書泉グランデ
高校生もわかる新しい数論研究
第2期　予稿3; 完全数の水平展開6

飯高 茂

2017 年 3 月 10 日

1　研究の原点

完全数の定義は $\sigma(a) - 2a = 0$ を満たす自然数 a である.

wikipedia を見ると,

$\sigma(a) - 2a = -1$ を満たす自然数 a は概完全数と呼ばれるが 2^e 以外の解は知られていない.

$\sigma(a) - 2a = 1$ を満たす自然数 a は擬似完全数と呼ばれるが解は知られていない.

そこでこの 3 命題をあわせて, 3 点セットと呼ぶことにした.

さらに $\sigma(a) - 2a = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4$ を満たす自然数 a も研究してこれらを 10 点セットと呼ぶ.

とりあえず $a < 3000$ についてそのオイラー関数, ユークリッド関数 $\varphi(a)$, ユークリッド関数 $\sigma(a)$ の値を求めて $\sigma(a) - 2a$ の順に並べてみた. その結果は想像をはるかに超え, 感動的なほど美しいものであった.

表 1: 10 点セットの表

a	素因数分解	$s(a)$	$\varphi(a)$	$\sigma(a)$	$\sigma(a)-2a$
5	$[5]$	1	4	6	-4
14	$[2,7]$	2	6	24	-4
44	$[2^2,11]$	2	20	84	-4
110	$[2,5,11]$	3	40	216	-4
152	$[2^3,19]$	2	72	300	-4
884	$[2^2,13,17]$	3	384	1764	-4
2144	$[2^5,67]$	2	1056	4284	-4
3	$[3]$	1	2	4	-2
10	$[2,5]$	2	4	18	-2
136	$[2^3,17]$	2	64	270	-2
2	$[2]$	1	1	3	-1
4	$[2^2]$	1	2	7	-1
8	$[2^3]$	1	4	15	-1
16	$[2^4]$	1	8	31	-1
32	$[2^5]$	1	16	63	-1
64	$[2^6]$	1	32	127	-1
128	$[2^7]$	1	64	255	-1
256	$[2^8]$	1	128	511	-1
512	$[2^9]$	1	256	1023	-1
1024	$[2^{10}]$	1	512	2047	-1
2048	$[2^{11}]$	1	1024	4095	-1

$a=2^e$ なら $\sigma(a)-2a=-1$ なので概完全数の名前で並んでいる.

$\sigma(a)-2a=-2$ となる自然数 $a=3, 10=2*5, 136=2^3*17$ が 3 個ある. この素数は, 3,5,17. これを見て心が躍った. フェルマ素数が並んでいるではないか.

$\sigma(a)-2a=-3$ となる自然数がない.

概完全数となる

表 2: 10 点セットの表 2

a	素因数分解	$s(a)$	$\varphi(a)$	$\sigma(a)$	$\sigma(a)-2a$
6	$[2,3]$	2	2	12	0
28	$[2^2,7]$	2	12	56	0
496	$[2^4,31]$	2	240	992	0
20	$[2^2,5]$	2	8	42	2
104	$[2^3,13]$	2	48	210	2
464	$[2^4,29]$	2	224	930	2
650	$[2,5^2,13]$	3	240	1302	2
1952	$[2^5,61]$	2	960	3906	2
18	$[2,3^2]$	2	6	39	3
12	$[2^2,3]$	2	4	28	4
70	$[2,5,7]$	3	24	144	4
88	$[2^3,11]$	2	40	180	4
1888	$[2^5,59]$	2	928	3780	4

$\sigma(a)-2a=0$ には完全数が 6,28,496 だけ並ぶ.
$\sigma(a)-2a=1$ はこれを与える自然数がない.
$\sigma(a)-2a=3$ は $a=18$ があった.

2　素数べきの解

$\sigma(a) = 2a - m$ に素数べき p^e の解があるとしよう.
$a = p^e$, のとき
$\sigma(a) = \dfrac{p^{e+1} - 1}{\overline{p}}, 2a - m = 2p^e - m$ によって

$$p^{e+1} - 1 = (2p^e - m)(p - 1)$$

を変形して

$$m\overline{p} - 1 = p^e(\overline{p} - 1)$$

これより

$$\overline{p}(m - p^e) = 1 - p^e.$$

$\overline{p}$ で除して

$$p^e - m = p^{e-1} + \cdots + 1.$$

これより

$$m = p^e - (p^{e-1} + \cdots + 1).$$

2.1　解 p

そこで $e = 1$ とすれば $m = p - 1$.

