書泉グランデ
高校生もわかる新しい数論研究
第3期　予稿3; 劣完全数続き

飯高 茂

2017 年 6 月 23 日

目 次

1　乗法的完全数

簡単な話を挿入しておく.

a のすべての約数 d の積 $\prod_{d|a} d$ を $\Pi(a)$ と書く. ユークリッドの関数 $\sigma(a)$ の代わりに $\Pi(a)$ を使い, $\Pi(a)=a^2$ を満たす a を乗法的完全数という.

実はこれは $a=pq(p \neq q:$ 素数$)$ または $a=p^3$ になる. この証明は案外簡単なのである.

$T(a)$ で a　の約数の個数を示すとき, $\Pi(a)=a^{T(a)/2}$ が容易に証明できる.

$\Pi(a)=a^2$ を満たす a は $a^{T(a)/2}=a^2$ により, $T(a)=4$. a の素因数分解を $\prod_{j=1}^{s} p_j^{e_j}$ と書くとき $T(a)=\prod_{j=1}^{s} e_j+1$ なので $(e_1+1)\cdots(e_s+1)=4$.

1) $(e_1+1)=2, (e_2+1)=2$. このとき $e_1=e_2=1$. よって, $a=p_1p_2$.
たとえば $a=6$ は満たす.
2) $(e_1+1)=4$. $e_1=3$ なので $a=p^3$.
たとえば $a=8$.
課題 多重完全数の乗法版を考えてみよう.

1.1　多重完全数のクラス

一般に $\sigma(a)=ka$ を満たす数を $k-$ 完全数 (k を abundancy または class と呼ぶ) といい, これらを総称して多重完全数 (multiply perfect numbers), または倍

積完全数という. 興味ある例が次第に知られるようになったが完全数の場合のオイラーの定理のような美しい結果はない. 完全数と比べると多重完全数の研究にはさらなる困難があるようだ.

表 1: $[P = 2, k = 3]$ 多重完全数 (Wolfram MathWorld より)

a	素因数分解
120	$2^3 * 3 * 5$
672	$2^5 * 3 * 7$
523776	$2^9 * 3 * 11 * 31$
459818240	$2^8 * 5 * 7 * 19 * 37 * 73$
1476304896	$2^{13} * 3 * 11 * 43 * 127$
51001180160	$2^{14} * 5 * 7 * 19 * 31 * 151$

この場合は 6 個しかないという予想がある.

奇数完全数 n が仮にあったとして $a = 2n$ とおく.

$$\sigma(a) = \sigma(2)\sigma(n) = 3 \times 2n = 6n = 3a$$

したがって, a はクラス 3 の多重完全数なのである. 奇数完全数 n の非存在は確定していないがあれば $n > 10^{1500}$ という結果があるそうだ.

表 2: $[P = 2, k = 4]$ 多重完全数 ,36 個発見された

a	素因数分解
30240	$2^5 * 3^3 * 5 * 7$ (デカルト 1638)
32760	$2^3 * 3^2 * 5 * 7 * 13$
2178540	$2^2 * 3^2 * 5 * 7^2 * 13 * 19$
23569920	$2^9 * 3^3 * 5 * 11 * 31$

ここでデカルトが出てきた.

表 3: $[P = 2, k = 5]$ 多重完全数, 65 個発見された

a	素因数分解
14182439040	$2^7 * 3^4 * 5 * 7 * 11^2 * 17 * 19$ (デカルト 1638)
31998395520	$2^7 * 3^5 * 5 * 7^2 * 13 * 17 * 19$

表 4: $[P=2, k=6]$ 多重完全数 ,(カーマイケル 1907)

a	素因数分解
154345556085770649600	$2^{15}*3^5*5^2*7^2*11*13*17*19*31*43*257$

完全数の一般化と同じ考えで, きわめて安易であるが底の素数 P を固定して $(P-1)\sigma(a)=ka$ を満たす数を 底 P の場合の $k-$ 完全数という.

表 5: $[P=3, k=5]$ 多重完全数 $(2\sigma(a)=5a)$

a	素因数分解
24	2^3*3

これだけかどうかわからないが少しでもわかればいい.

$2\sigma(a)=5a$ を満たす　a を決めたい. これは偶数なので, $a=2^eL, L:$ 奇数, と表す.$N=2^{e+1}-1$ を用いると $\sigma(a)=N\sigma(L)$. $5a=5(N+1)L/2$ によって,

$$4N\sigma(L)=5(N+1)L.$$

$N(4\sigma(L)-5L)=5L$ をえるがここで手詰まり.

