これはすごいぞ
超完全数の発見 II

飯高 茂

平成 29 年 7 月 5 日

1 $P = 2$ のときの全体像

元祖完全数の平行移動の方程式は
$\sigma(a) - 2a = -m$ である.
この解の性質を順に調べる.

2 m: 偶数の場合

表 1: $P = 2, m = 0$; 元祖完全数

a	factor
6	$2 * 3$
28	$2^2 * 7$
496	$2^4 * 31$
8128	$2^6 * 127$

これらは 紀元前に発見された 4 個の完全数.

2.1 A 型

$a = 2^e q, (2 < q)$: 素数となるとき正規形の解, または A 型の解という.
8 番目の例はオイラーによる.

表 2: $P = 2, m = 0$; 元祖完全数, 正規形 (A 型解)

e	a	factor
2	28	$2^2 * 7$
4	496	$2^4 * 31$
6	8128	$2^6 * 127$
12	33550336	$2^{12} * 8191$
16	8589869056	$2^{16} * 131071$
18	137438691328	$2^{18} * 524287$
30	2305843008139952128	$2^{30} * 2147483647$

2.2 フェルマ完全数

表 3: $P = 2, m = 2$; フェルマ完全数

a	factor
10	$2 * 5$
136	$2^3 * 17$
32896	$2^7 * 257$
2147516416	$2^{15} * 65537$

A 型
解はこれしかないという予想がある.
私は解は無限にあってほしいと思っている.

2.3 $P = 2, m = 4$

表 4: $P = 2, m = 4$;

a	factor
5	5
14	$2 * 7$
44	$2^2 * 11$
110	$2 * 5 * 11$
152	$2^3 * 19$
884	$2^2 * 13 * 17$
2144	$2^5 * 67$
8384	$2^6 * 131$
18632	$2^3 * 17 * 137$

A,D,G(5) 型
$a = 2^e rq, (2 < r < q)$: 素数となるとき第二正規形の解, または D 型の解という.
$a = p^e$ が $\sigma(a) - 2a = -m$ の解のとき G(p^e) 型の解という.
このとき, $N = p^{e+1} - 1$ とおけば $\overline{p}\sigma(a) = 2p^e - m$. $N = (p-1)m + 2(p^e - 1)$.
$e = 1$ のとき, $p = m + 1$.

2.4 $P = 2, m = 6$

表 5: $P = 2, m = 6$;

a	factor
7	7
15	$3 * 5$
52	$2^2 * 13$
315	$3^2 * 5 * 7$
592	$2^4 * 37$
1155	$3 * 5 * 7 * 11$

A,E($3 * 5 * 7 * 11$),G(7) 型

表 6: $P = 2, m = 6$; 完全数, 正規形 (A 型解)

e	a	factor
2	52	$2^2 * 13$
4	592	$2^4 * 37$
10	2102272	$2^{10} * 2053$
46	9903520314283394042913882112	$2^{46} * 140737488355333$

相異なる素数 4 個以上の積とかける解を E 型という. A,D,F($2^2 * 13 * 23 * 59$) 型

表 7: $P = 2, m = 8$;

a	factor
22	$2 * 11$
130	$2 * 5 * 13$
184	$2^3 * 23$
1012	$2^2 * 11 * 23$
2272	$2^5 * 71$
18904	$2^3 * 17 * 139$
33664	$2^7 * 263$
70564	$2^2 * 13 * 23 * 59$
85936	$2^4 * 41 * 131$

2.5 $P = 2, m = 10$

表 8: $P = 2, m = 10$;

a	factor
11	11
21	$3 * 7$
26	$2 * 13$
68	$2^2 * 17$
656	$2^4 * 41$
2336	$2^5 * 73$
8768	$2^6 * 137$

