これはすごいぞ
超完全数(hyper perfect number)の発見

飯高 茂

平成29 年7 月1 日

1　はじめに

本来は, m が偶数の場合, 劣完全数の問題 :「 $2\sigma(a) = 3a - m$ のとき a の決定」を扱う予定であったが超完全数 (hyper perfect number) が発見され研究は異常なほどうまく進んだ.
そこで順序を変えて今日発表する.

戦後間もないころ, 大学院の学生だった佐藤幹夫氏は, 生活のため非常勤講師として定時制の高校で数学を教えていた. 30 を超える歳になりそうなとき,「このままではいけない」と一念発起して, シュワルツの超関数論 (distribution) に対して持っていた違和感をなくすために新しい関数の考えを導入し 超関数 (hyper function) と命名し欧米の数学にはなかった革新的理論を作った. 岩村先生が distribution の教科書を和訳するとき, distribution を超関数と訳した. この名前の衝撃は大きい.
佐藤幹夫氏は この名前にふさわしい新しい関数の考えを導入することになった. 佐藤先生は当時出版された, 岩波数学辞典を熟読し, 要点がわかればいいから, と考えて体系的に数学の本を読んで理解しそれから数学の新しい理論を考えるより岩波数学辞典を座右において, 自分の数学の感性にあった真の数学の構築に専心した.
20 代のころ, 私は佐藤先生から新しい関数の考えを導入し 超関数と命名した経緯を喫茶店で詳しく聞くことができ, 非常に大きな感銘を受けた.

佐藤先生は 1928 年生まれであり丁度そのころ, 志村五郎, A.Grothendieck も生を受けた. 彼らは 20 世紀数学の主要な建設者であり天才と呼ばれるにふさわしい偉大な数学者である.
私は身近に佐藤先生、志村先生に接することができた. あるとき A.Grothendieck に手紙を出して質問したら直ちに返事が来て大変驚いた. 残念ながら, 彼の 1 頁の返信はなくなってしまった.

2　$P=2$ のとき

$P=2$ のときは以前に扱ったが考え方を整理するため再度考察する.

2.0.1　第 1 完全数 6

6 は完全数. $-m=2*6=12$ なので $\sigma(a)-2a=12$ の解を調べる.

```
24,factor(24)=2^3*3
30,factor(30)=2*3*5
42,factor(42)=2*3*7
54,factor(54)=2*3^3
66,factor(66)=2*3*11
78,factor(78)=2*3*13
102,factor(102)=2*3*17
```

このように無数の解が出てくる. よく見ると $a=6p$ の形をしているので, これらを通常解というが, B 型解ともいう.

$a=6p$ の形をしていない解もある. $a=24=2^3*3, a=54=2*3^3$ も解であり, これらは擬素数解と呼ばれる. その心は

$24=2^3*3=6X$, $X=4$ と書ける. 通常解 $6p$ の形が少し, 崩れて $X=4$ とおくとき $6X$ であり, $4=2^2$ が素数ではないのが残念なので, 4 を擬素数と考えて,$6X$ を擬素数解という.

$54=2*3^3$ も $54=6Y$, $Y=9$ と書けるので擬素数解という. $\sigma(a)-2a=12$ の解として出てくる擬素数解はこれらの 24,54 だけである.

次に 6 で割れない場合の解を探して列挙した結果は驚くべきものであった.

```
304,factor(304)=2^4*19
127744,factor(127744)=2^8*499
```

A 型解

ここで $304=2^4*19, 127744=2^8*499$　らは正規形の解, すなわち $2^eq, (q:$素数$)$ と書ける解であり A 型解 ともいう.

そこで　$\sigma(a)-2a=12$ の A 型解 $a=2^eq$ を探そう. $N=2^{e+1}-1$ とおくとき,

$\sigma(a)-2a=\sigma(2^eq)-2*2^eq=N(q+1)-(N+1)q=N-q$ になる. $\sigma(a)-2a=12$ を使うと, $N-q=12$. これより $q=2^{e+1}-13$. これは $m=-12$ だけ平行移動した狭義の完全数.

$e>3$ のとき e は 4 の倍数, $a\equiv 4 \mod 10, q\equiv q \mod 10$ などの興味深い性質があり, これらは証明が容易にできる.

表 1: $P=2, m=-12$; 平行移動した狭義の完全数

e	a	factor
3	24	$2^3 * 3$
4	304	$2^4 * 19$
8	127744	$2^8 * 499$
12	33501184	$2^{12} * 8179$
16	8589082624	$2^{16} * 131059$
56	10384593717069654320312270165377024	$2^{56} * 144115188075855859$

q の素数条件を落とし, 代わりに $q=2^{e+1}-13$ において e は 4 の倍数で, q は素数を仮定しない場合を計算した.

$a=2^e q$ とおく. q とその素因数分解および a とその素因数分解の表は次のとおり.

こうしても a の末尾が 9 であることに変わりはない.

