書泉グランデ
高校生もわかる新しい数論研究
第3期　予稿1 ; 完全数の垂直的展開

飯高 茂

2017 年 5 月 12 日

1　究極の完全数

究極の完全数の方程式は次のとおりである.

$$\overline{P}\sigma(a) = Pa + \mathrm{Maxp}(a)(P-2) - m\overline{P}$$

$\overline{P} = P - 1$ である.
$P = 2$ の場合はだいぶ調べたので $P > 2$ の場合を主に調べる.

2 $P=2$ のとき平行移動 m の完全数はどんなものがあったか

A 型の解: 正規形 $a=2^e q, q$: 素数

B 型の解 完全数から得られる通常解 $a=2mq$; ここで m は完全数, $m<q$: 素数

C 型の解 $a=2^e(e$: はすべて), すなわち素数べきの解

D 型の解 : 第二正規形 $a=2^e rq$, $r<q$: 素数

以上の　A,B,CD 型の解を主系列以下の解を 例外系列という

E 型の解　モンスター解, オビ型の解

F 型の解　孤立解 m : 奇数のとき $\sigma(a)-2a=-m$ の解はないか, または数個しかない.

3 $P=3$ のときの完全数

$P=3$ のとき $2\sigma(a)=3a+q-2m$ が方程式であり $3^e q(q$: 素数) の形の解を正規という.

$a=3^e q$ が $2\sigma(a)=3a+q-2m$ の解とすると,

$$2\sigma(a)=(3^{e+1}-1)(q-1)=3^{e+1}q-q-3^{e+1}+1=3a-q-3^{e+1}+1.$$

$$3a-q-3^{e+1}+1=3a+q-2m.$$

$q=\frac{3^{e+1}-1}{2}+m$ となり $a=3^e q$ は狭義の完全数になる.

4 P のときの正規形の解

$$\overline{P}\sigma(a)=Pa+\mathrm{Maxp}(a)(P-2)-m\overline{P}$$

正規形の解 $P^eQ,(Q$: 素数) があるとする. この式を上の方程式に代入する.

$\overline{P}\sigma(a)=P^{e+1}-1, Pa=P^{e+1}Q$ によって,

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa=P^{e+1}-Q-1.$$

$Q=\mathrm{Maxp}(a)$ となり,

$$P^{e+1}-Q-1=Q(P-2)-m\overline{P}.$$

少し変形すると

$$P^{e+1}-1=Q(P-1)-m\overline{P}=(Q-m)\overline{P}$$

ゆえに.

$$Q - m = \frac{P^{e+1} - 1}{P - 1} = \sigma(P^e).$$

$Q = \sigma(P^e) + m$ は素数なので,$P^e Q$ は究極の完全数.

5 完全数の垂直的展開

$P = 3, 5, 7,\ a \leq 10^6$ について $m = 0$ の数表を見てみよう.

表 1: $P = 3, 5, 7, 43; m = 0$

$P = 3$	
a	factor
4	2^2
117	$3^2 * 13$
796797	$3^6 * 1093$
$P = 5$	
a	factor
775	$5^2 * 31$
$P = 7$	
a	factor
9	3^2
$P = 43$	
a	factor
49	7^2

$m = 0$ のときは元祖完全数であるが数は多くない.

表 2: $P = 3; -18 \le m \le 19$

a	素因数分解	m
92	$[2^2, 23]$	-18
8343	$[3^4, 103]$	-18
621	$[3^3, 23]$	-17
84321	$[3^5, 347]$	-17
76	$[2^2, 19]$	-16
50	$[2, 5^2]$	-15
68	$[2^2, 17]$	-15
84807	$[3^5, 349]$	-15
32	$[2^5]$	-14
561	$[3, 11, 17]$	-14
8667	$[3^4, 107]$	-14
108185	$[5, 7, 11, 281]$	-14
52	$[2^2, 13]$	-13
16625	$[5^3, 7, 19]$	-13
44	$[2^2, 11]$	-12
8829	$[3^4, 109]$	-12
783	$[3^3, 29]$	-11
85779	$[3^5, 353]$	-11
18	$[2, 3^2]$	-10
28	$[2^2, 7]$	-10
627	$[3, 11, 19]$	-10
20631	$[3, 13, 23^2]$	-10
24723	$[3^2, 41, 67]$	-10
108955	$[5, 7, 11, 283]$	-10