A,F($3 * 7$),G(11),F($3 * 7$) 型

表 9: $P = 2, m = 10$; 完全数, 正規形 (A 型解)

e	a	factor
2	68	$2^2 * 17$
4	656	$2^4 * 41$
5	2336	$2^5 * 73$
6	8768	$2^6 * 137$
8	133376	$2^8 * 521$
9	528896	$2^9 * 1033$
17	34360918016	$2^{17} * 262153$
22	35184409837568	$2^{22} * 8388617$
29	576460757135261696	$2^{29} * 1073741833$
36	9444732966357765718016	$2^{36} * 137438953481$
46	9903520314283675517890592768	$2^{46} * 140737488355337$
56	10384593717069655905579338999791616	$2^{56} * 144115188075855881$

2.6 $P = 2, m = 12$

G(13),A 型

表 10: $P=2, m=12$;

a	factor
13	13
45	$3^2 * 5$
76	$2^2 * 19$
688	$2^4 * 43$
8896	$2^6 * 139$

表 11: $P=2, m=14$;

a	factor
27	3^3
34	$2 * 17$
232	$2^3 * 29$
34432	$2^7 * 269$

2.7 $P=2, m=14$

G(27),A 型

表 12: $P=2, m=14$; 完全数, 正規形 (A 型解)

e	a	factor
3	232	$2^3 * 29$
7	34432	$2^7 * 269$
19	549762629632	$2^{19} * 1048589$
37	377789318647438868104704	$2^{37} * 274877906957$
63	170141183460469231851591140194996191232	$2^{63} * 18446744073709551629$
79	A	B

$A = 7307508186654514591018502743759690049176018616 32$

$B = 2^{79} * 1208925819614629174706189$

A 型のみで D 型はない.

2.8 $P = 2, m = 16$

表 13: $P = 2, m = 16;$

a	factor
17	17
38	$2 * 19$
92	$2^2 * 23$
170	$2 * 5 * 17$
248	$2^3 * 31$
752	$2^4 * 47$
988	$2^2 * 13 * 19$
2528	$2^5 * 79$
8648	$2^3 * 23 * 47$
12008	$2^3 * 19 * 79$
34688	$2^7 * 271$
63248	$2^4 * 59 * 67$

G(17),A,D 型

2.9 $P = 2, m = 18$

表 14: $P = 2, m = 18;$

a	factor
19	19
33	$3 * 11$
105	$3 * 5 * 7$
33705	$3^2 * 5 * 7 * 107$

G(19),A,D,F($3^2 * 5 * 7 * 107$) 型

表 15: $P = 2, m = 18;$ 完全数, 正規形 (A 型解)

e	a	factor
12	33624064	$2^{12} * 8209$
20	2199041081344	$2^{20} * 2097169$
32	36893488220433547264	$2^{32} * 8589934609$
80	C	D

$C = 2923003274661805836407390217171499488007835090944$
$D = 2^{80} * 2417851639229258349412369$

2.10 $P = 2, m = 20$

表 16: $P = 2, m = 20$;

a	factor
46	$2 * 23$
154	$2 * 7 * 11$
190	$2 * 5 * 19$
2656	$2^5 * 83$
6490	$2 * 5 * 11 * 59$
44650	$2 * 5^2 * 19 * 47$

A,D,E($2 * 5 * 11 * 59$) 型

表 17: $P = 2, m = 20$; 完全数, 正規形 (A 型解)

e	a	factor
5	2656	$2^5 * 83$
29	576460762503970816	$2^{29} * 1073741843$
161	A	B

$A = 1708789628736728065916017364935641691682163617890875922179490$
$-717346949782988834315493062213212569 6$
$B = 2^{161} * 584600654932361167281473933086513207862373017192 3$

3　D 型のない場合

以上の結果を観察すると, m : 偶数なら A 型はある. しかし, $m/2$: 奇数なら D 型の解はない.

$\sigma(a) = 2a - m$ のとき D 型の解 $a = 2^e rq$ があるとしよう.

$N = 2^{e+1} - 1, A = (r+1)(q+1), B = rq, \Delta = r + q$ とおくとき

$\sigma(a) = \sigma(2^e rq) = NA, 2a = (N+1)B, A = B + \Delta + 1$ を用いると

$$-m = \sigma(a) - 2a = NA - (N+1)B = N\Delta + N - B$$

により, $B - N\Delta = N + m$.