表 2: $P=2, m=-12; e$ は 4 の倍数

e	q	factor	a	factor
4	19	19	304	$2^4 * 19$
8	499	499	127744	$2^8 * 499$
12	8179	8179	33501184	$2^{12} * 8179$
16	131059	131059	8589082624	$2^{16} * 131059$
20	2097139	$11 * 190649$	2199009624064	$2^{20} * 11 * 190649$
24	33554419	$197 * 170327$	A	B
28	536870899	$23 * 23342213$	C	D

$A=562949735317504$
$B=2^{24} * 197 * 170327$
$C=144115184586194944$
$D=2^{28} * 23 * 23342213$

ここで, 次の問題がある.

1. A 型解 は無限にあるか.

2. $\sigma(a)-2a=12$ の解は通常解, 擬素数解,A 型解のほかにあるか.

これらは私の常識では証明のできない問題である.

2.0.2 第 2 完全数 28

第 2 完全数 28 の場合,
$\sigma(a) - 2a = 56$ の解を調べる.

```
224,factor(224)=2^5*7
308,factor(308)=2^2*7*11
364,factor(364)=2^2*7*13
476,factor(476)=2^2*7*17
532,factor(532)=2^2*7*19
644,factor(644)=2^2*7*23
812,factor(812)=2^2*7*29
868,factor(868)=2^2*7*31
1036,factor(1036)=2^2*7*37
1148,factor(1148)=2^2*7*41
1204,factor(1204)=2^2*7*43
1316,factor(1316)=2^2*7*47
1372,factor(1372)=2^2*7^3
```

$a = 28p$ が通常解,(B 型解という). $a = 224 = 2^5 * 7, a = 1372 = 2^2 * 7^3$ は擬素数解.

28 で割れない場合の解を列挙した.

```
4544,factor(4544)=2^6*71
9272,factor(9272)=2^3*19*61
14552,factor(14552)=2^3*17*107
25472,factor(25472)=2^7*199
74992,factor(74992)=2^4*43*109
495104,factor(495104)=2^9*967
```

$a = P^e rs$ の形の解を第二正規形の解, または D 型の解という.
$\sigma(a) - 2a = 56$ の解を調べる. 解の種類で分類する.

1. A 型解 $4544 = 2^6 * 71$,$25472 = 2^7 * 199$,$495104 = 2^9 * 967$

2. D 型解 $9272 = 2^3 * 19 * 61$, $14552 = 2^3 * 17 * 107$, $74992 = 2^4 * 43 * 109$

表 3: $P = 2, m = -56 = -2 * 28;28$ は第二完全数, 正規形の解

e	a	factor
5	224	$2^5 * 7$
6	4544	$2^6 * 71$
7	25472	$2^7 * 199$
9	495104	$2^9 * 967$
15	2145615872	$2^{15} * 65479$
18	137424011264	$2^{18} * 524231$
21	8795973484544	$2^{21} * 4194247$
27	36028789368553472	$2^{27} * 268435399$
42	38685626227417444939464704	$2^{42} * 8796093022151$
45	2475880078568755040589185024	$2^{45} * 70368744177607$

ここで, 次の問題がある.

1. A 型解 は無限にあるか.

2. D 型解 は無限にあるか.

3. $\sigma(a) - 2a = 56$ の解は通常解, 擬素数解,A 型解,D 型解のほかにあるか.

表 4: $P=2, m=-56=-2*28$; 第二正規形の解 (D 型の解)

e	a	factor
3	14552	$2^3*17*107$
3	9272	$2^3*19*61$
4	74992	$2^4*43*109$
6	35019968	$2^6*131*4177$
6	15317696	$2^6*137*1747$
6	6019264	$2^6*163*577$
7	53032832	$2^7*317*1307$

D 型解の持つ整数論的性質が不明であるのは残念至極.

2.0.3　第 3 完全数 496

第 3 完全数 $496=2^4*31$ の場合,
$a=496p$ は通常解,

```
1488,factor(1488)=2^4*3*31
2480,factor(2480)=2^4*5*31
2892,factor(2892)=2^2*3*241
3472,factor(3472)=2^4*7*31
5456,factor(5456)=2^4*11*31
6104,factor(6104)=2^3*7*109
6448,factor(6448)=2^4*13*31
8432,factor(8432)=2^4*17*31
9424,factor(9424)=2^4*19*31
中略
14384,factor(14384)=2^4*29*31
15872,factor(15872)=2^9*31
18352,factor(18352)=2^4*31*37
20336,factor(20336)=2^4*31*41
21328, 中略
469712,factor(469712)=2^4*31*947
472688,factor(472688)=2^4*31*953
476656,factor(476656)=2^4*31^3
479632,factor(479632)=2^4*31*967
481616,factor(481616)=2^4*31*971
```

$a = 15872 = 2^9 * 31, a = 476656 = 2^4 * 31^3$ は擬素数解.
そこで 496 で割れない場合の解を列挙した.

```
2892,factor(2892)=2^2*3*241
6104,factor(6104)=2^3*7*109
170612,factor(170612)=2^2*13*17*193
458144,factor(458144)=2^5*103*139
857312,factor(857312)=2^5*73*367
1006496,factor(1006496)=2^5*71*443
1764512,factor(1764512)=2^5*67*823
```

D 型解のオンパレードだが $a = 170612 = 2^2 * 13 * 17 * 193$ は $P^e rsq$ の形で新種である.