例
$m = 4$ とすると $p = 5$.
$\sigma(a) = 2a - 4$ の解に $a = 5$

$m = 6$ とすると $p = 7$.
$\sigma(a) = 2a - 6$ の解に $a = 7$

$m = 10$ とすると $p = 11$.
$\sigma(a) = 2a - 10$ の解に $a = 11$

2.2 解 p^2

$e = 2$ とすれば $m = p^2 - p - 1$.

例
$p = 3$ とすれば $m = p^2 - p - 1 = 9 - 4 = 5$.
$\sigma(a) = 2a - 5$ の解に $a = 3^2$.

$p = 5$ とすれば $m = p^2 - p - 1 = 25 - 6 = 19$.
$\sigma(a) = 2a - 19$ の解に $a = 5^2$.

$p = 7$ とすれば $m = p^2 - p - 1 = 49 - 8 = 41$.
$\sigma(a) = 2a - 41$ の解に $a = 7^2$.

2.3 解 p^3

$e = 3$ とすれば $m = p^3 - p^2 - p - 1$.

例
$p = 3$ とすれば $m = 27 - 9 - 3 - 1 = 14$.
$\sigma(a) = 2a - 14$ の解に $a = 3^3$.

2.4　解 p^4

$e=4$ とすれば $m=p^4-p^3-p^2-p-1$.

例
$p=3$ とすれば $m=81-27-9-3-1=41$.
$\sigma(a)=2a-41$ の解に $a=3^4$.

$\sigma(a)=2a-41$ の解に $a=7^2, 3^4$.

表 3: $a=p^e$ のときの m の表

e	1	2	3	4	5
$p=3$	2	5	14	41	122
5	4	19	94	469	2344
7	6	41	286	2001	14006
11	10	109	1198	13177	144946
13	12	155	2014	26181	340352
17	16	271	4606	78301	1331116
19	18	341	6478	123081	2338538
23	22	505	11614	267121	6143782
29	28	811	23518	682021	19778608
31	30	929	28798	892737	27674846
37	36	1331	49246	1822101	67417736
41	40	1639	67198	2755117	112959796

$m=41$ は $a=3^4$ と $a=7^2$ のときに起こる．これ以外に，m が等しくなる場合は無いと思う.

表 4: $a = p^e$

e	1	2	3	4
$p = 3$	3	9	27	81
5	5	25	125	625
7	7	49	343	2401
11	11	121	1331	14641
13	13	169	2197	28561
17	17	289	4913	83521
19	19	361	6859	130321
23	23	529	12167	279841
29	29	841	24389	707281
31	31	961	29791	923521
37	37	1369	50653	1874161
41	41	1681	68921	2825761

3　2素数の積の解

$a = pq(p < q:$ 素数$)$ が $\sigma(a) = 2a - m$ の解とする.
$\sigma(a) = \sigma(pq) = \widetilde{p} \cdot \widetilde{q} = pq + \Delta + 1$ ここで $\Delta = p + q$.

$$\widetilde{p} \cdot \widetilde{q} = pq + \Delta + 1 = 2pq - m$$

によって

$$m + 2 = p_0 q_0$$

ここで $p_o = p - 1.q_0 = q - 1$.

1) $m = 2$. $4 = p_0q_0$ により $p_0 = 1, q_0 = 4; p = 2, q = 5; a = 10$.
2) $m = 4$. $6 = p_0q_0$ により $p_0 = 1, q_0 = 6; p = 2, q = 7; a = 14$, 矛盾.
3) $m = 6$. $8 = p_0q_0$ により $p_0 = 2, q_0 = 4; p = 3, q = 5; a = 15$.
4) $m = 8$. $10 = p_0q_0$ により $p_0 = 1, q_0 = 10; p = 2, q = 11; a = 22$.
5) $m = 10$. $12 = p_0q_0$ により $p_0 = 1, q_0 = 12; p = 2, q = 13; a = 26; p_0 = 2, q_0 = 6; p = 3, q = 7; a = 21$.
6) $m = 14$. $16 = p_0q_0$ により $p_0 = 1, q_0 = 16; p = 2, q = 17; a = 34$.
7) $m = 16$. $18 = p_0q_0$ により $p_0 = 1, q_0 = 18; p = 2, q = 19; a = 38$.
8) $m = 18$. $20 = p_0q_0$ により $p_0 = 2, q_0 = 10; p = 3, q = 11; a = 33$.