表 3: $P = 3; -18 \leq m \leq 19$

a	素因数分解	m
20	$[2^2, 5]$	-9
75	$[3, 5^2]$	-9
837	$[3^3, 31]$	-9
12	$[2^2, 3]$	-8
45	$[3^2, 5]$	-8
9153	$[3^4, 113]$	-8
49851	$[3^2, 29, 191]$	-8
277167	$[3, 11, 37, 227]$	-8
16	$[2^4]$	-6
63	$[3^2, 7]$	-6
792423	$[3^6, 1087]$	-6
663	$[3, 13, 17]$	-5
38223	$[3^2, 31, 137]$	-5
87237	$[3^5, 359]$	-5
862299	$[3^3, 109, 293]$	-5
147	$[3, 7^2]$	-4
3185	$[5, 7^2, 13]$	-4
50373	$[3^2, 29, 193]$	-4

表 4: $P = 3; -18 \leq m \leq 19$

a	素因数分解	m
999	$[3^3, 37]$	-3
8	$[2^3]$	-2
99	$[3^2, 11]$	-2
759	$[3, 11, 23]$	-2
795339	$[3^6, 1091]$	-2
6	$[2, 3]$	-1
27755	$[5, 7, 13, 61]$	-1
218225	$[5^2, 7, 29, 43]$	-1
4	$[2^2]$	0
10	$[2, 5]$	0
14	$[2, 7]$	0
117	$[3^2, 13]$	0
796797	$[3^6, 1093]$	0
2	$[2]$	1
15	$[3, 5]$	1
741	$[3, 13, 19]$	1
1107	$[3^3, 41]$	1
14883	$[3, 11^2, 41]$	1
38781	$[3^2, 31, 139]$	1

表 5: $P = 3; -18 \le m \le 19$

a	素因数分解	m
3	$[3]$	2
9	$[3^2]$	2
22	$[2, 11]$	2
27	$[3^3]$	2
81	$[3^4]$	2
243	$[3^5]$	2
729	$[3^6]$	2
2187	$[3^7]$	2
6561	$[3^8]$	2
19683	$[3^9]$	2
59049	$[3^{10}]$	2
99807	$[3, 17, 19, 103]$	2
177147	$[3^{11}]$	2
531441	$[3^{12}]$	2
603681	$[3, 13, 23, 673]$	2
21	$[3, 7]$	3
26	$[2, 13]$	3
1161	$[3^3, 43]$	3
89181	$[3^5, 367]$	3

表 6: $P = 3; -18 \leq m \leq 19$

a	素因数分解	m
5	$[5]$	4
153	$[3^2, 17]$	4
27639	$[3^2, 37, 83]$	4
51417	$[3^2, 29, 197]$	4
799713	$[3^6, 1097]$	4
965007	$[3^3, 103, 347]$	4
34	$[2, 17]$	5
7	$[7]$	6
38	$[2, 19]$	6
171	$[3^2, 19]$	6
10287	$[3^4, 127]$	6
33	$[3, 11]$	7
385	$[5, 7, 11]$	7
1269	$[3^3, 47]$	7
2975	$[5^2, 7, 17]$	7
53751	$[3, 19, 23, 41]$	7

表 7: $P = 3; -18 \leq m \leq 19$

a	素因数分解	m
35	$[5, 7]$	8
46	$[2, 23]$	8
51939	$[3^2, 29, 199]$	8
279055	$[5, 7^2, 17, 67]$	8
279609	$[3, 11, 37, 229]$	8
25	$[5^2]$	9
39	$[3, 13]$	9
90639	$[3^5, 373]$	9
11	$[11]$	10
207	$[3^2, 23]$	10
957	$[3, 11, 29]$	10
10611	$[3^4, 131]$	10
112805	$[5, 7, 11, 293]$	10
607269	$[3, 13, 23, 677]$	10
804087	$[3^6, 1103]$	10