A 型解はさらに大きくなるが存在は確か.

2.1　B 型解と完全数の関係

$$\sigma(a) - 2a = -m$$

に B 型解 $a = \alpha p$ (ここで α は定数) (p, α : 互いに素) があるとする．$\alpha < p$ とし一般の素数と考える.

$$\sigma(a) - 2a = \sigma(\alpha p) - 2\alpha p = \sigma(\alpha)(p+1) - 2\alpha p = (\sigma(\alpha) - 2\alpha)p + \sigma(\alpha)$$

なので,$\sigma(a) - 2a = -m$ を思い出すと

$$(\sigma(\alpha) - 2\alpha)p + \sigma(\alpha) = -m$$

ゆえに

$$(\sigma(\alpha) - 2\alpha)p = -\sigma(\alpha) - m$$

ここで p は無数にあるので $\sigma(\alpha) - 2\alpha = 0$ かつ $\sigma(\alpha) = -m$

が成り立つ.

$\sigma(\alpha) - 2\alpha = 0$ により α は完全数.

ここで 2000 年来の大難問「奇数完全数の不存在」を仮定するとオイラーにより αは 正規形の解になる．そこで $\alpha = 2^e r, (r = 2^{e+1} - 1$:素数) と書ける．したがって $\sigma(\alpha) = 2\alpha$ なので, $m = -2\alpha$.

定理 1. *$\sigma(a) - 2a = -m$ に B 型解 $a = \alpha p$ ($\alpha < p$ は任意の素数) があるとき α は完全数, $m = -2\alpha$.*

完全数の平行移動でできた式 $\sigma(a) - 2a = -m$ に B 型解 αp があるとすると定数 α は完全数になる. こうして完全数が正式な晴れ舞台にたったのである.

私はこの不思議さに言葉を失った．そしてこれを一般の底の場合にも考えようと思うに至った.

2.2　逆行

ここで話を逆行させる.

α を完全数とし, $m = -2\alpha$ と定める．$\alpha < p$ となる素数 p をとり $a = \alpha p$ とおく．すると

$$\sigma(a) = \sigma(\alpha)(p+1) = 2\alpha(p+1) = 2a + 2\alpha = 2a - m.$$

$\sigma(a) - 2a = -m$ を a についての方程式とみなすとこの場合 B 型解 $a = \alpha p$ がでてきた.

そこで正規解, 言い方を変えれば A 型解を考えてみたい. $q = 2^e q, (q > 2 : 素数)$ とおく.

$N = 2^{e+1} - 1$ とおけば $\sigma(a) = N(q+1), 2a = (N+1)q$ によって, $\sigma(a) - 2a = N - q = -m$ なので $q = N + m = 2^{e+1} - 1 + m$

$2^{e+1} - 1 + m$ が素数となる e があれば $q = 2^{e+1} - 1 + m$ 　を定めると, $q = 2^e q$ により A 型解 (エイリアン) ができる.

また $q = 2^e qr$ と書ける D 型解 (エイリアン) もでてくるかもしれない. 実際, 第 2 完全数 28 の場合にも起きる.

3　$P=2$ のときの全体像

m: 偶数の場合.

表 5: $P=2, m=0$; 元祖完全数

a	factor
6	$2*3$
28	2^2*7
496	2^4*31
8128	2^6*127

A 型
$a=2^e q, (2<q)$: 素数となるとき正規形の解, または A 型の解という.

3.1　フェルマ完全数

表 6: $P=2, m=2$; フェルマ完全数

a	factor
10	$2*5$
136	2^3*17
32896	2^7*257

A 型
A,D,G(5) 型
$a=2^e rq, (2<r<q)$: 素数となるとき第二正規形の解, または D 型の解という.
$a=p^e$ が $\sigma(a)-2a=-m$ の解のとき G(p^e) 型の解という.
このとき, $N=p^{e+1}-1$ とおけば $\overline{p}\sigma(a)=2p^e-m$. $N=(p-1)m+2(p^e-1)$.
$e=1$ のとき, $p=m+1$.

