書泉グランデ
高校生もわかる新しい数論研究
第3期　予稿1; 多重完全数と劣完全数

飯高 茂

2017 年 5 月 12 日

目 次

1 多重完全数

ユークリッドの完全数は $\sigma(a)=2a$ を満たす数として定義される. $2a$ の代わりに $3a$ にしたらどうなるか? という疑問は昔から提起されてきた.

1.1 120 の特徴付け (伏字問題)

たとえば $a=120$ は $\sigma(a)=3a$ を満たす. 実際,

$$a=120=2^3*3*5, \sigma(a)=(2^4-1)*4*6=3*5*4*6=3a.$$

120 の特徴付けをしてみよう.

120 の の素因数分解の型にならって $a=P^erq(P<r<q$:素数, とし $\sigma(a)=3a$ を満たすとき a を求める. このような問いを伏字問題という.

補題 1 *$a=P^erq(P<r<q$:素数$)$ が $\sigma(a)=3a$ を満たすとき $P=2, a=120$.*

Proof. $P=2$ のとき,

$N=2^{e+1}-1, \widetilde{q}=q+1, \widetilde{r}=r+1$ を使うと

$$\sigma(a)=N\widetilde{qr}, 3a=3\times 2^eqr$$

$\sigma(a)=3a$ によれば, $N\widetilde{qr}=3\times 2^eqr$. 2 倍して

$$2N\widetilde{qr}=3\times 2^{e+1}qr=3(N+1)qr.$$

$A=\widetilde{qr}, B=qr, \Delta=q+r$ を用いて $A=B+\Delta+1$ に留意すると,

$$2NA=3(N+1)B, 2NA=2N(B+\Delta+1).$$

これより,

$$2N(\Delta+1)=(N+3)B.$$

$2>\frac{2N}{N+3}=\frac{B}{1+\Delta}$ によって

$$2(1+\Delta)>B.$$

$q_0=q-2, r_0=r-2$ とおけば $q_0r_0=B-2\Delta+4.$

$$2(1+\Delta)>B=q_0r_0+2\Delta-4.$$

これより, $6>q_0r_0.$

$r_0\geq 2$ なら,$r_0\geq 3.$ したがって, $6>q_0r_0\geq 3q_0.$ これは矛盾.

$r_0=1$ になる. そこで $r=3, q_0=q-2\leq 5.$

$q_0=5$ のとき, $q=7, B=21, \Delta=10.$

$\dfrac{2N}{N+3}=\dfrac{B}{1+\Delta}=\dfrac{21}{11}$ によれば $22N=21N+63.$

これより $N=63.2^{e+1}-1=N=63.$ したがって, $2^{e+1}=64=2^6.$ よって, $e=5, r=3, q=7.$ ゆえに $a=2^5\cdot 3\cdot 7=672.$

$q_0=3$ のとき, $q=5, B=15, \Delta=8.$

$\dfrac{2N}{N+3}=\dfrac{B}{1+\Delta}=\dfrac{5}{3}$ によれば $6N=5N+15.$

よって $2^{e+1}-1=N=15$ によれば $2^{e+1}=16=2^4.$ $e=3, r=3, q=5.$ したがって, $a=2^3\cdot 3\cdot 5=120.$

$P\geq 3.$ このとき矛盾を導く.

$a=P^erq$ とおいて $N=P^{e+1}-1, \widetilde{q}=q+1, \widetilde{r}=r+1$ を使うと

$$\overline{P}\sigma(a)=N\widetilde{q}\widetilde{r}=3\overline{P}\times P^eqr$$

P 倍して

$$PN\widetilde{q}\widetilde{r}=3\overline{P}P^{e+1}qr=3\overline{P}(N+1)qr$$

$A=\widetilde{q}\widetilde{r}, B=qr, \Delta=q+r$ を用いて $A=B+\Delta+1$ に留意すると,

$$PNA=3\overline{P}(N+1)B.$$

$$1+\frac{1+\Delta}{B}=\frac{A}{B}=\frac{3\overline{P}(N+1)}{PN}.$$

よって,

$$1 > \frac{1+\Delta}{B} = \frac{3\overline{P}(N+1)}{PN} - 1 = \frac{3\overline{P}(N+1) - PN}{PN}.$$

式を変形して

$$PN > 3\overline{P}(N+1) - PN.$$

ゆえに

$$2PN > 3(PN + P - N - 1) = 3PN + 3P - 3N - 3.$$

P でまとめると $P \geq 3$　なので

$$3N + 3 > P(N+3) \geq 3N + 3.$$

めでたく矛盾した.

これは小品. しかし絶品.

1.2　多重完全数のクラス

一般に $\sigma(a) = ka$ を満たす数を $k-$ 完全数 (k を abundancy または class と呼ぶ) といい, これらを総称して多重完全数 (multiply perfect numbers), または倍積完全数という. 興味ある例が次第に知られるようになったが完全数の場合のオイラーの定理のような美しい結果はない. 完全数と比べると多重完全数の研究にはさらなる困難があるようだ.

表 1: $[P = 2, k = 3]$ 多重完全数 (Wolfram MathWorld より)

a	素因数分解
120	$2^3 * 3 * 5$
672	$2^5 * 3 * 7$
523776	$2^9 * 3 * 11 * 31$
459818240	$2^8 * 5 * 7 * 19 * 37 * 73$
1476304896	$2^{13} * 3 * 11 * 43 * 127$
51001180160	$2^{14} * 5 * 7 * 19 * 31 * 151$

この場合は 6 個しかないという予想がある.

奇数完全数 n が仮にあったとして $a = 2n$ とおく.

$$\sigma(a) = \sigma(2)\sigma(n) = 3 \times 2n = 6n = 3a$$

したがって, a はクラス 3 の多重完全数なのである. 奇数完全数 n の非存在は確定していないがあれば $n > 10^{1500}$ という結果があるそうだ.

ここでデカルトが出てきた.