$r_0 = r - N, q_0 = q - N, B_0 = r_0 q_0$ とおくとき

$B_0 = (r-N)(q-N) = B - N\Delta + N^2$ を使うと

$B_0 - N^2 = B - N\Delta = N + m$. $D = N(N+1) + m$ とおけば

$$B_0 = r_0 q_0 = D.$$

$N + 1 = 2^{e+1}$ により, $D = 2^{e+1}N + m$.

m : 偶数の場合 $m = 2L(, L$:奇数) とおくと $r_0 q_0 = 2(2^e N + L)$ える.

N, r, q : 奇数なので,　r_0, q_0 はともに偶数. しかし $2^e N + L$ は奇数なので矛盾.

以上により次の結果が示された.

命題 1. m : 偶数の場合, $m/2$ 奇数なら D 型の解はない.

m :偶数のとき, 正規形の解 $a = 2^e q$ があるとする. $N = 2^{e+1} - 1$ とおくとき $\sigma(a) = \sigma(2^e q) = N(q+1), 2a = (N+1)q$ を用いると

$$-m = \sigma(a) - 2a = N(q+1) - (N+1)q = N - q$$

それゆえ, 話を逆にして m :偶数のとき, $q = N + m = 2^{e+1} - 1 + m$ になるので e を動かすときいつか $2^{e+1} - 1 + m$ が素数になることを期待する. そのとき正規形の解 $a = 2^e q$ ができる.

そこで根拠の乏しい注意を書くに留める.

注意 1. m :偶数のとき,$2^{e+1} - 1 + m$ が素数になる e がある.

これはたぶん正しいが証明は至難の業.

4　$P = 3$ のときの 究極の完全数

$P = 3$, 平行移動 : m の究極の完全数の方程式は $2\sigma(a) = 3a + q - 2m$ になる.
私は, m をいろいろ動かしてパソコンで解を探した.
$m = -32$ のとき $a = 21p, (7 < p :$ 素数$)$ の解が無数に現れて驚かされた.
そこで $a = 21p, (7 < p :$ 素数$)$ はすべて解としよう.(したがって解は無限にある).
$\sigma(a) = \sigma(21p) = 32(p + 1), q = p$ なので,

$$2\sigma(a) - 3a - q = 64(p + 1) - 63p - p = 64.$$

$2\sigma(a) - (3a + q) = -2m$ によれば, $m = -32$.
したがって $2\sigma(a) = 3a + q + 64$ には解 $a = 21p$ が無数にある.
($q =$Maxp(a) とした.)

4.1　数値例:

$2\sigma(a) = 3a + q + 64$ の 解とその素因数分解

```
231,factor(231)=3*7*11
273,factor(273)=3*7*13
357,factor(357)=3*7*17
399,factor(399)=3*7*19
483,factor(483)=3*7*23
609,factor(609)=3*7*29
651,factor(651)=3*7*31
777,factor(777)=3*7*37
```

7000 と 8000 の間にはエイリアン $7209 = 3^4 * 89$ が隠れていた.

```
7077,factor(7077)=3*7*337
7209,factor(7209)=3^4*89
7287,factor(7287)=3*7*347
7329,factor(7329)=3*7*349
7413,factor(7413)=3*7*353
7539,factor(7539)=3*7*359
7707,factor(7707)=3*7*367
7833,factor(7833)=3*7*373
7959,factor(7959)=3*7*379
```

エイリアン $773469 = 3^6 * 1061$ が隠れていた.

```
772989,factor(772989)=3*7*36809
773241,factor(773241)=3*7*36821
773469,factor(773469)=3^6*1061
773493,factor(773493)=3*7*36833
773787,factor(773787)=3*7*36847
```

これは衝撃の事実であった.

4.2 非通常解

$a = 21p$ が通常解なので 21 で割れない場合の解を列挙した. 結果は驚くべきものであった.