表 7: $P = 2, m = 4;$

a	factor
5	5
14	$2 * 7$
44	$2^2 * 11$
110	$2 * 5 * 11$
152	$2^3 * 19$
884	$2^2 * 13 * 17$
2144	$2^5 * 67$
8384	$2^6 * 131$
18632	$2^3 * 17 * 137$

表 8: $P = 2, m = 6;$

a	factor
7	7
15	$3 * 5$
52	$2^2 * 13$
315	$3^2 * 5 * 7$
592	$2^4 * 37$
1155	$3 * 5 * 7 * 11$

A,E$(3 * 5 * 7 * 11)$,G(7) 型

相異なる素数 4 個以上の積とかける解を E 型という. A,D,F$(2^2 * 13 * 23 * 59)$ 型

表 9: $P=2, m=8$;

a	factor
22	$2*11$
130	$2*5*13$
184	2^3*23
1012	$2^2*11*23$
2272	2^5*71
18904	$2^3*17*139$
33664	2^7*263
70564	$2^2*13*23*59$
85936	$2^4*41*131$

表 10: $P=2, m=10$;

a	factor
11	11
21	$3*7$
26	$2*13$
68	2^2*17
656	2^4*41
2336	2^5*73
8768	2^6*137

A,F$(3*7)$,G(11),F$(3*7)$ 型

表 11: $P=2, m=12$;

a	factor
13	13
45	3^2*5
76	2^2*19
688	2^4*43
8896	2^6*139

G(13),A 型
G(27),A 型

表 12: $P = 2, m = 14$;

a	factor
27	3^3
34	$2 * 17$
232	$2^3 * 29$
34432	$2^7 * 269$

表 13: $P = 2, m = 16$;

a	factor
17	17
38	$2 * 19$
92	$2^2 * 23$
170	$2 * 5 * 17$
248	$2^3 * 31$
752	$2^4 * 47$
988	$2^2 * 13 * 19$
2528	$2^5 * 79$
8648	$2^3 * 23 * 47$
12008	$2^3 * 19 * 79$
34688	$2^7 * 271$
63248	$2^4 * 59 * 67$

G(17),A,D 型

表 14: $P = 2, m = 18$;

a	factor
19	19
33	$3 * 11$
105	$3 * 5 * 7$
33705	$3^2 * 5 * 7 * 107$

G(19),A,D,F($3^2 * 5 * 7 * 107$) 型

表 15: $P = 2, m = 20;$

a	factor
46	$2 * 23$
154	$2 * 7 * 11$
190	$2 * 5 * 19$
2656	$2^5 * 83$
6490	$2 * 5 * 11 * 59$
44650	$2 * 5^2 * 19 * 47$

A,D,E($2 * 5 * 11 * 59$) 型

4 D 型のない場合

以上の結果を観察すると, m : 偶数なら A 型はある. しかし, $m/2$: 奇数なら D 型の解はない.

$\sigma(a) = 2a - m$ のとき D 型の解 $a = 2^e rq$ があるとしよう.

$N = 2^{e+1} - 1, A = (r+1)(q+1), B = rq, \Delta = r + q$ とおくとき

$\sigma(a) = \sigma(2^e rq) = NA, 2a = (N+1)B, A = B + \Delta + 1$ を用いると

$$-m = \sigma(a) - 2a = NA - (N+1)B = N\Delta + N - B$$

により, $B - N\Delta = N + m$.

$r_0 = r - N, q_0 = q - N, B_0 = r_0 q_0$ とおくとき

$B_0 = (r-N)(q-N) = B - N\Delta + N^2$ を使うと

$B_0 - N^2 = B - N\Delta = N + m$. $D = N(N+1) + m$ とおけば

$$B_0 = r_0 q_0 = D.$$

$N + 1 = 2^{e+1}$ により, $D = 2^{e+1}N + m$.

m : 偶数の場合 $m = 2L(, L$:奇数) とおくと $r_0 q_0 = 2(2^e N + L)$ える.

N, r, q : 奇数なので, r_0, q_0 はともに偶数. しかし $2^e N + L$ は奇数なので矛盾.

以上により次の結果が示された.

命題 1. m : 偶数の場合, $m/2$ 奇数なら D 型の解はない.

m :偶数のとき, 正規形の解 $a = 2^e q$ があるとする. $N = 2^{e+1} - 1$ とおくとき $\sigma(a) = \sigma(2^e q) = N(q+1), 2a = (N+1)q$ を用いると

$$-m = \sigma(a) - 2a = N(q+1) - (N+1)q = N - q$$

それゆえ, 話を逆にして m : 偶数のとき, $q = N + m = 2^{e+1} - 1 + m$ になるので e を動かすときいつか $2^{e+1} - 1 + m$ が素数になることを期待する. そのとき正規形の解 $a = 2^e q$ ができる.

そこで根拠の乏しい注意を書くに留める.

注意 1. m : 偶数のとき,$2^{e+1} - 1 + m$ が素数になる e がある.

これはたぶん正しいが証明は至難の業.

5　$P=3$ のときの 究極の完全数

$P=3$, 平行移動 : m の究極の完全数の方程式は $2\sigma(a)=3a+q-2m$ になる.
私は, m をいろいろ動かしてパソコンで解を探した.
$m=-32$ のとき $a=21p,(7<p:$ 素数$)$ の解が無数に現れて驚かされた.
そこで $a=21p,(7<p:$ 素数$)$ はすべて解としよう.(したがって解は無限にある).
$\sigma(a)=\sigma(21p)=32(p+1), q=p$ なので,

$$2\sigma(a)-3a-q=64(p+1)-63p-p=64.$$

$2\sigma(a)-(3a+q)=-2m$ によれば, $m=-32$.
したがって $2\sigma(a)=3a+q+64$ には解 $a=21p$ が無数にある.
($q=$Maxp(a) とした.)