表 2: $[P=2,k=4]$ 多重完全数 ,36 個発見された

a	素因数分解
30240	2^5*3^3*5*7 (デカルト 1638)
32760	$2^3*3^2*5*7*13$
2178540	$2^2*3^2*5*7^2*13*19$
23569920	$2^9*3^3*5*11*31$

表 3: $[P=2,k=5]$ 多重完全数, 65 個発見された

a	素因数分解
14182439040	$2^7*3^4*5*7*11^2*17*19$ (デカルト 1638)
31998395520	$2^7*3^5*5*7^2*13*17*19$

表 4: $[P=2,k=6]$ 多重完全数 ,(カーマイケル 1907)

a	素因数分解
154345556085770649600	$2^{15}*3^5*5^2*7^2*11*13*17*19*31*43*257$

完全数の一般化と同じ考えで, きわめて安易であるが底の素数 P を固定して $(P-1)\sigma(a)=ka$ を満たす数を 底 P の場合の $k-$ 完全数という.

表 5: $[P=3,k=5]$ 多重完全数 $(2\sigma(a)=5a)$

a	素因数分解
24	2^3*3

これだけかどうかわからないが少しでもわかればいい.

$2\sigma(a)=5a$ を満たす　a を決めたい. これは偶数なので, $a=2^eL, L:$ 奇数, と表す.$N=2^{e+1}-1$ を用いると $\sigma(a)=N\sigma(L)$. $5a=5(N+1)L/2$ によって,

$$4N\sigma(L)=5(N+1)L.$$

$N(4\sigma(L)-5L)=5L$ をえるがここで手詰まり.

$L:$ 素数を仮定する.

$N(4(L+1)-5L)=5L$ になり $L=\frac{4N}{5+N}<4$.

L : 奇素数なので, $L = 3, N = 15.e = 3$ となって, $a = 24 = 2^3 * 3$.

表 6: $[P = 3, k = 7]$ 多重完全数 $2\sigma(a) = 7a$

a	素因数分解
30240	$2^5 * 3^3 * 5 * 7$
32760	$2^3 * 3^2 * 5 * 7 * 13$
2178540	$2^2 * 3^2 * 5 * 7^2 * 13 * 19$

やはり多重完全数の素因子は小さい.
$[P = 3, k = 11, 13, 17]$ のとき $a < 3 \times 10^6$ の範囲で解がない.

表 7: $[P = 4, k = 7]$ 多重完全数 $3\sigma(a) = 7a$

a	素因数分解
12	$2^2 * 3$
234	$2 * 3^2 * 13$

表 8: $[P = 4, k = 10]$ 多重完全数 $3\sigma(a) = 10a$

a	素因数分解
1080	$2^3 * 3^3 * 5$
6048	$2^5 * 3^3 * 7$
6552	$2^3 * 3^2 * 7 * 13$
435708	$2^2 * 3^2 * 7^2 * 13 * 19$

P は素数でやりたい. 4 を P に使うのは違反行為だが解が多くでてきたので止められない.

表 9: $[P=4,k=11]$ 多重完全数 $3\sigma(a)=11a$

a	素因数分解
35640	2^3*3^4*5*11
199584	2^5*3^4*7*11
2142720	2^9*3^3*5*31

表 10: $[P=5,k=7]$ 多重完全数 $4\sigma(a)=7a$

a	素因数分解
28	2^2*7

2 底 P, 平行移動 m の多重完全数

底 P で多重完全数を定義すると解がないことが多い. これでは問題設定に問題あり, と言われかねない.

パラメータ k を取り替えて解を探したところ,

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa=-m$$

の場合は解が多い.

その上 $P=2$ とすると方程式は $2\sigma(a)-2a=-m$ になりユークリッドの完全数の平行移動の場合になっている.

そこで新たに別種の完全数を導入しよう.

3　底 P, 平行移動 m の劣完全数

$q = P^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $a = P^e q$ を底 P, 平行移動 m の狭義の劣完全数 (subperfect number) といい, このときの q を劣素数 (subprime number) という.

劣素数は素数である.

ここで劣完全数の方程式の導入を行う.

劣完全数 $a = P^e q$ について

$$\overline{P}\sigma(a) = \overline{P}\sigma(P^e q) = (P^{e+1} - 1)(q + 1) = Pa - (q + 1 - P^e)$$

$q = P^{e+1} - 1 + m$ によれば $q + 1 - P^e = m$ なので

$$\overline{P}\sigma(a) = Pa - m.$$

究極の完全数の場合と比べて簡明な式になった. この方程式の解を底 P, 平行移動 m の広義の劣完全数 (subperfect number with translation parameter m) というのである.

広義の劣完全数を簡単に劣完全数という.

$P > 2$ なら, $m = 0$ のとき $P^{e+1} - 1 + m$　は素数にならない. これを克服するために $\sigma(P^e)$ を使うことになり $q = \sigma(P^e) - 1 + m$ が素数のとき $a = P^e q$ を究極の完全数が定義された.

しかし, m によっては $P^{e+1} - 1 + m$ は素数なのでこのようにしても一向構わない.

3.1　正規形の劣完全数

$a = P^f Q (Q : \text{素数})$ と書ける解を正規形の劣完全数という.

このとき $\overline{P}\sigma(a) = (P^{f+1} - 1)(Q + 1) = Pa + P^{f+1} - (Q + 1)$ になり

$$-m = \overline{P}\sigma(a) - Pa = P^{f+1} - (Q + 1).$$

これより $Q = P^{f+1} + m - 1$.

これは底 P, 平行移動 m の狭義の劣完全数のときの劣素数である.

3.2　$P = 3$, 平行移動 $m = 3$ の劣完全数

狭義の劣完全数の場合には $P = 3$ のとき $Q = 3^{e+1} - 1 + m$ が素数となる. だから m は奇数になる. しかし $m = 1, 7, 10$ の場合 Q は素数にならない.

そこで 広義の劣完全数の場合 $m = 3$ について調べる.

5 を除くと, $5 * 7 * 11$ の他は, 正規形と第 2 正規形 の解ばかりである. おとなしい解があるだけだ.