非通常解

a	factor
7209	$3^4 * 89$
46719	$3^2 * 29 * 179$
62169	$3 * 17 * 23 * 53$
773469	$= 3^6 * 1061$

A 型解 $a = 7209 = 3^4 * 89, a = 773469 = 3^6 * 1061$ のほかに
D 型解 $a = 46719 = 3^2 * 29 * 179$,
E 型解 $a = 62169 = 3 * 17 * 23 * 53$
が出てきた.

4.3 A 型解 の探求

$2\sigma(a) - (3a + q) = -64$ に A 型解 $a = 3^e q, (3 < q$: 素数) があるとする. $N = 3^{e+1} - 1$ とおくとき

$$2\sigma(a) - 3a - q = N(q + 1) - (N + 1)q - q = N - 2q, 2\sigma(a) - 3a - q = 64$$

により, $N = 2q + 64$.

$$q = \frac{3^{e+1} - 1}{2} - 32.$$

各 e について, $q = \frac{3^{e+1}-1}{2} - 32$ の素因数分解の表.

e	q	factor
4	89	89
5	332	$2^2 * 83$
6	1061	1061
7	3248	$2^4 * 7 * 29$
8	9809	$17 * 577$
32	2779530283277729	2779530283277729

A 型解 $3^4 * 89$, $3^6 * 1061$,$3^{32} * 2779530283277729$ が発見された.

5 究極の完全数の方程式に B 型の解

以上の実験的な結果を踏まえて次のように理論展開する.
底が素数 P , 平行移動 : m の究極の完全数の方程式

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}$$

においての解 $a = \alpha p$ (p, α : 互いに素,$\alpha < p$) があるとする. p は一般の素数なので無限にある. もちろん $q = p$ になる.

$$\begin{aligned}\overline{P}\sigma(a) - Pa &= \overline{P}\sigma(\alpha p) - P\alpha p \\ &= p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha) + \overline{P}\sigma(\alpha).\end{aligned}$$

$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}$ を使って

$$p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha) + \overline{P}\sigma(\alpha) = (P-2)p - m\overline{P}.$$

p でまとめると

$$p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha - (P-2)) = -\overline{P}\sigma(\alpha) - m\overline{P}.$$

さて p の係数 $\overline{P}\sigma(\alpha) - (P\alpha + (P-2))$ を 0 とおくと, $\overline{P}\sigma(\alpha) - (P\alpha + (P-2)) = 0$ かつ $\sigma(\alpha) = -m$.

定義 1.

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + P - 2 = 0$$

を満たす α を底が P の広義の超完全数 *(hyper perfect number)* という.

$\sigma(\alpha) = -m$ を超完全数の補助式という. これによって B 型解の探求と結びつく.
ここで, $\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + P - 2$ の解は正規形と仮定する. (正規形仮説)
その結果 $\alpha = P^f r, (r$:素数$)$ となる. $W = P^{f+1} - 1$ とおくと
$\overline{P}\sigma(\alpha) = W(r+1), P\alpha = (W+1)r$.

$$W = r + P - 2 \tag{1}$$

書き直して, $r = W - P + 2 = P^{f+1} - 1 - P + 2 = P^{f+1} - P + 1$.
$\alpha = P^f r$ は完全数の一般化である.

定義 2. $r = P^{f+1} - P + 1$ が素数のとき $\alpha = P^f r$ を狭義の超完全数 *(hyper perfect number)* という.

広義の超完全数は極めて重要な概念である.
$P = 3,\ \alpha = 20,000,000$ まで調べたが広義の超完全数には正規形の解しかでてこない.
そこで, $\sigma(\alpha)$ の値も入れて広義の超完全数の計算をした.

表 18: $P = 3, m = 0$;

e	a	$\sigma(a)$
21	$3*7$	32
2133	3^3*79	3200
19521	3^4*241	29282
176661	3^5*727	264992

最初の解は $\alpha = 21$. $\sigma(\alpha) = 32$.
完全数の補助式 $\sigma(\alpha) = -m$ を使うと, $m = -64$.
$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}$ に数値を代入して
$\sigma(a) - 3a = q + 64$ は B 型解を与える方程式.

次の解は $\alpha = 2133$. $\sigma(\alpha) = 3200$.
$\sigma(a) - 3a = q + 6400$ は B 型解を与える方程式.