5.1　数値例:

$2\sigma(a)=3a+q+64$ の 解とその素因数分解

```
231,factor(231)=3*7*11
273,factor(273)=3*7*13
357,factor(357)=3*7*17
399,factor(399)=3*7*19
483,factor(483)=3*7*23
609,factor(609)=3*7*29
651,factor(651)=3*7*31
777,factor(777)=3*7*37
```

7000 と 8000 の間にはエイリアン $7209=3^4*89$ が隠れていた.

```
7077,factor(7077)=3*7*337
7209,factor(7209)=3^4*89
7287,factor(7287)=3*7*347
7329,factor(7329)=3*7*349
7413,factor(7413)=3*7*353
7539,factor(7539)=3*7*359
7707,factor(7707)=3*7*367
7833,factor(7833)=3*7*373
7959,factor(7959)=3*7*379
```

エイリアン $773469 = 3^6 * 1061$ が隠れていた.

```
772989,factor(772989)=3*7*36809
773241,factor(773241)=3*7*36821
773469,factor(773469)=3^6*1061
773493,factor(773493)=3*7*36833
773787,factor(773787)=3*7*36847
```

これは衝撃の事実であった.

5.2 非通常解

$a = 21p$ が通常解なので 21 で割れない場合の解を列挙した. 結果は驚くべきものであった.

```
7209,factor(7209)=3^4*89
46719,factor(46719)=3^2*29*179
62169,factor(62169)=3*17*23*53
773469,factor(773469)=3^6*1061
```

A 型解 $a = 7209 = 3^4 * 89, a = 773469 = 3^6 * 1061$ のほかに D 型解 $a = 46719 = 3^2 * 29 * 179$,E 型解 $a = 62169 = 3 * 17 * 23 * 53$ が出てきた.

5.3 A 型解 の探求

$2\sigma(a) - (3a + q) = -64$ に A 型解 $a = 3^e q, (3 < q$: 素数 $)$ があるとする. $N = 3^{e+1} - 1$ とおくとき

$$2\sigma(a) - 3a - q = N(q + 1) - (N + 1)q - q = N - 2q, 2\sigma(a) - 3a - q = 64$$

により, $N = 2q + 64$.

$$q = \frac{3^{e+1} - 1}{2} - 32.$$

各 e について, $q = \frac{3^{e+1}-1}{2} - 32$ の素因数分解の表.

e	q	factor
4	89	89
5	332	$2^2 * 83$
6	1061	1061
7	3248	$2^4 * 7 * 29$
8	9809	$17 * 577$
32	2779530283277729	2779530283277729

A 型解 $3^4 * 89$, $3^6 * 1061$,$3^{61} * 2779530283277729$ が発見された.

6　究極の完全数の方程式に B 型の解

底が素数 P , 平行移動 : m の究極の完全数の方程式

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}$$

においての解 $a = \alpha p$ $(p, \alpha:$ 互いに素$, \alpha < p)$ があるとする. p は一般の素数なので無限にある. もちろん $q = p$ になる.

$$\begin{aligned}\overline{P}\sigma(a) - Pa &= \overline{P}\sigma(\alpha p) - P\alpha p \\ &= p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha) + \overline{P}\sigma(\alpha).\end{aligned}$$

$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}$ を使って

$$p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha) + \overline{P}\sigma(\alpha) = (P-2)p - m\overline{P}.$$

p でまとめると

$$p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha - (P-2)) = -\overline{P}\sigma(\alpha) - m\overline{P}.$$

さて p の係数 $\overline{P}\sigma(\alpha) - (P\alpha + (P-2))$ を 0 とおくと $\sigma(\alpha) = -m$.
ここで, $\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + P - 2$ の解は正規形と仮定する. (正規形仮説)
その結果 $\alpha = P^f r, (r$:素数$)$ となる. $W = P^{f+1} - 1$ とおくと
$\overline{P}\sigma(\alpha) = W(r+1), P\alpha = (W+1)r$.

$$W = r + P - 2 \tag{1}$$

書き直して, $r = W - P + 2 = P^{f+1} - 1 - P + 2 = P^{f+1} - P + 1$.
$\alpha = P^f r$ は完全数の一般化である.
$\overline{P}\sigma(\alpha) = W(r+1)$ により $\sigma(\alpha) = -m$ を思い出すと, $m = -(r+1)(1 + P + \cdots + P^f$.

定義 1. $r = P^{f+1} - P + 1$ が素数のとき $\alpha = P^f r$ を狭義の超完全数 *(hyper perfect number)* という.

$P = 3$, $\alpha = 20,000,000$ まで調べたが正規形の解しかでてこない.
究極の完全数の場合には $a = 3^2 * 47^2 * 61$ という不規則な解があったことを思い出すと感無量のものがある.