表 11: $[P = 3, m = 3]$ 狭義の劣完全数, 正規形

e	a	素因数分解
1	33	$3 * 11$
2	261	$3^2 * 29$
3	2241	$3^3 * 83$
7	14353281	$3^7 * 6563$
9	1162300833	$3^9 * 59051$
13	7625600673633	$3^{13} * 4782971$
14	68630386930821	$3^{14} * 14348909$
23	26588814359145789645441	$3^{23} * 282429536483$
25	2153693963077252343529633	$3^{25} * 2541865828331$
35	A	B

$A = 750946651497972490400980615625 6961$
$B = 3^{35} * 150094635296999123$

3.3 第２種正規形の劣完全数

$a = P^f rq (r < q:$ 素数$)$ と書ける解を第２種正規形の劣完全数という.
このとき $\overline{P}\sigma(a) = (P^{f+1} - 1)(r+1)(q+1), Pa - m = P^{f+1}rq - m$ になる.
$N = P^{f+1} - 1, A = (r+1)(q+1), B = rq, \Delta = r + q$ とおくとき

$$NA = (P^{f+1} - 1)(r+1)(q+1), Pa - m = P^{f+1}rq - m = (N+1)B - m.$$

$A = B + \Delta + 1$ を代入して

$$NB + N(\Delta + 1) = P^{f+1}rq - m = (N+1)B - m.$$

これより

$$N(\Delta + 1) = B - m.$$

$q_0 = q - N, r_0 = r - N, B_0 = q_0 r_0$ とおくと
$B_0 = B - N\Delta + N^2$. これを代入し

$$N(\Delta + 1) = B - m = B_0 + N\Delta - N^2.$$

$D = N(N+1) + m$ とおけば, $B_0 = D$.

ここで話を逆転する. 与えられた f と m に対して $N = P^{f+1} - 1, D = N(N+1) + m$ として D を求めそれを因数分解して, $B_0 = D$ から　$q = q_0 + N, r = r_0 + N$ がともに素数となるものを探す. すると, $a = P^f rq$ が解になる.

4　$P=3$, 平行移動 $m=0$ の劣完全数

広義の劣完全数を与える方程式は $\overline{P}\sigma(a)=Pa$ になる．$P=2$ のときは元祖完全数になるので特段の興味があるが, ここでは $P\geq$, $m=0$ のとき解 $P=3, a=2$ になることを示す.

命題 1 $P=3, a=2$ 以外なら P:奇数, 平行移動 $m=0$ の広義の劣完全数は存在しない.

Proof.

素因数分解の一意性から, $\sigma(a)$ は P で割れるので,$\sigma(a)=P^{\varepsilon}L(L$ は P で割れない) とかける.

$$\overline{P}\sigma(a)=\overline{P}P^{\varepsilon}L=Pa.$$

これより, $a=P^{\varepsilon-1}L\overline{P}$. $N=P^{\varepsilon}-1, M=\overline{P}L$ とおけば $a=P^{\varepsilon-1}M, Pa=(N+1)M$. M は P で割れないから,

$$\sigma(a)=\sigma(M)\sigma(P^{\varepsilon-1}).$$

$$\overline{P}\sigma(a)=\sigma(M)\overline{P}\sigma(P^{\varepsilon}-1)=N\sigma(M).$$

$\overline{P}\sigma(a)=Pa$ によって,

$$N\sigma(M)=(N+1)M.$$

これより

$$\frac{N}{N+1}=\frac{M}{\sigma(M)}.$$

$\dfrac{N}{N+1}$ は既約分数なので, $M=kN, \sigma(M)=k(N+1)$ を満たす整数 k が存在する．2 つの式を引いて,

$$\sigma(M)-M=k.$$

$M=kN$ により, k も M の約数なので, $\sigma(M)=M+k$ から M : 素数,$k=1$ が出る.

$P=3, L=1$ のとき $a=2$ これ以外なら $M=\overline{P}L$ は素数ではないので矛盾.

(この証明は オイラーが偶数完全数はユークリッドの完全数なる証明と類似している)

注意. $P=2$ でも同じ論法がある程度使える．しかし

$a=2^{\varepsilon-1}L$　になり, a : 奇数とすると, $\varepsilon-1=0$. $a=L=M$, になり $\sigma(L)=2L$. ここから矛盾はでない.

5 $P \geq 3$, 平行移動 $m = P - 1$ の劣完全数

定理 1 $P \geq 3$, 平行移動 $m = \overline{P}$ の劣完全数は存在しない.

Proof.

$\overline{P}\sigma(a) - Pa = -\overline{P}$ によって, $\overline{P}(\sigma(a) + 1) = Pa$ になるので, 素因数分解の一意性から, $\sigma(a) + 1 = P^{\varepsilon}L$ (L は P で割れない) と書けるので,

$\overline{P}P^{\varepsilon}L = Pa$ になり, $M = L\overline{P}, N = P^{\varepsilon} - 1$ とおくとき $Pa = P^{\varepsilon}M = (N+1)M$.

$$\sigma(a) = \sigma(M)\sigma(P^{\varepsilon-1}) = \sigma(M)\frac{P^{\varepsilon} - 1}{\overline{P}}.$$

これを変形して

$$\overline{P}\sigma(a) = \sigma(M)P^{\varepsilon} - 1 = \sigma(M)N.$$

$\overline{P}\sigma(a) + \overline{P} = Pa = (N+1)M$ によって,

$$\sigma(M)N + \overline{P} = (N+1)M.$$

1. $L \neq \overline{P}$.

$P \geq 3$ なので $M = L\overline{P}$ により, $M, L, \overline{P}, 1$ は M の相異なる約数である.

$N = P^{\varepsilon} - 1, \sigma(M) \geq M + L + \overline{P} + 1 = M + L + P$ を使うと,

$$\sigma(M)N \geq (M + L + P)N.$$

$$\begin{aligned}(N+1)M - \overline{P} &= \sigma(M)N \\ &\geq (M + L + P)N \\ &= M(N+1) - M + (L+P)N\end{aligned}$$

これより,

$$L\overline{P} - \overline{P} = M - \overline{P} \geq (L+P)N \geq L\overline{P} + PN > L\overline{P} + PN.$$

$-\overline{P} > PN$ は矛盾.

2. $L = \overline{P}$.

$\sigma(M) \geq M + L + 1 = M + L + 1$ を得るので

$$
\begin{aligned}
(N+1)M - \overline{P} &= \sigma(M)N \\
&\geq (M+L+1)N \\
&= M(N+1) - M + LN
\end{aligned}
$$

これより,

$$M - \overline{P} \geq LN > L\overline{P} = M.$$

これも矛盾.

6　$P \geq 3$, 平行移動 $m = -\overline{P}$ の劣完全数

定理 2 $P \geq 3$, 平行移動 $m = -\overline{P}$ の劣完全数は $P = 3, a = 2^2$.