$L:$ 素数を仮定する.

$N(4(L+1)-5L)=5L$ になり $L=\frac{4N}{5+N}<4$.

$L:$ 奇素数なので, $L=3, N=15.e=3$ となって, $a=24=2^3*3$.

表 6: $[P=3, k=7]$ 多重完全数 $2\sigma(a)=7a$

a	素因数分解
30240	2^5*3^3*5*7
32760	$2^3*3^2*5*7*13$
2178540	$2^2*3^2*5*7^2*13*19$

やはり多重完全数の素因子は小さい.

$[P=3, k=11,13,17]$ のとき $a<3\times10^6$ の範囲で解がない.

P は素数でやりたい. 4 を P に使うのは違反行為だが解が多くでてきたので止められない.

表 7: $[P = 4, k = 7]$ 多重完全数 $3\sigma(a) = 7a$

a	素因数分解
12	$2^2 * 3$
234	$2 * 3^2 * 13$

表 8: $[P = 4, k = 10]$ 多重完全数 $3\sigma(a) = 10a$

a	素因数分解
1080	$2^3 * 3^3 * 5$
6048	$2^5 * 3^3 * 7$
6552	$2^3 * 3^2 * 7 * 13$
435708	$2^2 * 3^2 * 7^2 * 13 * 19$

表 9: $[P = 4, k = 11]$ 多重完全数 $3\sigma(a) = 11a$

a	素因数分解
35640	$2^3 * 3^4 * 5 * 11$
199584	$2^5 * 3^4 * 7 * 11$
2142720	$2^9 * 3^3 * 5 * 31$

表 10: $[P = 5, k = 7]$ 多重完全数 $4\sigma(a) = 7a$

a	素因数分解
28	$2^2 * 7$

2 底 P, 平行移動 m の多重完全数

底 P で多重完全数を定義すると解がないことが多い. これでは問題設定に問題あり, と言われかねない.

パラメータ k を取り替えて解を探したところ,

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = -m$$

の場合は解が多い.

その上 $P = 2$ とすると方程式は $2\sigma(a) - 2a = -m$ になりユークリッドの完全数の平行移動の場合になっている.

そこで新たに別種の完全数を導入しよう.

3 底 P, 平行移動 m の劣完全数

$q=P^{e+1}-1+m$ が素数のとき $a=P^eq$ を底 P, 平行移動 m の狭義の劣完全数 (subperfect number) といい, このときの q を劣素数 (subprime number) という.

劣素数は素数である.

ここで劣完全数の方程式の導入を行う.

劣完全数 $a=P^eq$ について

$$\overline{P}\sigma(a)=\overline{P}\sigma(P^eq)=(P^{e+1}-1)(q+1)=Pa-(q+1-P^e)$$

$q=P^{e+1}-1+m$ によれば $q+1-P^e=m$ なので

$$\overline{P}\sigma(a)=Pa-m.$$

究極の完全数の場合と比べて簡明な式になった. この方程式の解を底 P, 平行移動 m の広義の劣完全数 (subperfect number with translation parameter m) というのである.

広義の劣完全数を簡単に劣完全数という.

$P>2$ なら, $m=0$ のとき $P^{e+1}-1+m$ 　は素数にならない. これを克服するために $\sigma(P^e)$ を使うことになり $q=\sigma(P^e)-1+m$ が素数のとき $a=P^eq$ を究極の完全数が定義された.

しかし, m によっては $P^{e+1}-1+m$ は素数なのでこのようにしても一向構わない.

3.1 正規形の劣完全数

$a=P^fQ(Q:$ 素数$)$ と書ける解を正規形の劣完全数という.

このとき $\overline{P}\sigma(a)=(P^{f+1}-1)(Q+1)=Pa+P^{f+1}-(Q+1)$ になり

$$-m=\overline{P}\sigma(a)-Pa=P^{f+1}-(Q+1).$$

これより $Q=P^{f+1}+m-1$.

これは底 P, 平行移動 m の狭義の劣完全数のときの劣素数である.

3.2 $P=3$, 平行移動 $m=3$ の劣完全数

狭義の劣完全数の場合には $P=3$ のとき $Q=3^{e+1}-1+m$ が素数となる. だから m は奇数になる. しかし $m=1,7,10$ の場合 Q は素数にならない.

そこで 広義の劣完全数の場合 $m=3$ について調べる.