表 16: $P=3, m=0$; 超完全数

e	α	factor	$\sigma(\alpha)$
1	21	$3*7$	32
3	2133	3^3*79	3200
4	19521	3^4*241	29282
5	176661	3^5*727	264992

表 17: $P=3; m=0$, 究極の完全数

a	素因数分解
4	2^2
117	3^2*13
796797	3^6*1093
1212741	3^2*47^2*61

6.1 逆行, その２

ここで話を逆行させる.

$\alpha=P^f r$ を超完全数とする.

$W=P^{f+1}-1$ とおくと $r=W-P+2$ は素数である. $\overline{P}\sigma(\alpha)=W(r+1)$ になる.

$m=-\sigma(\alpha)$ と m を定める.

$a=\alpha q, (q$ は α と互いに素な素数,$\alpha<q)$ に対して, $\overline{P}\sigma(a)=W(r+1)(q+1), Pa=(W+1)rq$ を使って

$$\begin{aligned}\overline{P}\sigma(a)-Pa-(P-2)q &= W(r+1)(q+1)-(W+1)rq-(P-2)q\\ &= W(r+q+1)-rq-(P-2)q\\ &= q(W-r-P+2)+W(r+1)\end{aligned}$$

$W-r-P+2=0$ によって,

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa-(P-2)q=W(r+1).$$

$-\overline{P}m=\overline{P}\sigma(\alpha)=W(r+1)$ なので

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa-(P-2)q=-m\overline{P}.$$

$m=-\sigma(\alpha)$ について方程式 $\overline{P}\sigma(a)-Pa-(P-2)q=-m\overline{P}$ の解 $a=\alpha q,(q$ は α と互いに素な素数) が得られた. これは B 型解である.

6.2 平行移動した超完全数

定義 2. $r=P^{f+1}-P+1+m$ が素数のとき,$\alpha=P^f r$ を底が素数 P , 平行移動 : m の狭義の超完全数という.

次にこの方程式を求める. $W=P^{f+1}-1$ とおく. 定義により $r=P^{f+1}-P+1+m=W-P+m+2$.

$$\overline{P}\sigma(\alpha)=\overline{P}\sigma(P^f r)=W(r+1)=Wr+W.$$

$Wr=(P^{f+1}-1)r=P\alpha-r$ により

$$\overline{P}\sigma(\alpha)=Wr+W=P\alpha-r+W.$$

$r=W-P+m+2$ により $W-r=P-2-m$ なので次の方程式をえる:

$$\overline{P}\sigma(\alpha)=P\alpha+P-2-m.$$

定義 3. $\overline{P}\sigma(\alpha)=P\alpha+P-2-m$ の解を底が素数 P , 平行移動 : m の広義の超完全数という.

究極の完全数の場合と異なり $\mathrm{Maxp}(\alpha)$ が消えている点に注意したい.

7 例

$P=3,m=0$ のとき方程式は $2\sigma(\alpha)=3\alpha+1$
$\alpha=21=3*7,m=-\sigma(\alpha)=-32$

1. $\alpha=21=3*7,m=-\sigma(\alpha)=-32$

2. $\alpha=2133=3^3*79,m=-\sigma(\alpha)=-3200$

3. $\alpha=19521=3^4*241,m=-\sigma(\alpha)=-$

となる. これについて

$$2\sigma(\alpha)=3\alpha+1-m.$$

これには B 型解 α がある.
この A 型解をさがそう.

7.1 計算例

$P = 3$ のとき方程式は

$$2\sigma(\alpha) = 3\alpha + 1 - m.$$

$a = 3^e q$　の形の解 (A 型解) に限って求める.

表 18: $P = 3, m = 0; a = 3^e q$: 正規形

e	a	q
1	21	7
3	2133	79
4	19521	241
5	176661	727
8	129127041	19681
21	328256967373616371221	31381059607
36	A	B
40	C	D

A= 67585198634817522935331173030319681
B= 450283905890997361
C= 443426488243037769923934299701036035201
D= 36472996377170786401

7.1.1 $P = 5, m = 0$ のとき

$P = 5$ のとき $a = 1950625 = 5^4 * 3121$ が解になる.

表 19: $P = 3, m = 0; a = 3^e q$: 正規形

e	a	q
4	1950625	3121
6	1220640625	78121
14	186264514898681640625	30517578121

7.1.2 $P = 3, m = 2$ のとき

表 20: $P = 3, m = 2;$

a	factor
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7
6561	3^8
19683	3^9
59049	3^{10}
177147	3^{11}

このとき方程式は $2\sigma(a) = 3 - 1$ なので概完全数の場合で C 型解.

$\overline{P}\sigma(a) = Pa - 1$ の解は $a = P^e$ があり, この形でない解もあるがまとめて 概完全数という.

$P - 2 - m = -1$ のとき, $m = P - 1$ ならば概完全数.