Proof.

$\overline{P}\sigma(a) - Pa = \overline{P}$ によって, $\overline{P}(\sigma(a) - 1) = Pa$ になるので, 素因数分解の一意性から, $\sigma(a) - 1 = P^{\varepsilon}L$ (L は P で割れない) と書けるので,

$$\sigma(a) = \sigma(M)\sigma(P^{\varepsilon-1}) = \sigma(M)\frac{P^{\varepsilon} - 1}{\overline{P}}.$$

これを変形して

$$\overline{P}\sigma(a) = \sigma(M)(P^{\varepsilon} - 1).$$

$\overline{P}\sigma(a) - \overline{P} = Pa = (N+1)M$ によって,

$$\sigma(M)N + \overline{P} = (N+1)M.$$

1. $L \neq \overline{P}$.

$P \geq 3$ なので $M = L\overline{P}$ により, $M, L, \overline{P}, 1$ は M の相異なる約数である.

$\sigma(M) \geq M + L + \overline{P} + 1 = M + L + P$ を使うと,

$$\sigma(M)N \geq (M + L + P)N.$$

$$\begin{aligned}(N+1)M + \overline{P} &= \sigma(M)N \\ &\geq (M + L + P)N \\ &= M(N+1) - M + (L+P)N\end{aligned}$$

これより,

$$L\overline{P} + \overline{P} = M - \overline{P} \geq (L+P)N \geq L\overline{P} + PN > L\overline{P} + PN.$$

かくして得た $\overline{P} > PN \geq P\overline{P}$ は矛盾.

2. $L = \overline{P}$.

$\sigma(M) \geq M + L + 1 = M + L + 1$ を得るので

$$
\begin{aligned}
(N+1)M+\overline{P} &= \sigma(M)N \\
&\geq (M+L+1)N \\
&= M(N+1)-M+LN
\end{aligned}
$$

これより,

$$M+\overline{P} \geq LN.$$

$\varepsilon \quad \geq 2$ ならば $N=P^{\varepsilon}-1 \geq P^2-1 > PL\overline{P}$.

$$M+\overline{P} = L\overline{P}+\overline{P} \geq PL\overline{P}.$$

これは成立しない. $\varepsilon \quad =1$ により $N=\overline{P}$.

$\overline{P}=2\alpha$ とおくとき $a=M=L\overline{P}=\overline{P}^2=4\alpha^2$.

$\alpha=1$ ならば, $a=4$ ならば $\sigma(a)=7$.

$\overline{P}(\sigma(a)-1)=2*6=12$, $Pa=3*4=12$. よって $a=4$ が解.

$\alpha \geq 2$ ならば, $a=4\alpha^2$ ならば $\sigma(a) > 4\alpha^2+2\alpha^2+4\alpha+\alpha$.

$$\overline{P}\sigma(a) > 2\alpha(4\alpha^2+2\alpha^2+4\alpha+\alpha) > 4(2\alpha+1)\alpha^2+2\alpha = Pa+\overline{P}$$

よってこの場合は解がない.

6.1 $P=3$, 平行移動 $m=3$ の劣完全数

$P=3$ のとき $Q=3^{e+1}-1+m$ が素数とする.

m は奇数になる. $m=1,7,10$ の場合 Q は素数にならない.

$m=3,5,9,11$ について調べる.

5 を除くと, $5*7*11$ の他は, 正規形と第 2 正規形 の解ばかりである. おとなしい解があるだけだ.

$A=7509466514979724904009806156256961$

$B=3^{35}*150094635296999123$

正規形の場合は下 1 桁の決定ができる.

$$
\begin{aligned}
e \equiv 1 \mod 4 &\Longrightarrow Q \equiv 1, a \equiv 3 \mod 10 \\
e \equiv 3 \mod 4 &\Longrightarrow Q \equiv 3, a \equiv 3 \mod 10 \\
e \equiv 2 \mod 4 &\Longrightarrow Q \equiv 9, a \equiv 3 \mod 10
\end{aligned}
$$

表 12: $[P=3, m=3]$ 劣完全数

a	素因数分解
5	5
33	$3*11$
261	3^2*29
385	$5*7*11$
897	$3*13*23$
2241	3^3*83
26937	$3^2*41*73$
46593	$3^2*31*167$

表 13: $[P=3, m=3]$ 劣完全数, 正規形

e	a	素因数分解
1	33	$3*11$
2	261	3^2*29
3	2241	3^3*83
7	14353281	3^7*6563
9	1162300833	$3^9*59051$
13	7625600673633	$3^{13}*4782971$
14	68630386930821	$3^{14}*14348909$
23	265888143591457896454411	$3^{23}*282429536483$
25	2153693963077252343529633	$3^{25}*2541865828331$
35	A	B

表 14: $[P=3, m=3]$ 劣完全数, 第二種正規形

e	a	素因数分解
1	897	$3*13*23$
2	46593	$3^2*31*167$
2	26937	$3^2*41*73$
5	19035755649	$3^5*733*106871$
5	6519443841	$3^5*743*36109$
7	43076441601	$3^6*2399*24631$

6.2 底 $P = 3$, 平行移動 $m = 5$ の劣完全数

表 15: $[P = 3, m = 5]$ 劣完全数

a	素因数分解
7	7
39	$3 * 13$
279	$3^2 * 31$
178119	$3^5 * 733$

7 を除くと, 正規形の解ばかりである.

表 16: $[P = 3, m = 5]$ 劣完全数, 正規形

e	a	素因数分解
1	39	$3 * 13$
2	279	$3^2 * 31$
5	178119	$3^5 * 733$
8	129166407	$3^8 * 19687$
9	1162340199	$3^9 * 59053$
21	328256967436378490439	$3^{21} * 31381059613$
29	A	B

$A = 14130386091739009026274270599$
$B = 3^{29} * 205891132094653$

6.3 底 $P=3$, 平行移動 $m=9$ の劣完全数

表 17: $[P=3, m=9]$ 劣完全数

a	素因数分解
11	11
35	$5*7$
51	$3*17$
2403	3^3*89
20331	3^4*251
54723	$3*17*29*37$
68643	$3^2*29*263$
103683	$3*17*19*107$
1060803	$3^3*101*389$

11 と正規形と第 2 正規形 の解のほかに $a=54723*17*29*37$, $a=10368=3*17*19*107$ が出てきた. これらはオビの形である.