9) $m = 20$. $22 = p_0 q_0$ により $p_0 = 1, q_0 = 22; p = 2, q = 23; a = 46$.
10) $m = 22$. $24 = p_0 q_0$ により $p_0 = 2, q_0 = 12; p = 3, q = 13; a = 39$.

4 $m > 0, m:$ 奇数の場合

次の結果は $a \leq 1000000$ についてパソコンで調べた結果である.

表 5: $[P = 2, m = 1]$ 奇数, 完全数

a	素因数分解
2	2
4	2^2
8	2^3
16	2^4
32	2^5
64	2^6
128	2^7
256	2^8
512	2^9
1024	2^{10}
2048	2^{11}
4096	2^{12}
8192	2^{13}
16384	2^{14}
32768	2^{15}
65536	2^{16}

$m = 1$ のとき方程式は $\sigma(a) = 2a - 1$ になりこの解は $m = 1$ のときの広義の完全数は $a = 2^e$ に限りそうなコンピュータの計算結果である.

$\sigma(a) = 2a - 1$ の解は almost perfect number (概完全数) と呼ばれている. これは $a = 2^e$ に限るという古来からの予想があるが解決されていない.

($\sigma(a) = 2a - 1$ の解を 概完全数という. 概完全数は 2^e と書けるか? は奇数完全数の存在問題に匹敵する難問らしい.)

$P = 2$ で平行移動してできた完全数は本来 (出生の秘密になった) $q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数なので偶数となる. しかし方程式が $\sigma(a) - 2a = -m$ となったとき, m :奇数の場合も考えることは可能である. 実際にこの場合を調べてみると, 解がない方が多いし, たとえあっても唯一の解になる場合が多数である.

以上からわかることは $m:$ 奇数のとき解は, ごく少ない. 解は有限個しかない. このことをいつの日にか証明したいものだ.

$m = 11$ のときの $a = 244036 = 2^2 * 13^2 * 19^2$ が面白い. 指数の 2 が恐竜 ステゴザウルス を連想させる.

$s(a) = 1$ の解はあるが, 正規形, 第二正規形の解はない.

表 6: $[P = 2, m > 0 :]$ 奇数, 完全数

m	a	素因数分解
5	9	3^2
7	50	$2 * 5^2$
11	244036	$2^2 * 13^2 * 19^2$
19	25	5^2
	2312	$2^3 * 17^2$
25	98	$2 * 7^2$
37	484	$2^2 * 11^2$
41	49	7^2
	81	3^4
47	225	$3^2 * 5^2$
61	2888	$2^3 * 19^2$
71	676	$2^2 * 13^2$
85	242	$2 * 11^2$

Proof

$\sigma(a) = 2a - m$ の解として正規形 $a = 2^e q$ があるとする.

$\sigma(a) - 2a = (2^{e+1} - 1)(q + 1) - 2^{e+1}q = 2^{e+1} - q - 1$ なので

$2^{e+1} - q - 1 = -m$ により, $q = 2^{e+1} - 1 + m$. q は奇数なのは当然. よって m は偶数.

正規形 $a = 2^e rq$ があるとする.

$\sigma(a) - 2a = (2^{e+1} - 1)(q + 1)(r + 1) - 2^{e+1}qr = -m$.

$A = (q + 1)(r + 1), B = qr, \Delta = q + r$ とおくと,

$$(2^{e+1} - 1)(q + 1)(r + 1) - 2^{e+1}qr = (2^{e+1} - 1)(B + \Delta + 1) - 2^{e+1}B = -m$$

により

$$-B - (2^{e+1} - 1)(\Delta + 1) = -m$$

$$m \equiv B + (2^{e+1} - 1)(\Delta + 1) \equiv 1 - (\Delta + 1) = -\Delta = -q - r \equiv 0 \mod 2$$

よって m は偶数.