1

7.1.3 $P = 3, m = 4$ のとき

$a = 5$ (G 型解という) 以外は正規形 (A 型解), 第二正規形 (D 型解), オビ (E 型解) しかでてこない.

表 21: $P=3, m=4;$

a	factor
5	5
33	$3*11$
261	3^2*29
385	$5*7*11$
897	$3*13*23$
2241	3^3*83
26937	$3^2*41*73$
46593	$3^2*31*167$

7.1.4 G 型解

$a=p^e$ のように素数べきの解を G 型解 という.
$e=1$ のとき $m+1$ が素数なら $p=m+1$ はG 型解 の例になる.

7.1.5 $P=3, m=6$ のとき

表 22: $P=3, m=6$;

a	factor
7	7
39	$3*13$
279	3^2*31
178119	3^5*733

7.1.6 $P=3, m=10$ のとき

表 23: $P=3, m=10$;

a	factor
11	11
35	$5*7$
51	$3*17$
2403	3^3*89
20331	3^4*251
54723	$3*17*29*37$
68643	$3^2*29*263$
103683	$3*17*19*107$
5026563	$3^3*83*2243$
1060803	$3^3*101*389$

第 2 正規形, すなわち D 型解がでてきた.

7.1.7 $P=3, m=12$ のとき

表 24: $P = 3, m = 12;$

a	factor
13	13
57	$3 * 19$
333	$3^2 * 37$
15609	$3 * 11^2 * 43$
179577	$3^5 * 739$

表 25: $P = 3, m = 14;$

a	factor
25	5^2

これは孤立解なのか?

表 26: $P = 3, m = 16;$

a	factor
17	17
69	$3 * 23$
369	$3^2 * 41$
1221	$3 * 11 * 37$
20817	$3^4 * 257$
149765	$5 * 7 * 11 * 389$
180549	$3^5 * 743$

表 27: $P = 3, m = 18;$

a	factor
19	19
387	$3^2 * 43$
2619	$3^3 * 97$

8 超完全数の正規形解

表 28: $P = 3, m = 0$; 正規形

e	a	factor
1	21	$3 * 7$
3	2133	$3^3 * 79$
4	19521	$3^4 * 241$
5	176661	$3^5 * 727$
8	129127041	$3^8 * 19681$
21	328256967373616371221	$3^{21} * 31381059607$
36	C	D
40	X	Y

C= 67585198634817522935331173030319681
$D = 3^{36} * 450283905890997361$
$X = 44342648824303776992393429970103603520 1$
$Y = 3^{40} * 3647299637717078640 1$

表 29: $P = 5, m = 0$; 正規形

e	a	factor
4	1950625	$5^4 * 3121$
6	1220640625	$5^6 * 78121$
14	186264514898681640625	$5^{14} * 30517578121$
46	A	B

A= 10097419586828951109270125635619606896398181561380624771118 1640625
B= $5^{46} * 710542735760100185871124267578121$

A= 2569235775210588780874619898359522228352 01
$B = 7^{24} * 134106861966396490080 1$
C= 8538323413450849900970017031314236699825783181086873601
$D = 7^{32} * 77309937197074445241370944 01$

表 30: $P=7, m=0$; 正規形

e	a	factor
1	301	$7*43$
2	16513	7^2*337
5	1977225901	$7^5*117643$
8	232630479398401	$7^8*40353601$
20	44567640326363195421436448188896001	$7^{20}*558545864083284001$
24	A	B
32	C	D

9 究極の完全数と超完全数

定義 4. $r=P^{e+1}-P+1$ が素数のときこの素数を 底 P の超メルセンヌ素数という.

$P=2$ のとき $r=2^{e+1}-1$ が素数のとき古典的なメルセンヌ素数.

9.0.8 $P=3$ の超メルセンヌ素数

$P=3$ のとき $r=3^{e+1}-2$ が素数のとき底 $P=3$ の超メルセンヌ素数という.

```
e=1,factor(7)=7
e=3,factor(79)=79
e=4,factor(241)=241
e=5,factor(727)=727
e=8,factor(19681)=19681
```

9.0.9 $P=5$ の超メルセンヌ素数

```
e=4,factor(3121)=3121
e=6,factor(78121)=78121
e=14,factor(30517578121)=30517578121
```

9.0.10 $P=7$ の超メルセンヌ素数

```
e=1,factor(43)=43
e=2,factor(337)=337
e=5,factor(117643)=117643
e=8,factor(40353601)=40353601
```

$N(r+1)+m\overline{P}=0$ を書き直すと $-m=(1+P+\cdots+P^e)(r+1)$.
この m について次の方程式の解を求める.