表 11: $[P = 3, m = 3]$ 狭義の劣完全数, 正規形

a	素因数分解
33	$3 * 11$
261	$3^2 * 29$
385	$5 * 7 * 11$
897	$3 * 13 * 23$
2241	$3^3 * 83$
26937	$3^2 * 41 * 73$
46593	$3^2 * 31 * 167$

表 12: $[P = 3, m = 3]$ 劣完全数, 正規形

e	a	素因数分解
1	33	$3 * 11$
2	261	$3^2 * 29$
3	2241	$3^3 * 83$
7	14353281	$3^7 * 6563$
9	1162300833	$3^9 * 59051$
13	7625600673633	$3^{13} * 4782971$
14	68630386930821	$3^{14} * 14348909$
23	26588814359145789645441	$3^{23} * 282429536483$
25	2153693963077252343529633	$3^{25} * 2541865828331$
35	A	B

$A = 75094665149797249040098061562569 61$

$B = 3^{35} * 150094635296999123$

3.3 第２種正規形の劣完全数

$a = P^f rq(r < q:$ 素数) と書ける解を第２種正規形の劣完全数という.
このとき $\overline{P}\sigma(a) = (P^{f+1} - 1)(r + 1)(q + 1), Pa - m = P^{f+1}rq - m$ になる.
$N = P^{f+1} - 1, A = (r + 1)(q + 1), B = rq, \Delta = r + q$ とおくとき

$$NA = (P^{f+1} - 1)(r + 1)(q + 1), Pa - m = P^{f+1}rq - m = (N + 1)B - m.$$

$A = B + \Delta + 1$ を代入して

$$NB + N(\Delta + 1) = P^{f+1}rq - m = (N + 1)B - m.$$

これより

$$N(\Delta + 1) = B - m.$$

$q_0 = q - N, r_0 = r - N, B_0 = q_0r_0$ とおくと
$B_0 = B - N\Delta + N^2$. これを代入し

$$N(\Delta + 1) = B - m = B_0 + N\Delta - N^2.$$

$D = N(N + 1) + m$ とおけば, $B_0 = D$.

ここで話を逆転する. 与えられた f と m に対して $N = P^{f+1} - 1, D = N(N + 1) + m$ として D を求めそれを因数分解して, $B_0 = D$ から　$q = q_0 + N, r = r_0 + N$ がともに素数となるものを探す. すると, $a = P^f rq$ が解になる.

4 ユークリッドの余関数の評価

ユークリッドの余関数 $\mathrm{co}\sigma(a)$ のうまい評価式を作らないと劣完全数の決定問題が解けない.

q は素数 とする. $a = q^j$ のとき

$\mathrm{co}\sigma(q^j) = \sigma(q^j) - q^j = \dfrac{q^{j+1}-1}{\bar{q}} - q^j = \dfrac{q^j-1}{\bar{q}} = \sigma(q^{j-1}).$

よって, $\mathrm{co}\sigma(q^j) = \sigma(q^{j-1}).$

次に q は素数で $a = q^j\alpha, (\alpha$ は q で割れない$)$ とする.

定理 1 $a = q^j\alpha, (j \geq 1, \alpha > 1, q \not| \alpha)$ のとき

1. $co\sigma(q^j\alpha) = \sigma(q^j)co\sigma(\alpha) + \alpha\sigma(q^{j-1}).$
2. $co\sigma(q^j\alpha) \geq \sigma(q^j) + \alpha\sigma(q^{j-1}).$
3. $co\sigma(q^j\alpha) = \sigma(q^j) + \alpha\sigma(q^{j-1})$ なら α は素数.

Proof.

$\sigma(q^j\alpha) = \dfrac{(q^{j+1}-1)\sigma(\alpha)}{\bar{q}}$ なので

$$\begin{aligned}
co\sigma(q^j\alpha) &= \sigma(q^j\alpha) - q^j\alpha \\
&= \frac{(q^{j+1}-1)\sigma(\alpha) - q^j\alpha(q-1)}{\bar{q}} \\
&= \frac{(q^{j+1}-1)(co\sigma(\alpha)+\alpha) - q^j\alpha(q-1)}{\bar{q}} \\
&= \frac{(q^{j+1}-1)co\sigma(\alpha) + (q^j-1)\alpha)}{\bar{q}} \\
&= \sigma(q^j)co\sigma(\alpha) + \sigma(q^{j-1})\alpha
\end{aligned}$$

以上によって,

$$co\sigma(q^j\alpha) = \sigma(q^j)co\sigma(\alpha) + \sigma(q^{j-1})\alpha.$$

$A = \sigma(q^j) + \sigma(q^{j-1})\alpha$ とおくとき

$$\begin{aligned}
co\sigma(q^j\alpha) - A &= \sigma(q^j)co\sigma(\alpha) + \sigma(q^{j-1})\alpha - A \\
&= \sigma(q^j)(co\sigma(\alpha) - 1) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

$co\sigma(q^j\alpha) = A$ が成り立つなら,$co\sigma(\alpha) - 1 = 0$. このとき α は素数.