5　$m < 0$:奇数の場合

次の結果は $a \leq 1000000$ についてパソコンで調べた結果である.

表 7: $[P = 2, m < 0 :]$ 奇数, 完全数

	a	素因数分解
-89	13456	$2^4 * 29^2$
-71	392	$2^3 * 7^2$
-65	200	$2^3 * 5^2$
-59	968	$2^3 * 11^2$
-51	72	$2^3 * 3^2$
-41	1352	$2^3 * 13^2$
-39	162	$2 * 3^4$
-31	15376	$2^4 * 31^2$
-19	36	$2^2 * 3^2$
-7	196	$2^2 * 7^2$
-3	18	$2 * 3^2$

これから分かること

m : 奇数で $m < 0$ の場合, $s(a) = 1$ の解はない.$s(a) = 12$ の 解は $a = 2^e q^f$ となり f は偶数.

Proof.

$$\overline{q}\sigma(a) = (2^{e+1} - 1)(q^{f+1} - 1) = 2^{e+1} q^f \overline{q} - m\overline{q}$$

により $N = 2^{e+1} - 1$ を用いて整理すると

$$N(q^{f+1} - 1) - (N + 1)q^f(q - 1) = \overline{q}(q^f - m)$$

を N についてまとめると

$$N(q^f - 1) = \overline{q}(q^f - m)$$

$$N(q^{f-1} + \cdots + 1) = q^f - m.$$

2 を法とすると

$$q^f \equiv 1, N \equiv 1, q^{f-1} + \cdots + 1 \equiv f \mod 2.$$

$f \equiv -m + 1 \equiv 0 \mod 2$ により f は偶数.

1. $m=-1$, すなわち $\sigma(a)-2a=1$ の場合. 解は無いと予想されている.

$\sigma(a)-2a=1$ を満たす a は 疑似完全数 (pseudo perfect number) と呼ばれているが

ある日, 新聞紙上で $\sigma(a)-2a=1$ を満たす a が見つかったと報道されるかもしれない. その数は疑似完全数と呼ばれている.

私は, 宇宙生物の発見より可能性が低いと思う.

2. $m=-3$ すなわち $\sigma(a)-2a=3$ の場合. $a=2*3^2$ は解. 他の解は無いと予想されている.

これらを証明することはきわめて難しい.

ここでは $s(a)=1,2$ を満たす場合に絞って証明する.

最初に簡単な場合を扱う.

a) $m=5$ のとき

1). $s(a)=1$ を仮定する.

$\sigma(a)=2a-5$ なので, $a=p^e$ とおくと

$\sigma(a)=1+p+\cdots+p^e$, $2a-5=2p^e-5$ により

$p(1+p+\cdots+p^{e-2}-p^{e-1})=-6$ によれば p は 3 で割れるから $p=3$.

$$3^{e+1}-1=2(2*3^e-5)$$

によって,

$$3^{e+1}-1=4*3^e-10.$$

ゆえに, $9=3^e$. よって $e=2, a=3^2$.

2). $s(a)=2$ を仮定し矛盾を導く.

$a=p^eq^f, p<q$:素数, として $X=p^e, Y=q^f$ とおく. さらに $\overline{p}=p-1, \overline{q}=q-1, \rho'=\overline{p}\,\overline{q}$ を使うと

$$\frac{(pX-1)(qY-1)}{\rho'}=2XY-5$$

$$(pX-1)(qY-1)-\rho'(2XY-5)=0$$

を得るがこの左辺の XY の係数を R とおくと, $R=pq-2\rho'=-(p-2)(q-2)+2$.

次の定理を使うことにより $R>0$.