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa=(P-2)q-m\overline{P}.$$

計算例

$P=3, e=1$ の場合 $r=7, -m=4*8=-32$ なので方程式は

$$2\sigma(a)-3a=q+2*32.$$

```
231,factor(231)=3*7*11
273,factor(273)=3*7*13
357,factor(357)=3*7*17
399,factor(399)=3*7*19
483,factor(483)=3*7*23
609,factor(609)=3*7*29
651,factor(651)=3*7*31
777,factor(777)=3*7*37
```

解は $a=3*7*p$ の形である.
$m=-32$ A 型解

表 31: $P=3, m=-32$; 正規形

e	a	factor
4	7209	3^4*89
6	773469	3^6*1061
32	5150525730438708503830635949089	$3^{32}*2779530283277729$

$P=3, e=3$ の場合 $r=79$ $-m=40*80=-3200$ なので方程式は

$$2\sigma(a)-3a=q+2*3200.$$

その解は恐るべきものだった.

```
58851,factor(58851)=3^2*13*503
177039,factor(177039)=3^3*79*83
189837,factor(189837)=3^3*79*89
206901,factor(206901)=3^3*79*97
```

```
215433,factor(215433)=3^3*79*101
219699,factor(219699)=3^3*79*103
228231,factor(228231)=3^3*79*107
```

最初の解 $a = 58851 = 3^2 * 13 * 503$ が理解できない．それ以外は通常解 $3^3 * 79 * q$ である．

$m = -3200$ A 型解 これは巨大な数である．

表 32: $P = 3, m = -3200$; 正規形

e	a	factor
26	9691622825704768364831397	$3^{26} * 3812798739293$
34	41719258416548689156589881493557	$3^{34} * 25015772549496653$
44	1454660594681285401163473640807473472504601	$3^{44} * 1477156353275416846121$

$P = 7, e = 1$ の場合 $r = 43, -m = 8 * 44 = -352$ なので方程式は

$$6\sigma(a) - 7a = 5q - 4 * m = 5q + 4 * 352.$$

```
14147,factor(14147)=7*43*47
15953,factor(15953)=7*43*53
17759,factor(17759)=7*43*59
18361,factor(18361)=7*43*61
20167,factor(20167)=7*43*67
21371,factor(21371)=7*43*71
21973,factor(21973)=7*43*73
```

通常解 $7 * 43 * q$
A 型解

表 33: $P = 7, m = -352$; 正規形

e	a	factor
8	38769722160449	$7^8 * 6725249$
20	7427940054393837883188559853401649	$7^{20} * 93090977347213649$

9.1 D 型解の式

$\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + P - 2 - m$

D 型解の式を求める. $\alpha = P^e rq,\ A = (r+1)(q+1), B = rq, N = P^{e+1} - 1, \Delta = r + q$ とおくとき

$\overline{P}\sigma(\alpha) = NA, P\alpha = (N+1)B$ により

$$\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha - (P - 2 - m) = N(\Delta + 1) - B - (P - 2 - m) = 0.$$

したがって

$$B - N\Delta = N - (P - 2 - m).$$

$r_0 = r - N, q_0 = q - N, B_0 = r_0 q_0$ とおくとき $B_0 = r_0 q_0 = B - N\Delta + N^2$.

$B - N\Delta = B_0 - N^2$ を上の式に代入すると

$$B_0 - N^2 = N - (P - 2 - m).$$

$D = N(N+1) - (P - 2 - m)$ とおけば, $B_0 = D$.

ここで話が逆になり, 与えられた P, m, e について,$N = P^{e+1}, D = N(N+1) - (P - 2 - m)$ をまず求める.

9.2 例

$P = 3, e = 1, m = 0$ とおけば, $N = 3^2 - 1 = 8$.

$D = 72 + m + 2 - P = 72 - 1 = 71$

```
60 ?- hyper1(3,4,1,1).
w=8     a=75    [3,5^2] x*y=1*75        9=[3^2],83=[83]
61 ?- hyper1(3,4,1,3).
w=8     a=75    [3,5^2] x*y=3*25        11=[11],33=[3,11]
62 ?- hyper1(3,4,1,5).
w=8     a=75    [3,5^2] x*y=5*15        13=[13],23=[23]
63 ?- hyper1(3,4,1,15).
w=8     a=75    [3,5^2] x*y=15*5        23=[23],13=[13]
64 ?- hyper1(3,8,1,1).
w=8     a=79    [79]    x*y=1*79        9=[3^2],87=[3,29]
65 ?- hyper1(3,8,2,1).
w=26    a=709   [709]   x*y=1*709       27=[3^3],735=[3,5,7^2]
66 ?- hyper1(3,8,3,1).
w=80    a=6487  [13,499]        x*y=1*6487      81=[3^4],6567=[3,11,199]
```

10　D 型解がない証明

命題 2. $P=3, m=0$ のとき D 型解がない

Proof. $P=3, m=0$ のとき $N=3^{e+1}-1\equiv -1 \bmod 3$ により $D=N(N+1)-1\equiv -1 \bmod 3$.

$B_0=r_0q_0=D\equiv -1 \bmod 3$ なので $r_0\equiv -1, q_0\equiv 1 \bmod 3$ としてよい.

$$q=q_0+N\equiv 1-1=0 \bmod 3$$

なので, $q=3$. これは矛盾.