5.1 超完全数の計算

5.2 逆行, その 2

ここで話を逆行させる.

表 19: $P = 5, m = 0;$

e	a	$\sigma(a)$
1950625	$5^4 * 3121$	2438282

表 20: $P = 7, m = 0;$

e	a	$\sigma(a)$
301	$7 * 43$	352
16513	$7^2 * 337$	19266

表 21: $P = 11, m = 0;$

e	a	$\sigma(a)$
159841	$11^2 * 1321$	175826

$\alpha = P^f r$ を超完全数とする.

$W = P^{f+1} - 1$ とおくと $r = W - P + 2$ は素数である. $\overline{P}\sigma(\alpha) = W(r+1)$ になる.

$m = -\sigma(\alpha)$ と m を定める.

$a = \alpha q, (q$ は α と互いに素な素数,$\alpha < q)$ に対して, $\overline{P}\sigma(a) = W(r+1)(q+1), Pa = (W+1)rq$ を使って

$$\begin{aligned}\overline{P}\sigma(a) - Pa - (P-2)q &= W(r+1)(q+1) - (W+1)rq - (P-2)q \\ &= W(r+q+1) - rq - (P-2)q \\ &= q(W - r - P + 2) + W(r+1)\end{aligned}$$

$W - r - P + 2 = 0$ によって,

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa - (P-2)q = W(r+1).$$

$-\overline{P}m = \overline{P}\sigma(\alpha) = W(r+1)$ なので

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa - (P-2)q = -m\overline{P}.$$

$m = -\sigma(\alpha)$ について方程式 $\overline{P}\sigma(a) - Pa - (P-2)q = -m\overline{P}$ の解 $a = \alpha q, (q$ は α と互いに素な素数) が得られた. これは B 型解である.

6　A 型解の探求

B 型解が出るように作った方程式

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}$$

についてその A 型解 a を探そう.

$m = -\sigma(\alpha)$ と m を定めていることを想い出し, 問題を整理しよう.

α を超完全数とするとき方程式

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa - (P-2)q = \sigma(\alpha)\overline{P}$$

の A 型解 a を探すのが目的である.

A 型解 $a = P^f Q$,$P < Q$: 素数, とする. $W = Q^{f+1} - 1$ と記号を使う.

$\overline{P}\sigma(a) - Pa = W(Q+1) - (W+1)Q = W - Q$ なので

$$W - Q - (P-2)Q = \sigma(\alpha)\overline{P}$$

によって,

$W - (P-1)Q = \sigma(\alpha)\overline{P}$ に注意し

$$Q = \frac{W}{\overline{P}} - \sigma(\alpha)$$

をえる.

超完全数 α に対して, f を動かして,$\frac{W}{\overline{P}} - \sigma(\alpha)$ が素数となる場合を探す. これを満たす 素数 Q があるなら $a = P^f Q$ が解となる.

6.1　計算の実行

wxmaxima のプログラムは次の通り.

```
ultimate_perfect_exp(P,m,aa,bb):= for e:aa thru bb
do(P1:P-1,q:(P^(e+1)-1)/P1+m,
if primep(q) then (a:P^e*q, print(e),display(factor(a))) else 1=1);
```

次に超完全数について得られた B 型解を与える方程式の A 型解 (正規形解)

1) $P = 3, a = 21 = 3*, \sigma(a) = 32$

表 22: $P = 3, m = 32;$

e	a	$\sigma(a)$
4	7209	$3^4 * 89$
6	773469	$3^6 * 1061$
32	X	$3^{32} * 2779530283277729$

$X = 515052573043870850383063594908 9$

2) $a = 2133 = 3^3 * 79, \sigma(a) = 3200$

表 23: $P = 3, m = 3200;$

e	a	$\sigma(a)$
26	96916228257047683648313 97	$3^{26} * 3812798739293$
34	Y	$3^{34} * 25015772549496653$

$Y = 417192584165486891565898881493557$

3)