よって, $p=2, R=2, \rho'=\overline{q}$.

$$2XY-(2X+qY-1)=-5\overline{q}.$$

$Y(2X-q)-2X+1=5\overline{q}$ を変形して

$$Y = \frac{2X - 1 - 5\overline{q}}{2X - q} = \frac{2X - q - 4\overline{q}}{2X - q}.$$

さらに変形して

$$Y - 1 = \frac{-4\overline{q}}{2X - q}.$$

ここで場合を分ける.

i). $f = 1$. $Y = q$ なので

$$Y - 1 = \overline{q} = \frac{-4\overline{q}}{2X - q}.$$

$4 = q - 2X$, から $q = 4 + 2X$ なので $q = 2$; 矛盾.

ii). $f > 1$. $Y = q^f$ なので

$$Y - 1 = \overline{q}(q^{f-1} + \cdots + q + 1) = \frac{-4\overline{q}}{2X - q}.$$

$4 = (q - 2X)(q^{f-1} + \cdots + q + 1)$ から $f = 2, q = 3$. $q = 1 + 2X$ なので $X = 1$; 矛盾.

6 m : 奇数の場合の証明

$\sigma(a) - 2a = -m$ の解で $s(a) = 2$ を満たすと仮定する.

$a = p^e q^f, p < q$:素数, として $X = p^e, Y = q^f$ とおく. さらに $\overline{p} = p - 1, \overline{q} = q - 1, \rho' = \overline{p}\ \overline{q}$ を使うと

$$\frac{(pX - 1)(qY - 1)}{\rho'} = 2XY - m$$

$$(pX - 1)(qY - 1) - \rho'(2XY - m) = 0$$

を得るがこの左辺の XY の係数を R とおくと,

$$(pX - 1)(qY - 1) - \rho'(2XY - m) = RXY - pX - qY + 1 + \rho' m = 0$$

定義により

$$R = pq - 2\rho' = -(p - 2)(q - 2) + 2.$$

$R>0$ となる適当な条件を次に探そう.
$q>p\geq 3$ と仮定する.
$R=-(p-2)(q-2)+2\leq 4-q\leq -1$.

$$1+\rho' m=-RXY+pX+qY-1\geq XY+pX+qY-1.$$

これより $m<0$ は成り立たない.
不等式にして

$$mpq>m\rho'\geq XY+pX+qY-2.$$

相加・相乗平均により

$$pX+qY\geq 2\sqrt{pqXY}.$$

一方, $e=1$ なら $\sigma(X)=\sigma p=1+p$:偶数. このとき $\sigma(a)-2a$ は偶数.
m : 奇数 を仮定しているので $e\geq 2$. 同様に $f\geq 2$.
それゆえ $X\geq p^2, Y\geq q^2$ により

$$2+mpq>XY+pX+qY\geq p^2q^2+2\sqrt{p^3q^3}=pq(pq+2\sqrt{pq}).$$

$$2>pq(pq+2\sqrt{pq}-m).$$

$q>p\geq 3$ で評価すると,

$$2>pq+2\sqrt{pq}-m\geq 15+2\sqrt{15}-m>22-m.$$

これによって, $m>20$ になる.
$m\leq 20$ のとき矛盾する. よって $m\leq 20$ のとき $p=2, R=2$.
m が最小になる場合は $a=3^2*5^2$.
このとき計算すると $m=47$. したがって,
以上をまとめて定理とする.

定理 1 *1.* $m<1$ なら $p=2, R=2$.

2. m : 奇数なら $m<20$ のとき $p=2, R=2$.

以上の評価はかなり甘い. いくらでも精密化できるだろう.
m が最小になる場合は $a=3^2*5^2$.
このとき計算すると $m=47$. したがって, $m<47$ で定理は成立する.

7　$p=2, R=2$

$p=2$ とすると $\rho'=\overline{q}, R=2$ となり 基本方程式は

$$-2XY+2X+qY-1=m\overline{q}.$$

これより

$$Y(q-2X)+2X-1=Y(q-2X)+2X-q-1+q=(q-2X)(Y-1)+\overline{q}=m\overline{q}.$$

$$Y-1=\frac{\overline{qm}}{q-2X}.$$

したがって $\overline{q}$ で割れば

$$q^{f-1}+\cdots+q+1=\frac{m-1}{q-2X}.$$

$q-2X$ は $\overline{m}$ の約数になる.

8 m:奇数で正の場合

8.1 $m = 5$

このとき $a = p^e$ の形の解があり $a = 3^2$.