4.1　友愛数

例 $a=220=4*5*11, \alpha=5*11$ のとき $\mathrm{co}\sigma(\alpha)=5+11+1=17$,
$\mathrm{co}\sigma(2^2\alpha)=\sigma(2^2)\mathrm{co}\sigma(\alpha)+\alpha\sigma(2)=7*17+55*3=284=4*71$.
$\beta=71$ とおけば $\mathrm{co}\sigma(284)$ =$\mathrm{co}\sigma(4\beta)=\sigma(2^2)\mathrm{co}\sigma(\beta)+\beta\sigma(2)=220$.
$(220, 284)$ amicable number (友愛数) と言う.
このことはピタゴラスの時代には知られていたという.

Wikipedia に友愛数の作り方が載っていた (英語版は正しいが日本語版は意味不明の書き方がなされている)

$p = 3*2^{n-1}-1,\ q = 3*2^n-1,\ r = 9*2^{2n-1}-1$ がどれも素数なら, $A=2^n pq, B=2^n r$ は友愛数である.

$n=2$ とおくとき, $p=5, q=11, r=71$. (指数計算の練習になる)

n が 10 未満のとき　$n=2,4,7$

```
 n= 2
 p= factor(5)=5
 q= factor(11)=11
 r= factor(71)=71
220 284
 n= 3
 p= factor(11)=11
 q= factor(23)=23
 r= factor(287)=7*41 No
 n= 4
 p= factor(23)=23
 q= factor(47)=47
 r= factor(1151)=1151
17296 18416
 n= 5
 n= 6
 n= 7
 p= factor(191)=191
 q= factor(383)=383
 r= factor(73727)=73727
9363584 9437056
```

5　ユークリッドの余関数の評価

ユークリッドの余関数 $\mathrm{co}\sigma(a)$ のうまい評価式を作らないと劣完全数の決定問題が解けない.

5.1　オイラー余関数

これは次のオイラー余関数の結果の類似である.

オイラー余関数 は $a-\varphi(a)$ で定義され $\mathrm{co}\varphi(a)$ がその記号である.

定理 2 $a=q^j\alpha, (\alpha>1, q \not| \alpha)$ のとき

1. $co\varphi(q^j\alpha)=q^{j-1}(\alpha+\overline{q}co\varphi(\alpha))$,
2. $co\varphi(q^j\alpha)\geq q^{j-1}(\alpha+\overline{q})$.
3. $co\varphi(q^j\alpha)=q^{j-1}(\alpha+\overline{q})$ なら α は素数.

証明は読者に委ねる.

次の公式を見比べてみよう.

$$co\varphi(q^j\alpha)=q^{j-1}\overline{q}co\varphi(\alpha)+\alpha q^{j-1},$$

$$co\sigma(q^j\alpha)=\sigma(q^j)\mathrm{co}\sigma(\alpha)+\alpha\sigma(q^{j-1}),$$

両者は類似性の高い公式とみることができる.

次に co$\varphi(a)$ および co$\sigma(a)$ の数表を載せておく.

co$\sigma(a)$ と異なり co$\varphi(a) = a - \varphi(a)$ がオイラー余関数の定義であるがその値が 1 になるとき素数の判定ができる, という意味で類似している.

表 13: a が素数でないときの co$\varphi(a)$ および co$\sigma(a)$ の数表

a	factor	$\varphi(a)$	$\sigma(a)$	co$\varphi(a)$	co$\sigma(a)$
4	$[2^2]$	2	7	2	3
9	$[3^2]$	6	13	3	4
6	$[2,3]$	2	12	4	6
25	$[5^2]$	20	31	5	6
8	$[2^3]$	4	15	4	7
10	$[2,5]$	4	18	6	8
49	$[7^2]$	42	57	7	8
15	$[3,5]$	8	24	7	9
14	$[2,7]$	6	24	8	10
21	$[3,7]$	12	32	9	11
121	$[11^2]$	110	133	11	12
27	$[3^3]$	18	40	9	13
35	$[5,7]$	24	48	11	13
22	$[2,11]$	10	36	12	14
169	$[13^2]$	156	183	13	14
16	$[2^4]$	8	31	8	15
33	$[3,11]$	20	48	13	15
12	$[2^2,3]$	4	28	8	16
26	$[2,13]$	12	42	14	16
39	$[3,13]$	24	56	15	17
55	$[5,11]$	40	72	15	17
289	$[17^2]$	272	307	17	18
65	$[5,13]$	48	84	17	19
77	$[7,11]$	60	96	17	19
34	$[2,17]$	16	54	18	20
361	$[19^2]$	342	381	19	20
18	$[2,3^2]$	6	39	12	21
51	$[3,17]$	32	72	19	21
91	$[7,13]$	72	112	19	21