表 24: $P = 7, m = 352;$

e	a	$\sigma(a)$
8	38769722160449	$7^8 * 6725249$
20	742794005439383788318855985340164 9	$7^{20} * 93090977347213649$
28	Z	$7^{28} * 53665095930219662113924 9$

$Z = 246852216102829623577188930160338616415479562449$

7　超完全数, 正規形

表 25: $P = 3, m = 0; a = 3^e q$: 正規形

e	a	q
1	21	7
3	2133	79
4	19521	241
5	176661	727
8	129127041	19681
21	328256967373616371221	31381059607
36	A	B
40	C	D

$A = 67585198634817522935331173030319681$
$B = 450283905890997361$
$C = 443426488243037769923934299701036035201$
$D = 36472996377170786401$

7.1　平行移動した超完全数

定義 3. $r = P^{f+1} - P + 1 + m$ が素数のとき,$\alpha = P^f r$ を底が素数 P , 平行移動 : m の狭義の超完全数という.

次にこの方程式を求める. $W = P^{f+1} - 1$ とおく. 定義により $r = P^{f+1} - P + 1 + m = W - P + m + 2$.

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = \overline{P}\sigma(P^f r) = W(r+1) = Wr + W.$$

$Wr = (P^{f+1} - 1)r = P\alpha - r$ により

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = Wr + W = P\alpha - r + W.$$

$r = W - P + m + 2$ により $W - r = P - 2 - m$ なので次の方程式をえる:

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + P - 2 - m.$$

定義 4. $\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + P - 2 - m$ の解を底が素数 P , 平行移動 m の広義の超完全数という.

究極の完全数の場合と異なり $\mathrm{Maxp}(\alpha)$ が消えている点に注意したい.

8　超完全数の計算

8.0.1　$P = 3, m = 2$ のとき

表 26: $P = 3, m = 2$;

a	factor
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7
6561	3^8
19683	3^9
59049	3^{10}
177147	3^{11}

このとき方程式は $2\sigma(a) = 3 - 1$ であり, 解は概完全数. C 型解ともいう.

$\overline{P}\sigma(a) = Pa - 1$ の解は $a = P^e$ があり, この形でない解もあるがまとめて 概完全数という.

$P - 2 - m = -1$ のとき, $m = P - 1$ ならば概完全数.

表 27: $P = 5, m = 4$;

a	factor	$\sigma(a)$
5	5	6
25	5^2	31
77	$7 * 11$	96
125	5^3	156
625	5^4	781
3125	5^5	3906

$a = 77 = 7 * 11$ は素べきではない. これは珍獣と言ってよい.

表 28: $P=3, m=4$;

a	factor
5	5
33	$3*11$
261	3^2*29
385	$5*7*11$
897	$3*13*23$
2241	3^3*83
26937	$3^2*41*73$
46593	$3^2*31*167$

8.0.2 $P=3, m=4$ のとき

$a=5$ (G 型解という) 以外は正規形 (A 型解), 第二正規形 (D 型解), オビ (E 型解) しかでてこない.

表 29: $P=3, m=4$; 第二正規形

a	factor
897	$3*13*23$
46593	$3^2*31*167$
26937	$3^2*41*73$
19035755649	$3^5*733*106871$
6519443841	$3^5*743*36109$
43076441601	$3^6*2399*24631$

8.0.3 G 型解

p^e と書ける解を G 型解 という.
$e=1$ のとき $m+1$ が素数なら $p=m+1$ は G 型解 の例になる.

8.0.4 $P = 3, m = 6$ のとき

表 30: $P = 3, m = 6$;

a	factor
7	7
39	$3 * 13$
279	$3^2 * 31$
178119	$3^5 * 733$

$p = m + 1 = 7$ は素数.

表 31: $P = 3, m = 6$; 正規解

e	a	factor
1	39	$3 * 13$
2	279	$3^2 * 31$
5	178119	$3^5 * 733$
8	129166407	$3^8 * 19687$
9	1162340199	$3^9 * 59053$
21	328256967436378490439	$3^{21} * 31381059613$
29	14130386091739009026274270599	$3^{29} * 205891132094653$

8.0.5 $P = 3, m = 10$ のとき

第 2 正規形, すなわち D 型解がでてきた.