8.2 $m = 7$

このとき $a = p^e$ の形の解はない.
$s(a) = 2$ とする.
$m = 7 < 21$ によって,

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{6}{q - 2X}.$$

i. $q - 2X = 1$ $q^{f-1} + \cdots + q + 1 = 6$. によれば $q = 5, f = 2$.
$q - 2X = 5 - 2X = 1$ より $X = 2$. よって $a = 2 * 5^2$.

8.3 $m = 19$

このとき $a = p^e$ の形の解があり $a = 5^2$.
$s(a) = 2$ とする.
$m = 19 < 21$ によって,

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{18}{q - 2X}.$$

$f = 1$ ならば $q - 2X = 18$. q : 偶数となり矛盾.
$\frac{18}{q - 2X} \geq 1 + q \geq 4$ によって,
i. $q - 2X = 3$.
$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = 6$ によって, $f = 2, q = 5$. $q - 2X = 3; X = 1$ となり矛盾.
ii. $q - 2X = 1$.
$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = 18$ によって, $f = 2, q = 17$. $q - 2X = 1; X = 8$. $a = 2^3 * 17^2$.

8.4 $m = 37$

このとき $a = p^e$ の形の解があり $a = 5^2$.
$s(a) = 2, p = 2$ とする.

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{36}{q - 2X}.$$

$f=1$ ならば $q-2X=36$. q : 偶数となり矛盾.
$\dfrac{36}{q-2X} \geq 1+q \geq 4$ によって,

i. $q-2X=3$.
$q^{f-1}+\cdots+q+1=12$ によって, $f=2, q=11$. $q-2X=3; X=4$ となり $a=2^2*11^2$.

ii. $q-2X=1$.
$q^{f-1}+\cdots+q+1=36$ によって, $f=2, q=35$ 矛盾.

9 m 奇数で負の場合

9.1 $m=-3$

$m<0$ のとき条件は自動的に満たされ, $p=2, R=2$.

$$q^{f-1}+\cdots+q+1=\frac{-3-1}{q-2X}=\frac{4}{2X-q}.$$

i. $2X-q=1$. $q+1=4, f=2$ により, $2X=q+1=4. X=2, a=2*3^2$.
ii. $2X-q>1$ は起きない.

9.2 $m=-7$

$p=2, R=2$.

$$q^{f-1}+\cdots+q+1=\frac{-7-1}{q-2X}=\frac{8}{2X-q}.$$

i. $2X-q=1$. $q+1=8, q=7, f=2$ により, $2X=q+1=8. X=4, a=2^2*7^2$.
ii. $2X-q>1$ は起きない.

9.3 $m=-17$

$p=2, R=2$.

$$q^{f-1}+\cdots+q+1=\frac{18}{2X-q}.$$

i. $2X-q=3$. $q+1=6, q=5, f=2$ により, $2X-q=3. X=4, a=2^2*5^2$.
ii. $2X-q=1,2$ は起きない.

9.4 $m = -31$

$p = 2, R = 2.$

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{-31 - 1}{q - 2X} = \frac{32}{2X - q}.$$

i. $2X - q = 1$. $q + 1 = 32, q = 31, f = 2$ により, $2X = q + 1 = 32.X = 16 = 2^4, a = 2^4 * 31^2$.

ii. $2X - q = 2, 4, 8$ は起きない.

9.5 $m = -39$

$m < 0$ のとき条件は自動的に満たされ, $p = 2, R = 2.$

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{40}{2X - q}.$$

i. $2X - q = 1$. $q^3 + q^2 + q + 1 = 40, q = 3, f = 4$ により, $2X = q + 1 = 4.X = 2, a = 2 * 3^4$.

9.6 $m = -41$

$m < 0$ のとき条件は自動的に満たされ, $p = 2, R = 2.$

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{42}{2X - q}.$$

i. $2X - q = 3$. $q + 1 = 14, q = 13, f = 2$ により, $2X = q + 3 = 16; a = 2^3 * 13^2$

ii. $2X - q = 7$. $q^{f-1} + \cdots + q + 1 = 6$ なので $f = 2, q = 5$. $2X - q = 7$ によれば $X = 1$; 矛盾

10　付録:シャファレビッチを悼む

シャファレビッチ (Igor Shafarevich) 2017 年 2 月 19 日死去,93 歳であった.

