2^4 * 31^2$.

ii. $2X - q = 2, 4, 8$ は起きない.

8.5 $m = -39$

$m < 0$ のとき条件は自動的に満たされ, $p = 2, R = 2$.

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{40}{2X - q}.$$

i. $2X - q = 1$. $q^3 + q^2 + q + 1 = 40, q = 3, f = 4$ により, $2X = q + 1 = 4. X = 2, a = 2 * 3^4$.

8.6 $m = -41$

$m < 0$ のとき条件は自動的に満たされ, $p = 2, R = 2$.

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{42}{2X - q}.$$

i. $2X - q = 3$. $q + 1 = 14, q = 13, f = 2$ により, $2X = q + 3 = 16; a = 2^3 * 13^2$

ii. $2X - q = 7$. $q^{f-1} + \cdots + q + 1 = 6$ なので $f = 2, q = 5$. $2X - q = 7$ によれば $X = 1$; 矛盾

9 完全数の水平展開の非正規編

表 4: 非正規

a	factor	$\sigma(a)$	m
60	$[2^2, 3, 5]$	168	-48
490	$[2, 5, 7^2]$	1026	-46
350	$[2, 5^2, 7]$	744	-44
1352	$[2^3, 13^2]$	2745	-41
162	$[2, 3^4]$	363	-39
572	$[2^2, 11, 13]$	1176	-32
945	$[3^3, 5, 7]$	1920	-30
36	$[2^2, 3^2]$	91	-19
100	$[2^2, 5^2]$	217	-17
550	$[2, 5^2, 11]$	1116	-16
748	$[2^2, 11, 17]$	1512	-16

表 5: 非正規

a	factor	$\sigma(a)$	m
30	$[2, 3, 5]$	72	-12
42	$[2, 3, 7]$	96	-12
54	$[2, 3^3]$	120	-12
$6p$	$[2, 3, p]$	$12(p+1)$	-12
836	$[2^2, 11, 19]$	1680	-8
196	$[2^2, 7^2]$	399	-7
70	$[2, 5, 7]$	144	-4
18	$[2, 3^2]$	39	-3
650	$[2, 5^2, 13]$	1302	-2
2	$[2]$	3	1
2^e	$[2^e]$	$2^{e+1}-1$	1
3	$[3]$	4	2
5	$[5]$	6	4
110	$[2, 5, 11]$	216	4
884	$[2^2, 13, 17]$	1764	4

表 6: 非正規

a	factor	$\sigma(a)$	m
9	$[3^2]$	13	5
7	$[7]$	8	6
15	$[3, 5]$	24	6
315	$[3^2, 5, 7]$	624	6
1155	$[3, 5, 7, 11]$	2304	6
50	$[2, 5^2]$	93	7
130	$[2, 5, 13]$	252	8
1012	$[2^2, 11, 23]$	2016	8
11	$[11]$	12	10
21	$[3, 7]$	32	10
13	$[13]$	14	12
45	$[3^2, 5]$	78	12
27	$[3^3]$	40	14
17	$[17]$	18	16
170	$[2, 5, 17]$	324	16
988	$[2^2, 13, 19]$	1960	16

表 7: 非正規

a	factor	$\sigma(a)$	m
19	$[19]$	20	18
33	$[3, 11]$	48	18
105	$[3, 5, 7]$	192	18
25	$[5^2]$	31	19
154	$[2, 7, 11]$	288	20
190	$[2, 5, 19]$	360	20
23	$[23]$	24	22
35	$[5, 7]$	48	22
39	$[3, 13]$	56	22
63	$[3^2, 7]$	104	22
98	$[2, 7^2]$	171	25
75	$[3, 5^2]$	124	26
850	$[2, 5^2, 17]$	1674	26
1210	$[2, 5, 11^2]$	2394	26
29	$[29]$	30	28
230	$[2, 5, 23]$	432	28
182	$[2, 7, 13]$	336	28

表 8: 非正規

a	factor	$\sigma(a)$	m
31	$[31]$	32	30
51	$[3, 17]$	72	30
135	$[3^3, 5]$	240	30
250	$[2, 5^3]$	468	32
1276	$[2^2, 11, 29]$	2520	32
57	$[3, 19]$	80	34
37	$[37]$	38	36
484	$[2^2, 11^2]$	931	37
55	$[5, 11]$	72	38
424	$[2^3, 53]$	810	38
41	$[41]$	42	40
290	$[2, 5, 29]$	540	40
1196	$[2^2, 13, 23]$	2352	40
1364	$[2^2, 11, 31]$	2688	40

表 9: 非正規

a	factor	$\sigma(a)$	m
49	$[7^2]$	57	41
81	$[3^4]$	121	41
43	$[43]$	44	42
69	$[3, 23]$	96	42
99	$[3^2, 11]$	156	42
165	$[3, 5, 11]$	288	42
1365	$[3, 5, 7, 13]$	2688	42
238	$[2, 7, 17]$	432	44
310	$[2, 5, 31]$	576	44
47	$[47]$	48	46
65	$[5, 13]$	84	46
225	$[3^2, 5^2]$	403	47