表 18: $[P=3, k=3, m=9]$ 劣完全数, 正規形

e	a	素因数分解
1	51	$3*17$
3	2403	3^3*89
4	20331	3^4*251
7	14366403	3^7*6569
12	847292860971	$3^{12}*1594331$
13	7625610239571	$3^{13}*4782977$
19	4052555162317068003	$3^{19}*3486784409$
37	A	B

$A=608266787713357712721955239746840211$
$B=3^{37}*1350851717672992097$

表 19: $[P = 3, m = 9]$ 平行移動 $m = 9$ の劣完全数, 第二種正規形

e	a	素因数分解
1	867	$3 * 17 * 17$
2	68643	$3^2 * 29 * 263$
3	5026563	$3^3 * 83 * 2243$
3	1060803	$3^3 * 101 * 389$
9	193109562812680803	$3^9 * 59069 * 166093589$

6.4 底 $P = 3$, 平行移動 $m = 11$ の劣完全数

表 20: $[P = 3, m = 11]$ 劣完全数

a	素因数分解
13	13
57	$3 * 19$
333	$3^2 * 37$
15609	$3 * 11^2 * 43$
179577	$3^5 * 739$

13 と正規形の解ばかりなり.

表 21: $[P = 3, m = 11]$ 劣完全数, 正規形

e	a	素因数分解
1	57	$3 * 19$
2	333	$3^2 * 37$
5	179577	$3^5 * 739$
7	14370777	$3^7 * 6571$
17	50031546390401337	$3^{17} * 387420499$
35	A	B

$A = 750946651497972530426216694825461 7$
$B = 3^{35} * 150094635296999131$

表 22: $[P=3,-9\leq m\leq -1]$ 劣完全数

a	素因数分解	m
28	$[2^2,7]$	-28
18	$[2,3^2]$	-24
12	$[2^2,5]$	-24
12	$[2^2,3]$	-20
153	$[3^2,17]$	-9
153	$[3^2,17]$	-9
957	$[3,11,29]$	-9
1917	$[3^3,71]$	-9
18873	$[3^4,233]$	-9
24957	$[3^2,47,59]$	-9
29637	$[3^2,37,89]$	-9
67077	$[3^2,29,257]$	-9
138237	$[3,11,59,71]$	-9
174717	$[3^5,719]$	-9
201597	$[3,11,41,149]$	-9
171	$[3^2,19]$	-7
1971	$[3^3,73]$	-7
$2q$	$[2,q]$	-6
25929	$[3^2,43,67]$	-5
15	$[3,5]$	-3
207	$[3^2,23]$	-3
1023	$[3,11,31]$	-3
2975	$[5^2,7,17]$	-3
19359	$[3^4,239]$	-3
147455	$[5,7,11,383]$	-3
1207359	$[3^3,97,461]$	-3
4	$[2^2]$	-2
21	$[3,7]$	-1
2133	$[3^3,79]$	-1
19521	$[3^4,241]$	-1
176661	$[3^5,727]$	-1

$m=-6$ のとき方程式は $2\sigma(a)-3a=6$. 明らかな解は $a=2p$.
実際に, $a=2p$ のとき $2\sigma(a)=6(p+1)=3a+6$.

定理 3 $2\sigma(a)-3a=6$ の解は $a=2p$.

Proof.

a は偶数なので $a = 2^e L, L$:奇数. となる. $N = 2^{e+1} - 1$ とおくとき $2\sigma(a) = 2N\sigma(L)$. よって,

$$4\sigma(a) - 6a = 4N\sigma(L) - 3(N+1)L = 12.$$

2 で割って,

$$N(4\sigma(L) - 3L) = 3L + 12.$$

$e = 1$ とおくとき, $N = 3, 3(4\sigma(L) - 3L) = 3L + 12$.

$$4\sigma(L) - 3L = L + 4.$$

これより,

$$\sigma(L) = L + 1.$$

$L = p$: 素数なので, $a = 2p$.

$e \geq 2$ のとき, $N \geq 2^3 - 1 = 7$.

$$7(4\sigma(L) - 3L) \leq N(4\sigma(L) - 3L) = 3L + 12.$$

$28\sigma(L) - 21L \leq 3L + 12$ によれば

$$28\sigma(L) \leq 24L + 12.$$

$\sigma(L) \geq L + 1$ を使うと

$$28L + 28 \leq 28\sigma(L) \leq 24L + 12.$$

$4L + 28 \leq 12$ を得るので, $L + 7 \leq 3$. 矛盾.

表 23: $[P = 3, 1 \leq m \leq 9]$ 劣完全数

a	素因数分解	m
27	$[3^e]$	1
33	$[3, 11]$	3
261	$[3^2, 29]$	3
385	$[5, 7, 11]$	3
897	$[3, 13, 23]$	3
2241	$[3^3, 83]$	3
26937	$[3^2, 41, 73]$	3
46593	$[3^2, 31, 167]$	3
39	$[3, 13]$	5
279	$[3^2, 31]$	5
178119	$[3^5, 733]$	5
35	$[5, 7]$	9
51	$[3, 17]$	9
2403	$[3^3, 89]$	9
20331	$[3^4, 251]$	9
54723	$[3, 17, 29, 37]$	9
68643	$[3^2, 29, 263]$	9
103683	$[3, 17, 19, 107]$	9
1060803	$[3^3, 101, 389]$	9

$m = 1$ のとき方程式は $2\sigma(a) - 3a = -1$. 明らかな解は $a = 3^e$. この他に解があるか. 底が 3 の概完全数を求めること.

$m = 7$ のとき方程式は $2\sigma(a) - 3a = -7$. 解はないのは本当か.