表 32: $P = 3, m = 10;$

a	factor
11	11
35	$5 * 7$
51	$3 * 17$
2403	$3^3 * 89$
20331	$3^4 * 251$
54723	$3 * 17 * 29 * 37$
68643	$3^2 * 29 * 263$
103683	$3 * 17 * 19 * 107$
5026563	$3^3 * 83 * 2243$
1060803	$3^3 * 101 * 389$

表 33: $P = 3, m = 10;$ 第二正規形

a	factor
867	$3 * 17 * 17$
68643	$3^2 * 29 * 263$
5026563	$3^3 * 83 * 2243$
1060803	$3^3 * 101 * 389$
193109562812680803	$3^9 * 59069 * 166093589$

8.0.6 $P = 3, m = 12$ のとき

表 34: $P = 3, m = 12;$

a	factor
13	13
57	$3 * 19$
333	$3^2 * 37$
15609	$3 * 11^2 * 43$
179577	$3^5 * 739$

表 35: $P = 3, m = 14$;

a	factor
25	5^2
20877183	$3^4 * 373 * 691$

表 36: $P = 3, m = 16$;

a	factor
17	17
69	$3 * 23$
369	$3^2 * 41$
1221	$3 * 11 * 37$
20817	$3^4 * 257$
149765	$5 * 7 * 11 * 389$
180549	$3^5 * 743$

表 37: $P = 3, m = 16$; 第二正規形

a	factor
1221	$3 * 11 * 37$
133736311074501	$3^8 * 20071 * 1015571$
15634813920164915589	$3^{10} * 177167 * 1494504883$

表 38: $P = 3, m = 18$;

a	factor
19	19
387	$3^2 * 43$
2619	$3^3 * 97$

9 超完全数の正規形解

表 39: $P=3, m=0$; 正規形

e	a	factor
1	21	$3*7$
3	2133	3^3*79
4	19521	3^4*241
5	176661	3^5*727
8	129127041	$3^8*19681$
21	328256967373616371221	$3^{21}*31381059607$
36	C	D
40	X	Y

C= 67585198634817522935331173030319681
$D=3^{36}*450283905890997361$
$X=443426488243037769923934299701036035201$
$Y=3^{40}*36472996377170786401$

表 40: $P=5, m=0$; 正規形

e	a	factor
4	1950625	5^4*3121
6	1220640625	$5^6*78121$
14	186264514898681640625	$5^{14}*30517578121$
46	A	B

1009741958682895110927012563561960689639818156138062477111181640625
B= $5^{46}*710542735760100185871124267578121$

256923577521058878087461989835952222835201
$B=7^{24}*1341068619663964900801$
C= 8538323413450849900970017031314236699825783181086873601
$D=7^{32}*7730993719707444524137094401

表 41: $P=7, m=0$; 正規形

e	a	factor
1	301	$7*43$
2	16513	7^2*337
5	1977225901	$7^5*117643$
8	232630479398401	$7^8*40353601$
20	44567640326363195421436448188896001	$7^{20}*558545864083284001$
24	A	B
32	C	D

9.1 D 型解の式

超完全数の方程式 $\overline{P}\sigma(\alpha)=Pa=\alpha+P-2-m$ において D 型解の式を求める.

$\alpha P^e rq$, $(r+1)(q+1), B=rq, N=P^{e+1}-1, \Delta=r+q$ とおくとき $\overline{P}\sigma(\alpha)=NA, P\alpha(N+1)B$ により

$$\overline{P}\sigma(\alpha)-Pa=\alpha-(P-2-m)=N(\Delta+1)-B-(P-2-m)=0.$$

したがって

$$B-N\Delta=N-(P-2-m).$$

$r_0=r-N, q_0=q-N, B_0=r_0q_0$ とおくとき $B_0=r_0q_0=B-N\Delta+N^2$.

$B-N\Delta=B_0-N^2$ を上の式に代入すると

$$B_0-N^2=N-(P-2-m).$$

$D=N(N+1)-(P-2-m)$ とおけば, $B_0=D$.