ソルジェニチンの自伝的小説 『仔牛が樫の木に角突いた』においてシャファレビッチは勇気と正直さが高く評価されている. 数学書以外で数学者の名前が出るのは珍しいことであろう.

シャファレビッチはソ連邦の時代に政治的に苦難の生活があり, ソ連邦の数学者の窮状を訴える声明を発表した. これはロシア語であり, 短いものであったがイギリスの数学者 Miles Reid によって日本に伝えられ,「日本で広く知られるようにしてほしい」と彼から依頼された. 声明文はロシア語であり Reid 氏の英訳がついていた. しかし,「これを和訳してはいけない. ロシア文学のできる人に直接和訳してもらってほしい」, とのことであった.

どうしたものかと思ったが, 文芸春秋社に連絡したところ, 編集の担当者がすぐにあってくれた. 「『文芸春秋』に載せることは可能だが, 声明文を詳しく説明する文章をつけてほしい.4,5 ページは使える」とのことであった.

新聞紙上で名前を見ることの多かった上智大学のロシア文学の教授 染谷茂氏に電話で依頼したところあってくれるというのでカステラ 1 箱を持参して声明文を渡した. 英訳も見せてほしいとのことであった. 数日にして連絡があり, 和訳を受け取りに行った. 「英訳には 1 つミスがあるね」, との指摘があった.

『文芸春秋』に出す原稿を作るのは順調にできた. いつも読む『文芸春秋』の記事のように一般に分かるように書けばいいのだろう. と考えて, 当時, ソ連からイスラエルに脱出して親しく付き合ったことのある数学者 モイシェゾンから聞いていた話を織り込みながらまとめた.2 日くらいでできて『文芸春秋』の編集者に原稿を渡した. その場でさっと読んで,「これで載せます」, という. これには驚いた. 原型をとどめないくらい修正されるに違いないと思っていたからである.

題して『煉獄の中のソ連知識人』. すぐ『文芸春秋』にのり, 数学セミナー誌に比べ 3 倍くらいの原稿料がもらえた. 声明文の字数を調べ, 数学的に正しい比で計算し声明文の原稿料相当分を染谷先生に持参した. 「これでお金がもらえるとは思わなかった」といって喜んでもらえた.

すぐに読売新聞から連絡が入り、「データベースに載せるから個人のデータを知らせてほしい」といってきた. それ以外に何の反響もなかった. 私は, シャファレビッチに英文の手紙をだして,「声明文は日本でよく売れている月刊誌に載せることができた」と知らせた. しかし, 返事はなかった. やはり受け取れなかったのだろう. それは 1970 年代で東大にいたころのことである.

学習院大学に移り, 日本数学会の理事長になった. 理事長とは学会長のことである. すでにソ連邦は解体し, ロシア数学会になっていた.

1995 年に第 2 回のアジア数学会がタイ国のコラーソン市で開かれ, 私は日本数学会の代表として出席した. シャファレビッチはロシア数学会の会長になっていて, 世界的な数学者として学会の基調講演をするとのことであった.

日本の数学者は5,6名の参加でありみんなで一番目の列に座った．シャファレビッチの基調講演が始まると, 私は睡魔に襲われた．少したってから, 左隣の竹之内先生 (大阪大学) が突然「おい, 名前を言われているぞ」という．

目が覚めたがなんのことか分からない. 基調講演では最近の数学界の成果を数え上げていた，その中で

「代数多様体の分類を小平次元で行う, それはイイタカ教授の仕事なのだが, 前列にいるのもイイタカ教授だがこちらは若いから, きっとご子息に違いない」と joke を言い, みんながどっと笑いそこで起こされたのだった.

講演のあとで, シャファレビッチ教授にあい, 自己紹介した．

彼は,「わかっているよ」と言ってから、「自分たちが困難な時代に手紙をくれたことに感謝している」と言ってくれた.

$2017 - 1995 = 22$, 22年前の出来事である．私は当時 $74 - 22 = 52$ 歳であった．$93 - 22 = 71$, シャファレビッチは71歳だったことになる.