7　底 $P = 5$, $1 \leq m \leq 19$ の劣完全数

表 24: $[P=5, -19 \le m \le -1]$ 劣完全数

a	素因数分解	m
16585	$[5, 31, 107]$	-19
6	$[2, 3]$	-18
35	$[5, 7]$	-17
2675	$[5^2, 107]$	-17
28259	$[7, 11, 367]$	-17
55811	$[7^2, 17, 67]$	-17
75875	$[5^3, 607]$	-17
2725	$[5^2, 109]$	-15
55	$[5, 11]$	-13
65	$[5, 13]$	-11
2825	$[5^2, 113]$	-11
28721	$[7, 11, 373]$	-11
76625	$[5^3, 613]$	-11
4	$[2^2]$	-8
9	$[3^2]$	-7
85	$[5, 17]$	-7
637	$[7^2, 13]$	-7
77125	$[5^3, 617]$	-7
95	$[5, 19]$	-5
12095	$[5, 41, 59]$	-5
16895	$[5, 31, 109]$	-5
29183	$[7, 11, 379]$	-5
77375	$[5^3, 619]$	-5
2	$[2]$	-2
3	$[3]$	-1
115	$[5, 23]$	-1
29491	$[7, 11, 383]$	-1

$m=-8, -2$ は偶数でも解がある例.

定理 4 $5a - 4\sigma(a) = 8$ の解は $a = 4$.

Proof.
a は偶数なので, $a = 2^e L, L:$ 奇数, の形におく. $N = 2^{e+1}-1$ とおけば $\sigma(a) = N\sigma(L)$. 2 倍して

$$10a - 8\sigma(a) = 16$$

に代入すると

$$5(N+1)L - 8N\sigma(L) = 16$$

N でまとめると

$$N(5L - 8\sigma(L)) = -5L - 16.$$

$N(8\sigma(L) - 5L) = 5L + 16$ と書き換えてから,

$e = 1$ とおくとき, $N = 3$.

$$3(8\sigma(L) - 5L) = 24\sigma(L) - 15L = 5L + 16$$

$24\sigma(L) - 15L = 5L + 16$ より $24\sigma(L) = 20L + 16$.
$L > 1$ のとき $sigma(L) \geq L + 1$ を用いて, $20L + 16 \geq 24L + 24$. 矛盾.
$L1$ のときも矛盾.

$e \geq 2$ のとき, $N \geq 7$.

$$5L + 16 = N(8\sigma(L) - 5L) \geq 7(8\sigma(L) - 5L) = 56\sigma(L) - 35L.$$

$$40L + 16 \geq 56\sigma(L) \geq 56L.$$

これより $L = 1, N = 7, e = 2; a = 4$.

$m = -2$ のとき $a = 2$. も同様に証明できる.
$m = 1$ は概完全数 5^e, [7, 11].
m : 偶数の解はない.

8 乗数つきの劣完全数

$q = P^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $a = P^e q$ を底 P, 平行移動 m の狭義の劣完全数 (subperfect number) といったが, このときさらに, P や q の倍数ではない素数 $\rho < q$ をとり $\alpha = \rho P^e q$ を乗数 ρ を持つ狭義の劣完全数という.

ここで方程式の導入を行う. 素数 ρ に対し劣完全数 $a = P^e q$ について ($\rho < q, \neq P$ を仮定)

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = \overline{P}(\rho+1)\sigma(P^e q) = (\rho+1)(P^{e+1}-1)(q+1)$$

さらに $-m = P^{e+1} - 1 - q$ に留意して式を変形する.

$$\begin{aligned}
\overline{P}\sigma(\alpha) &= (\rho+1)(P^{e+1}-1)(q+1) \\
&= (\rho+1)(qP^{e+1} + P^{e+1} - 1 - q) \\
&= \rho(qP^{e+1} + P^{e+1} - 1 - q) + P^{e+1} + P^{e+1} - 1 - q \\
&= P\alpha - m\rho + qP^{e+1} + P^{e+1} - 1 - q \\
&= P\alpha - m\rho + P\alpha/\rho - m. \\
&= P\alpha - P\alpha/\rho - m(1+\rho).
\end{aligned}$$

よって

$$\rho\overline{P}\sigma(\alpha) - P(\rho+1)\alpha = -m\rho(\rho+1). \tag{1}$$

これを乗数 ρ を持つ劣完全数の方程式という. この解 α を乗数 ρ を持つ, 底 P, 平行移動 m の広義の (I 型) 劣完全数 (subperfect number with multiplyer ρ) という. 広義の劣完全数を簡単に劣完全数という.

これを求める wxmaxima での program は次の通り.

```
subperfect_k(P,m,k,aa,bb):= for a:aa thru bb
do(Y: k*(P-1)*divsum(a)-(k*P+P)*a+m*k*(k+1),
if Y=0 then display(factor(a)) else 1=1);
```

8.1 $P = 2$ のとき

乗数 ρ を持つ劣完全数の方程式は少し簡単になって,

$$\rho\sigma(\alpha) - 2(\rho + 1)\alpha = -m\rho(1 + \rho).$$

$m = 0$ のときは乗数がなければ完全数であるが, $\rho = 3, 5$ の場合の結果をみて見よう.

$m = 0$ のとき

$$\rho\sigma(\alpha) - 2\alpha(\rho + 1) = 0.$$

さらに $\rho = 3$ のとき

$$3\sigma(\alpha) - 8\alpha = 0$$

この解は 完全数 n の 3 倍が出てくる. $n = 6$ は $\rho = 3$ と干渉してどこかに消えた.

完全数の 3 倍という調和の世界に闖入者 $2 * 3^3 * 5, 2 * 3^2 * 7 * 13$ があった.

さらに $\rho = 5$ のとき

$$5\sigma(\alpha) - 12\alpha = 0.$$

比較するための完全数数の表

8.2 $[P = 2, m = 10]$ 乗数つき劣完全数

8.3 $[P = 2, m = 12]$ 乗数つき劣完全数

8.4 $[P=2, m=-3]$ 乗数つき劣完全数

8.5 $[P=2, m=-6]$ 乗数つき劣完全数

8.6 $[P = 2, m = -8]$ 乗数つき劣完全数

8.7 $[P = 2, m = -12]$ 乗数つき劣完全数

9 乗数 k を持つ, 底 P, 平行移動 m の劣完全数の第二形

$q=P^{e+1}-1+m$ が素数のとき $a=P^eq$ を底 P, 平行移動 m の狭義の劣完全数 (subperfect number) といったが, このときさらに, P や q の倍数ではない素数 k をとり $a=\rho P^eq$ を乗数 ρ を持つ狭義の劣完全数というのだがそれから導かれる方程式が実はいろいろある..