表 8: $P=3; -18 \le m \le 19$

a	素因数分解	m
58	$[2, 29]$	11
13	$[13]$	12
62	$[2, 31]$	12
51	$[3, 17]$	13
897	$[3, 13, 23]$	13
1431	$[3^3, 53]$	13
820719	$[3^3, 113, 269]$	13
1023	$[3, 11, 31]$	14
57	$[3, 19]$	15
74	$[2, 37]$	15
92097	$[3^5, 379]$	15
17	$[17]$	16
55	$[5, 11]$	16
261	$[3^2, 29]$	16
11097	$[3^4, 137]$	16
808461	$[3^6, 1109]$	16

表 9: $P = 3; -18 \leq m \leq 19$

a	素因数分解	m
82	$[2, 41]$	17
455	$[5, 7, 13]$	17
19	$[19]$	18
86	$[2, 43]$	18
175	$[5^2, 7]$	18
279	$[3^2, 31]$	18
363	$[3, 11^2]$	18
11259	$[3^4, 139]$	18
69	$[3, 23]$	19
1593	$[3^3, 59]$	19
93069	$[3^5, 383]$	19
156651	$[3, 11, 47, 101]$	19
706509	$[3^3, 137, 191]$	19

5.1 $P=3, m=0$

$m=0$ のとき詳しく調べよう．$2\sigma(a)=3a+q$ が方程式である．

表 10: $P=3, m=0$

e	a	factor
	4	2^2
2	117	3^2*13
6	796797	3^6*1093
	1212741	3^2*47^2*61

素数べきの解 2^2,

正規形の解 $a=117=3^2*13$, $a=796797=3^6*1093$.

さらに異形の解 $a=1212741=3^2*47^2*61$ がある．この形は天翔る竜を想起させるのでリュウとよぶ.

伏せ字問題 $a=p^2r^2q$ として解いてみよう.

$\sigma(a)=P_0R\widetilde{q}, a=p^2r^2q$

$q=c\frac{2P_0R}{3p^2r^2+1-2P_0R}$

表 11:

r	R	Bunshi	Bunbo	q	$q-r-2$
27	757	19682	2	9841	9812
29	871	22646	62	365.2580645	334.2580645
31	993	25818	130	198.6	165.6
33	1123	29198	206	141.7378641	106.7378641
35	1261	32786	290	113.0551724	76.05517241
37	1407	36582	382	95.76439791	56.76439791
39	1561	40586	482	84.2033195	43.2033195
41	1723	44798	590	75.92881356	32.92881356
43	1893	49218	706	69.71388102	24.71388102
45	2071	53846	830	64.8746988	17.8746988
47	2257	58682	962	61	12
49	2451	63726	1102	57.82758621	6.827586207
51	2653	68978	1250	55.1824	2.1824

意外にも解が少ない．正規形に限って求めてみよう．

表 12: $P=3, m=0$　正規形

e	a	factor
2	117	3^2*13
6	796797	3^6*1093
12	423644039001	$3^{12}*797161$
70	A	B

$A=9398681223266955568884336291512894246732289173595197254503404033277$
$B=3^{70}*375473325748986240197335797912877 3$

この計算結果から
$e\equiv 0 \mod 4 \quad\Rightarrow\quad q$ の末尾 1 桁の数 1,a の末尾 1 桁の数 1.
$e\equiv 2 \mod 4 \Rightarrow q$ の末尾 1 桁の数 3,a の末尾 1 桁の数 7.
これを次に証明する.
$q2=2*q$ とおくとき, $q2=3^{e+1}-1+2m$.
$m=0, e=4K+j, j=0,1,2,3.$ として計算する.