6　$m = \mu\overline{P}$ の場合

$a = k\overline{P}$ であり $\mu = co\sigma(a) - k$ によって, $\mu < 50$ の場合に a を決定することが目標である.

P は奇素数なので, a は偶数になることを注意する. まず, a の素因数分解が簡単な場合から考える.

1) $a = p^j, j > 0$ のとき. $a = k\overline{P}$ は偶数なので,$p = 2$. よって $a = 2^j$.

$\mathrm{co}\sigma(2^j) = \sigma(2^{j-1}) = 2^j - 1$ なので,

$$\mu = co\sigma(a) - k = 2^j - 1 - k$$

ここで議論を簡単にするため, $P = 3$ の場合とする. $a = 2k, k = 2^{j-1}$ なので

$$\mu = co\sigma(a) - k = 2^j - 1 - k = 2^j - 1 - 2^{j-1} = 2^{j-1} - 1.$$

次の数表ができた.

表 14: $k = 2^{j-1}, a = 2k = 2^j$; μ の値

a	j	$k = 2^{j-1}$	μ	m
4	2	2	1	-2
8	3	4	3	-6
16	4	8	7	-14
32	5	16	15	-30
64	6	32	31	-62
128	7	64	63	-126

2) $a = 2^j\alpha, (\alpha > 1, j \geq 1, \alpha$: 奇数) のとき. $P = 3$ を仮定しているので $k = 2^{j-1}\alpha$ となる.

定理 1 の公式を $q = 2$ として使う.

$$co\sigma(2^j\alpha) = \sigma(2^j)co\sigma(\alpha) + \sigma(2^{j-1})\alpha.$$

$$\mu = co\sigma(a) - k = \sigma(2^j)co\sigma(\alpha) + \sigma(2^{j-1})\alpha - 2^{j-1}\alpha$$

$\sigma(2^{j-1})\alpha - 2^{j-1}\alpha = (2^j - 1)\alpha - 2^{j-1}\alpha = (2^{j-1} - 1)\alpha$ なので次の計算式ができた.

$$\mu = (2^{j+1} - 1)co\sigma(\alpha) + (2^{j-1} - 1)\alpha.$$

これが μ を与える公式である.

$j=1$ のとき $k=\alpha, a=2\alpha$ であり,

$$\mu = 3co\sigma(\alpha).$$

α が素数の場合は, $\mu = 3co\sigma(\alpha) = 3, m = -6$.

表 15: $a=2\alpha, \mu = 3co\sigma(\alpha)$, μ

a	α	k	$co\sigma(\alpha)$	μ	m
6	3	3	1	3	-6
18	9	9	4	12	-24
10	5	5	1	3	-6
30	15	15	9	27	-54
50	25	25	6	18	-36
14	7	7	1	3	-6
42	21	21	11	33	-66
22	11	11	1	3	-6
26	13	13	1	3	-6
34	17	17	1	3	-6
54	27	27	13	39	-78
66	33	33	15	45	-90
98	49	49	8	24	-48
242	121	121	12	36	-72

$a = 2\alpha$, $(\alpha > 2)$ のとき, $\mu = 3, 12, 18, 24, 27, 36, 45, \cdots$ $-m < 50$ とすると, $\mu = 3, 12, 18, 24, 27$.

$j = 2$ のとき公式は $a = 4\alpha, k = 2\alpha$.

$$\mu = 7co\sigma(\alpha) + \alpha.$$

α が素数なら, $\mu = 7 + \alpha$.