ここで方程式の導入を行う. 素数 k に対し劣完全数 $a=P^eq$ について

$$\overline{P}\sigma(a)=\overline{P}(k+1)\sigma(P^eq)=(k+1)(P^{e+1}-1)(q+1)$$

さらに $q-m=P^{e+1}-1$ に留意して式を変形する.

$$\begin{aligned}\overline{P}\sigma(a)&=(k+1)(P^{e+1}-1)(q+1)\\&=(k+1)(P^{e+1}q+P^{e+1}-q-1)\\&=(k+1)(P^{e+1}q-m)\\&=(k+1)P^{e+1}q-m(k+1)\\&=Pa+P^{e+1}q-m(k+1)\\&=Pa+q(q-m+1)-m(k+1)\end{aligned}$$

よって

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa=q(q-m+1)-m(k+1). \tag{2}$$

これを乗数 k を持つ劣完全数の方程式第二形という. この解 a を乗数 k を持つ, 底 P, 平行移動 m の第二形の劣完全数. 簡単に, 乗数 k を持つ第二形の劣完全数という.

これを求める wxmaxima での program は次の通り.

```
subperfect_k_2(P,m,k,aa,bb):= for a:aa thru bb
do(q:maxpp(a),Y:(P-1)*divsum(a)-P*a-q*(q-m+1)+m*(k+1),
if Y=0 then display(factor(a)) else 1=1);
```

$P=3,m=3,k=7$ のとき

$$2\sigma(a)-3a=q(q-2)-24.$$

この解は次のとおり.

```
factor(231)=3*7*11
factor(1827)=3^2*7*29
factor(2275)=5^2*7*13
factor(15687)=3^3*7*83
```

10 booster k^f 付き, 底 P, 平行移動 m の オイラー φ 完全数

はじめに, booster k^f 付き, 底 P, 平行移動 m の 狭義の オイラー φ 完全数の定義を述べる.

k は素数である. $q=\varphi(P^e)k^{f-1}+1+m$ を素数と仮定し $a=P^ek^fq$ を booster k^f 付き, 底 P, 平行移動 m の 狭義の オイラー φ 完全数という. ただし $P<k<q$ を満たすとする.

略して booster 付き オイラー φ 完全数という.

次に booster 付き オイラー φ 完全数の満たす方程式を求める.

定義によって $q=\overline{P}P^{e-1}k^{f-1}+1+m$ なので $\overline{P}P^{e-1}k^{f-1}=q-m-1$.

$a=P^ek^fq$ のとき,$\varphi(a)=\varphi(P^ek^fq)=\overline{Pk}P^{e-1}k^{f-1}(q-1)$.

そこで

$$
\begin{aligned}
Pk\varphi(a)&=\overline{Pk}P^ek^f(q-1)\\
&=\overline{Pk}P^ek^fq-\overline{Pk}P^ek^f\\
&=\overline{Pk}a-P\overline{k}k(q-m-1)
\end{aligned}
$$

よって,

$$Pk\varphi(a)=\overline{Pk}a-Pk(k-1)(q-m-1).$$

結果として, e,f が消去されている.

a を上の式の解とする. k を法としてみると

$$\overline{Pk}a\equiv 0 \mod k$$

$\overline{k}\equiv -1 \mod k$ なので

$$\overline{P}a\equiv 0 \mod k.$$

$P<k$ により $\overline{P}$ は k と互いに素.

$$a\equiv 0 \mod k.$$

$a=k^fL, f>0.$ とかけて k,L と互いに素.

方程式に代入すると

$$Pk\varphi(k^fL)=\overline{Pk}k^fL-Pk\overline{k}(q-m-1).$$

$Pk\varphi(k^fL)=Pk^f\overline{k}\varphi(L)$ を用いて

$$Pk^f\overline{k}\varphi(L) = \overline{Pk}k^f L - Pk\overline{k}(q-m-1).$$

$$Pk^f\varphi(L) = \overline{P}k^f L - Pk(q-m-1).$$

a を上の式の解とする. P を法としてみると

$$\overline{Pk}a \equiv 0 \mod P$$

$\overline{P} \equiv -1 \mod P$ なので

$$\overline{k}a \equiv 0 \mod P.$$

ゆえに $\overline{k}a = P^e L.$, $e > 0$. P, L は互いに素. $\overline{k} \not\equiv 0 \mod P$ を仮定する.

表 25: $[P=5, 1 \leq m \leq 19]$ 劣完全数

a	素因数分解	m
5	$[5]$	1
25	$[5^2]$	1
77	$[7, 11]$	1
125	$[5^3]$	1
625	$[5^4]$	1
3125	$[5^5]$	1
15625	$[5^6]$	1
78125	$[5^7]$	1
390625	$[5^8]$	1
7	$[7]$	3
3175	$[5^2, 127]$	3
145	$[5, 29]$	5
29953	$[7, 11, 389]$	5
11	$[11]$	7
91	$[7, 13]$	7
155	$[5, 31]$	7
3275	$[5^2, 131]$	7
78875	$[5^3, 631]$	7
13	$[13]$	9
13135	$[5, 37, 71]$	11
17	$[17]$	13
185	$[5, 37]$	13
3425	$[5^2, 137]$	13
3689	$[7, 17, 31]$	13
30569	$[7, 11, 397]$	13
19	$[19]$	15
3475	$[5^2, 139]$	15
49	$[7^2]$	17
205	$[5, 41]$	17
30877	$[7, 11, 401]$	17
80125	$[5^3, 641]$	17
23	$[23]$	19
119	$[7, 17]$	19
215	$[5, 43]$	19
80375	$[5^3, 643]$	19

表 26: $[P=2, m=0, \rho=3]$ 乗数 つき劣完全数

a	素因数分解	元の完全数
84	2^2*3*7	2^2*7
270	$2*3^3*5$	
1488	2^4*3*31	2^4*31
1638	$2*3^2*7*13$	
24384	$2^6*3*127$	2^6*127