$e\equiv 0 \bmod 4$ の場合

```
1 ?-  q139p_m(3,0,0,0=<5).
e=0  q2= 2=[2]
e=4  q2= 242=[2,11^2]
e=8  q2= 19682=[2,13,757]
e=12  q2= 1594322=[2,797161]
e=16  q2= 129140162=[2,1871,34511]
e=20  q2= 10460353202=[2,13,1093,368089]
```

q=q2/2: 素数になりうる.
例: $e=12, q=797161$

$e\equiv 1 \bmod 4$　の場合

```
2 ?- q139p_m(3,0,1,0=<5).
e=1  q2= 8=[2^3]
e=5  q2= 728=[2^3,7,13]
e=9  q2= 59048=[2^3,11^2,61]
e=13  q2= 4782968=[2^3,547,1093]
e=17  q2= 387420488=[2^3,7,13,19,37,757]
e=21  q2= 31381059608=[2^3,23,67,661,3851]
```

q2/2: 4 の倍数. 素数にならない.

$3^4 = 81 \equiv 1 \bmod 8$.

$q2 = 3^{4K+2} - 1 \equiv 9 - 1 \equiv 0 \bmod 8$.

$e \equiv 2 \bmod 4$ の場合

```
3 ?- q139p_m(3,0,2,0=<5).
e=2  q2= 26=[2,13]
e=6  q2= 2186=[2,1093]
e=10  q2= 177146=[2,23,3851]
e=14  q2= 14348906=[2,11^2,13,4561]
e=18  q2= 1162261466=[2,1597,363889]
e=22  q2= 94143178826=[2,47,1001523179]
```

q2/2: 素数になりうる.

$e = 2, q = 13$, $e = 6, q = 1093$.

$e \equiv 3 \bmod 4$ の場合

```
4 ?- q139p_m(3,0,3,0=<5).
e=3  q2= 80=[2^4,5]
e=7  q2= 6560=[2^5,5,41]
e=11  q2= 531440=[2^4,5,7,13,73]
e=15  q2= 43046720=[2^6,5,17,41,193]
e=19  q2= 3486784400=[2^4,5^2,11^2,61,1181]
e=23  q2= 282429536480=[2^5,5,7,13,41,73,6481]
```

q2/2: 8 の倍数. 素数にならない.

$3^4 = 61 \equiv 1 \bmod 16$.

$q2 = 3^{4K+4} - 1 \equiv 3^4 - 1 = 80 \equiv 0 \bmod 16$.

5.2 $P = 3, m = 1$

$m = 1$ なので $2\sigma(a) = 3a + q - 2$ が方程式になる.

表 13: $P = 3, m = 1$

a	factor
2	2
15	$3 * 5$
741	$3 * 13 * 19$
1107	$3^3 * 41$
14883	$3 * 11^2 * 41$
38781	$3^2 * 31 * 139$

表 14: $P = 3, m = 1$ 正規形

e	a	factor
1	15	$3 * 5$
3	1107	$3^3 * 41$
15	308836705316427	$3^{15} * 21523361$
31	572280636715419056279672990187	$3^{31} * 926510094425921$

$e \equiv 3 \bmod 4$ であって $(a = 15$ は除く$)$ q の末尾 1 桁の数は 1 .
a の末尾 1 桁の数 7.
$m = 1$ なので $q2 = 2 * q$ とおくとき, $q2 = 3^{e+1} - 1 + 2m = 3^{e+1} + 1$.
$e = 4K + j, j = 0, 1, 2, 3.$ として計算する.

1) $e \equiv 0 \bmod 4$

```
9 ?- q139p_m(3,1,0,0=<5).
e=0  q2= 4=[2^2]
e=4  q2= 244=[2^2,61]
e=8  q2= 19684=[2^2,7,19,37]
e=12  q2= 1594324=[2^2,398581]
e=16  q2= 129140164=[2^2,103,307,1021]
e=20  q2= 10460353204=[2^2,7^2,43,547,2269]
```

$3^4 = 81 \equiv 1 \bmod 4.$
$q2 = 3^e + 1 = 3^{4K+1} + 1 = 81^K + 1 \equiv 4 \bmod 4.$
$q \equiv 0 \bmod 2$ により q は偶数. おきない.