表 16: $a = 4\alpha, 7co\sigma(\alpha) + \alpha$, μ の決定

a	α	k	$co\sigma(\alpha)$	μ	m
12	3	6	1	10	-20
36	9	18	4	37	-74
20	5	10	1	12	-24
60	15	30	9	78	-156
100	25	50	6	67	-134
28	7	14	1	14	-28
84	21	42	11	98	-196
44	11	22	1	18	-36
52	13	26	1	20	-40
68	17	34	1	24	-48
108	27	54	13	118	-236
132	33	66	15	138	-276

$\mu < 30$ の場合は $a = 12, \mu = 10$; $a = 20, \mu = 12$; $a = 28, \mu = 14$; $a = 44, \mu = 18$; $a = 52, \mu = 20$; $a = 68, \mu = 24$.

$j = 3$ のとき公式は

$$\mu = 15co\sigma(\alpha) + 3\alpha.$$

α が素数なら, $\mu = 15 + 3\alpha$.

以上の表から次の結果が導かれる. m を与える a が無いときは記さない.

表 17: $a = 8\alpha, \mu = 15co\sigma(\alpha) + 3\alpha$, μ の決定

a	α	k	$co\sigma(\alpha)$	μ	m
24	3	12	1	24	-48
72	9	36	4	87	-174
40	5	20	1	30	-60
120	15	60	9	180	-360
200	25	100	6	165	-330
56	7	28	1	36	-72
168	21	84	11	228	-456
88	11	44	1	48	-96
104	13	52	1	54	-108

7 $2\sigma(a) = 3a - m$, m :偶数の場合

$2\sigma(a) = 3a - m, (m = 2\mu)$ を満たす a とその素因数分解

```
m=-150,factor(190)=2*5*19,factor(238)=2*7*17,factor(286)=2*11*13
m=-148,factor(268)=2^2*67
m=-144,factor(152)=2^3*19,factor(1058)=2*23^2
m=-138,factor(114)=2*3*19,factor(170)=2*5*17
m=-136,factor(244)=2^2*61
m=-134,factor(100)=2^2*5^2
m=-132,factor(80)=2^4*5,factor(136)=2^3*17,factor(236)=2^2*59
m=-126,factor(102)=2*3*17,factor(128)=2^7,factor(182)=2*7*13
m=-120,factor(212)=2^2*53,factor(722)=2*19^2
m=-114,factor(130)=2*5*13,factor(154)=2*7*11
m=-108,factor(104)=2^3*13,factor(188)=2^2*47,factor(578)=2*17^2
m=-104,factor(48)=2^4*3
m=-102,factor(78)=2*3*13,factor(110)=2*5*11
m=-100,factor(172)=2^2*43
m=-96,factor(88)=2^3*11,factor(164)=2^2*41
m=-90,factor(66)=2*3*11
m=-88,factor(148)=2^2*37
m=-84,factor(338)=2*13^2
m=-78,factor(54)=2*3^3,factor(70)=2*5*7
m=-76,factor(124)=2^2*31
m=-74,factor(36)=2^2*3^2
m=-72,factor(56)=2^3*7,factor(116)=2^2*29,factor(242)=2*11^2
```

```
m=-66,factor(42)=2*3*7
m=-62,factor(64)=2^6
m=-60factor(40)=2^3*5,factor(92)=2^2*23
m=-54,factor(30)=2*3*5
m=-48;factor(24)=2^3*3,factor(68)=2^2*17,factor(98)=2*7^2
m=-48; factor(24)=2^3*3, factor(68)=2^2*17, factor(98)=2*7^2
m=-40; factor(52)=2^2*13
m=-36 ; factor(44)=2^2*11, factor(50)=2*5^2
m=-30; factor(32)=2^5
m=-28; factor(28)=2^2*7
m=-24;factor(18)=2*3^2,factor(20)=2^2*5
m=-20; factor(12)=2^2*3
m=-14;factor(16)=2^4
```

```
m=-6;
factor(6)=2*3,factor(8)=2^3,factor(10)=2*5,factor(14)=2*7
```

(factor(2p)=2*p が無限に続く.p:奇素数)

```
m=-2 ;factor(4)=2^2
m=0; factor(2)=2
```

7.1 $P=5$ の場合

$P=5$ の場合の結果だけをあげておく. (m は 4 の倍数 $-m$ は 100 以下の場合)

```
m=-92,factor(32)=2^5
m=-84,factor(28)=2^2*7
m=-68,factor(20)=2^2*5
m=-52,factor(12)=2^2*3
m=-44,factor(16)=2^4
m=-20,factor(8)=2^3
m=-8,factor(4)=2^2
```

臆病なまでに解が少ない.

$P=7, m=6\mu$

```
m=-108 ,factor(18)=2*3^2
m= -84 ,factor(12)=2^2*3
```