表 27: $[P=2, m=0, \rho=5]$ 乗数つき劣完全数

a	素因数分解
30	$2*3*5$
140	2^2*5*7
2480	2^4*5*31
6200	2^3*5^2*31
40640	$2^6*5*127$

表 28: $[P=2, m=4, \rho=3]$ 乗数つき劣完全数

a	素因数分解
15	$3*5$
42	$2*3*7$
132	2^2*3*11
330	$2*3*5*11$
456	2^3*3*19
2652	$2^2*3*13*17$
3996	2^2*3^3*37
6432	2^5*3*67
25152	$2^6*3*131$
55896	$2^3*3*17*137$

表 29: $[P = 2, m = 4]$ 完全数

a	素因数分解	生き延びるもの
5	5	$*$
14	$2 * 7$	$*$
44	$2^2 * 11$	$*$
110	$2 * 5 * 11$	
152	$2^3 * 19$	$*$
884	$2^2 * 13 * 17$	
2144	$2^5 * 67$	$*$
8384	$2^6 * 131$	$*$
18632	$2^3 * 17 * 137$	
116624	$2^4 * 37 * 197$	

表 30: $[P = 2, m = 6, \rho = 3]$ 乗数つき劣完全数

a	素因数分解
21	$3 * 7$
54	$2 * 3^3$
126	$2 * 3^2 * 7$
156	$2^2 * 3 * 13$
828	$2^2 * 3^2 * 23$
1776	$2^4 * 3 * 37$
3870	$2 * 3^2 * 5 * 43$

表 31: $[P = 2, m = 6]$ 完全数

a	素因数分解	生き延びるモノ
7	7	$*$
15	$3 * 5$	$*$
52	$2^2 * 13$	$*$
315	$3^2 * 5 * 7$	
592	$2^4 * 37$	$*$
1155	$3 * 5 * 7 * 11$	
2102272	$2^{10} * 2053$	$*$

表 32: $[P = 2, m = 8, \rho = 3]$ 乗数つき劣完全数

a	素因数分解
27	3^3
66	$2 * 3 * 11$
390	$2 * 3 * 5 * 13$
552	$2^3 * 3 * 23$
3036	$2^2 * 3 * 11 * 23$
6816	$2^5 * 3 * 71$
56712	$2^3 * 3 * 17 * 139$
100992	$2^7 * 3 * 263$
211692	$2^2 * 3 * 13 * 23 * 59$
257808	$2^4 * 3 * 41 * 131$
302412	$2^2 * 3 * 11 * 29 * 79$
316692	$2^2 * 3^2 * 19 * 463$
896292	$2^2 * 3^3 * 43 * 193$
1174836	$2^2 * 3 * 13 * 17 * 443$
1583616	$2^9 * 3 * 1031$
3272736	$2^5 * 3 * 73 * 467$

表 33: $[P = 2, m = 10, \rho = 3]$ 乗数つき劣完全数

a	素因数分解
33	$3 * 11$
78	$2 * 3 * 13$
204	$2^2 * 3 * 17$
1968	$2^4 * 3 * 41$
7008	$2^5 * 3 * 73$
26304	$2^6 * 3 * 137$

表 34: $[P = 2, m = 10]$ 完全数

a	素因数分解
11	11
21	$3 * 7$
26	$2 * 13$
68	$2^2 * 17$
656	$2^4 * 41$
2336	$2^5 * 73$
8768	$2^6 * 137$
133376	$2^8 * 521$
528896	$2^9 * 1033$

表 35: $[P = 2, m = 12, \rho = 3]$ 乗数つき劣完全数

a	素因数分解
39	$3 * 13$
228	$2^2 * 3 * 19$
378	$2 * 3^3 * 7$
2064	$2^4 * 3 * 43$
4230	$2 * 3^2 * 5 * 47$
4428	$2^2 * 3^3 * 41$
26688	$2^6 * 3 * 139$
57348	$2^2 * 3^5 * 59$
126378	$2 * 3^2 * 7 * 17 * 59$
319428	$2^2 * 3^2 * 19 * 467$
401664	$2^8 * 3 * 523$

表 36: $[P=2, m=12]$ 完全数

a	素因数分解
13	13
45	$3^2 * 5$
76	$2^2 * 19$
688	$2^4 * 43$
8896	$2^6 * 139$
133888	$2^8 * 523$

表 37: $[P=2, m=-2, \rho=3]$ 乗数つき劣完全数

a	素因数分解
60	$2^2 * 3 * 5$
312	$2^3 * 3 * 13$
1392	$2^4 * 3 * 29$
1950	$2 * 3 * 5^2 * 13$
5856	$2^5 * 3 * 61$
390912	$2^8 * 3 * 509$

表 38: $[P=2, m=-4, \rho=3]$ 乗数つき劣完全数

a	素因数分解
210	$2 * 3 * 5 * 7$
264	$2^3 * 3 * 11$
5664	$2^5 * 3 * 59$
12090	$2 * 3 * 5 * 13 * 31$
17490	$2 * 3 * 5 * 11 * 53$
96384	$2^7 * 3 * 251$

表 39: $[P=2, m=-6, \rho=3]$ 乗数つき劣完全数

a	素因数分解
216	$2^3 * 3^3$
307116	$2^2 * 3^2 * 19 * 449$

表 40: $[P=2, m=-8, \rho=3]$ 乗数つき劣完全数

a	素因数分解
168	$2^3 * 3 * 7$
1104	$2^4 * 3 * 23$
2508	$2^2 * 3 * 11 * 19$
3348	$2^2 * 3^3 * 31$
33288	$2^3 * 3 * 19 * 73$
53448	$2^3 * 3 * 17 * 131$
136068	$2^2 * 3 * 17 * 23 * 29$
233232	$2^4 * 3 * 43 * 113$
274164	$2^2 * 3 * 11 * 31 * 67$
386304	$2^8 * 3 * 503$

表 41: $[P=2, m=-12, \rho=3]$ 乗数つき劣完全数

a	素因数分解
912	$2^4 * 3 * 19$
1386	$2 * 3^2 * 7 * 11$
2790	$2 * 3^2 * 5 * 31$
3132	$2^2 * 3^3 * 29$
7182	$2 * 3^3 * 7 * 19$
15228	$2^2 * 3^4 * 47$
73692	$2^2 * 3^2 * 23 * 89$
89838	$2 * 3^2 * 7 * 23 * 31$
102942	$2 * 3^2 * 7 * 19 * 43$
303012	$2^2 * 3^2 * 19 * 443$
383232	$2^8 * 3 * 499$