2) $e \equiv 1 \bmod 4$

```
10 ?- q139p_m(3,1,1,0=<5).
e=1  q2= 10=[2,5]
e=5  q2= 730=[2,5,73]
e=9  q2= 59050=[2,5^2,1181]
e=13  q2= 4782970=[2,5,29,16493]
e=17  q2= 387420490=[2,5,73,530713]
e=21  q2= 31381059610=[2,5,5501,570461]
```

$q2 = 3^{4K+2} + 1 \equiv 10 \bmod 5.$
q/2: 5 の倍数なので素数では無い. おきない.

3) $e \equiv 2 \bmod 4$

```
11 ?- q139p_m(3,1,2,0=<5).
e=2  q2= 28=[2^2,7]
e=6  q2= 2188=[2^2,547]
e=10  q2= 177148=[2^2,67,661]
e=14  q2= 14348908=[2^2,7,31,61,271]
e=18  q2= 1162261468=[2^2,2851,101917]
e=22  q2= 94143178828=[2^2,23535794707]
```

$q2 = 3^{4K+3} + 1 \equiv 27 + 1 = 28 \bmod 8.$
$q \equiv 14 \bmod 4.$
q 偶数になり矛盾.

4) $e \equiv 3 \bmod 4$

```
12 ?- q139p_m(3,1,3,0=<5).
e=3  q2= 82=[2,41]
e=7  q2= 6562=[2,17,193]
e=11  q2= 531442=[2,41,6481]
e=15  q2= 43046722=[2,21523361]
e=19  q2= 3486784402=[2,41,42521761]
e=23  q2= 282429536482=[2,17,97,193,577,769]
```

q/2:素数になりうる.
$e=3, q=41; e=15, q=21523361.$
$q2=3^{4K+4}+1 \equiv 81+1=82 \bmod 5.$
$q \equiv 41 \equiv 1 \bmod 5$; $q \equiv 1 \bmod 10.$

$$a=3^e q = a = 3^{4K+3} q \equiv 27 \equiv 2 \bmod 5.$$

ゆえに $a \equiv 7 \bmod 10.$

5.3 伏せ字問題 $3r^2q$

$a=3r^2q$ が $2\sigma(a)=3a+q-2$ を満たすとする.
$R=1+r+r^2, \widetilde{q}=q+1$ とおくとき,
$2\sigma(a)=8R(q+1)$, $3a+q-2=9r^2q+q+2$ なので

$$8R(q+1)=9r^2q+q+2.$$

これを q について解くとき

$$q=\frac{8R+2}{1+r^2-8R}=\frac{8r^2+8r+10}{r(r-8)-7}$$

表 15:

r	bunsi	bunbo	q	$q-r-2$
11	1066	26	41	28
13	1466	58	25.27586207	10.27586207
17	2458	146	16.83561644	-2.164383562

これより解は $r=11, q=41; a=3*11^2*41.$

5.4 素数解

ここで素数解 $a=2$ があるので一般化する.
$2\sigma(a)=3a+q-2m$ に素数解 p があるとする.
$2(p+1)=3p+p-2m$ により $p=m+1.$
よって一般に $m+1$ が素数 p なら, m だけ平行移動した完全数の解に $a=p=m+1$ がある.

5.5 2素数の積の解

2素数の積の解 $a = 15 = 3 * 5$ があるのでこれを一般化する.

$a = pq (p < q :$ 素数$)$ とする.

$2\sigma(a) = 2(p+1)(q+1), 3a + q - 2m = 3pq + q - 2m$ により $\Delta = p + q$ を用いると

$2(pq + \Delta + 1) = 3pq + q - 2m$ によって,

$$2(\Delta + 1) = pq + q - 2m.$$

$2p + q + 2 = pq - 2m$ を変形して $q\overline{p} = 2p + 2m + 2 = 2\overline{p} + 2m + 4.$

$q_0 = q - 2$ とおくとき,

$$q_0\overline{p} = 2m + 4.$$

$m = 1$ のとき, $q_0\overline{p} = 6$. q_0 は奇数なので, $q_0 = 3; q = 5. \overline{p} = 2; p = 3.$

よって, $a = 15.$

$m = 2$ のとき, $q_0\overline{p} = 8$. q_0 は奇数なので, $q_0 = 3; q = 5. \overline{p} = 8; p = 9.$　矛盾