ここで話が逆になり, 与えられた P,m,e について,$N=P^{e+1}, D=N(N+1)-(P-2-m)$ をまず求める.

9.2 例

$P=3, e=1, m=0$ とおけば, $N=3^2-1=8$.

$D=72+m+2-P=72-1=71$

```
60 ?- hyper1(3,4,1,1).
w=8      75    [3,5^2] x*y=1*75          9=[3^2],83=[83]
61 ?- hyper1(3,4,1,3).
```

```
w=8       75    [3,5^2] x*y=3*25        11=[11],33=[3,11]
62 ?- hyper1(3,4,1,5).
w=8       75    [3,5^2] x*y=5*15        13=[13],23=[23]
63 ?- hyper1(3,4,1,15).
w=8       75    [3,5^2] x*y=15*5        23=[23],13=[13]
64 ?- hyper1(3,8,1,1).
w=8       79    [79]    x*y=1*79        9=[3^2],87=[3,29]
65 ?- hyper1(3,8,2,1).
w=26      709   [709]   x*y=1*709       27=[3^3],735=[3,5,7^2]
66 ?- hyper1(3,8,3,1).
w=80      6487  [13,499]        x*y=1*6487      81=[3^4],6567=[3,11,199]
```

10　D 型解がない証明

命題 2. $P=3, m=0$ のとき D 型解はない

Proof. $P=3, m=0$ のとき $N=3^{e+1}-1\equiv -1 \bmod 3$ により $D=N(N+1)-1\equiv -1 \bmod 3$.

$B_0=r_0q_0=D\equiv -1 \bmod 3$ なので $r_0\equiv -1, q_0\equiv 1 \bmod 3$ としてよい.

$$q=q_0+N\equiv 1-1=0 \bmod 3$$

なので, $q=3$. これは矛盾.

11　半素べき

C 型の解 (指数 e に関係なく素数べき P^e がすべて解になる場合) のあるときを考える. 究極の完全数の方程式

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}$$

の解に素べきの解 P^e があるとし, e は任意とする.

P^e を代入し, $N = P^{e+1} - 1$

$\overline{P}\sigma(a) - Pa = \overline{P}\sigma(P^e) - P^{e+1} = N - (N+1) = -1$ によれば $-1 = (P-2)P - m\overline{P}$.

これより

$$m\overline{P} = (P-2)P + 1 = \overline{P}^2.$$

よって, $m = \overline{P} = P - 1$.

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - \overline{P}^2.$$

この方程式は案外複雑だが P^e が解になる.　P^e　を素数のべき, 略して 素べきという.

この方程式で素べきにならない解を半素べきという. またこの方程式を半素べきの方程式という.

半素べきの方程式は $P = 2$ なら, $\sigma(a) - 2 - 1$ になる. この解は 2 べきになるという予想がある. しかし証明できていないので取りあえず, この解を概完全数 (almost perfect number) と呼ぶことがある.

11.1　半素べきの諸例

表 42: $P = 3, m = 2$; 半素べき

a	factor
19683	3^9
59049	3^{10}
99807	$3 * 17 * 19 * 103$
177147	3^{11}
531441	3^{12}
603681	$3 * 13 * 23 * 673$

$P = 3, m = 2$ の場合を wxmaxima で計算すると, 3^e が出るのは予想通りだが, 意外にも見慣れないメンツが 2 個出た.

$99807 = 3 * 17 * 19 * 103$, $603681 = 3 * 13 * 23 * 673$
これらは3のべきの仲間なので半素べき (semi prime power) というのである.
$a < 10^6$ の範囲では $P = 5, 7, 13, 19, 23$ のときは素べきの解しかでて来ない.

表 43: $P = 11, m = 10$; 半素べき

a	factor
1331	11^3
8303	$19^2 * 23$
14641	11^4
161051	11^5

しかし $P = 11$ のとき半素べきの解 $8303 = 19^2 * 23$ がでてきた.
半素べきの解はどの程度あるか. これは難しい問題であろう.