$m = 3$ のとき, $q_0\overline{p} = 10$. q_0 は奇数なので, $q_0 = 5; q = 7. \overline{p} = 2; p = 3.$

よって, $a = 21.$

5.6 $P=3, m=2$

$m=2$ なので $2\sigma(a)=3a+q-4$ が方程式

表 16: $P=3, m=2$

a	factor
3	3
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7
6561	3^8
19683	3^9
59049	3^{10}
99807	$3*17*19*103$
177147	3^{11}
531441	3^{12}
603681	$3*13*23*673$
1594323	3^{13}

$a=3=m+1=2+1$ という素数解がある.

$a=3^e$ とおく.

$2\sigma(a)=3^{e+1}-1, 3a+q-4=3^{e+1}+3-4$ により $2\sigma(a)=3a+q-4$ なので 3^e はすべて解になる.

一般に $m=P-1$ のとき $a=P^e$ はすべて解になる.

$a=99807=3*17*19*103$, $a=603681=3*13*23*673$ が 2 つでてきた. これはモンスターというしかない.

これらを伏字問題と考えて解いてみよう.

5.7 伏字問題 $3*17rq$

$a=3*17rq$ が $2\sigma(a)=3a+q-4$ の解とする.

$$\sigma(a)=\sigma(3*17rq)=4*18\widetilde{rq}$$

$$3a+q-4=3*51rq+q-4=153rq+q-4$$

$A=\widetilde{rq}, B=qr, \Delta=q+r$ とおくとき $\sigma(a)=\sigma(3*17rq)=4*18A$, $2*4*18A=144(B+\Delta+1)$ なので

$$144(B+\Delta+1)=153B+q-4.$$

整理して

$$9B=144r+143q+148.$$

$144=9*16$ なので, $9B-144r=9r(q-16)$.

$r_0=r-16, q_0=q-16$ とおくと

$$9rq_0=143q+148=143q_0+143*16+148.$$

$$q_0(9r-143)=143*16+148=2436=2^2*3*29.$$

q_0 は奇数なので, $1,3,29,3*29$ のどれか

i) $q_0=1; q=17$. $9r-143=2436; 9r=2436+143=2579$; 素数なので 9 で割れない.

ii) $q_0=3*29=87; q=87+16=103$. $9r-143=28; 9r=171=9*19, r=19$: 素数 $q=87+16=103$. $a=3*17*19*103$. これは解.

iii) $q_0=3; q=3+16=19$. $9r-143=4*29=116; 9r=259$, 右辺は 9 で割れないから不可. $q=87+16=103$. $a=3*17*19*103$.

iv) $q_0=29; q=29+16=45$. 非素数なので不可.

5.8 伏字問題の解 $3prq$

この場合は, 先の方法では解けそうもない. 方針を変更する.

$a = 3prq$ は $2\sigma(a) = 3a + q - 4$ の解とする.

$A = \widetilde{rq}, B = qr, \Delta = q + r$ とおくとき

$\sigma(a) = 4(p+1)\widetilde{rp} = 4(p+1)A, 3a + q - 4 = 9pB + q - 4.$

$2\sigma(a) = 3a + q - 4$ によって,

$$8(p+1)A = 9pB + q - 4.$$

これより

$$p(8A - 9B) + 8A = q - 4.$$

$A = B + \Delta + 1$ により

$$p(8(\Delta + 1) - B) = q - 4 - 8(B + \Delta + 1).$$

$$qr(p-4) - q(8p+7) - 8r(p+1) = 12 + 8p. \tag{1}$$

$$q = \frac{8r(p+1) + 8p + 12}{r(p-8) - 8p - 7}$$

分子$=8r(p+1) + 8p + 12$, 分母 $= r(p-8) - 8p - 7$. $p < 8$ なら分母が負. これはおきない.

$p \geq 5, r \geq p + 2, q \geq r + 2$ を思い出しながらエクセルで次の計算を行う.

i).$p = 11$. この場合は微妙な判断が必要.

$r \geq 63$ では $q \geq r + 2$ が成り立たない.

分母が正になるには $r \geq 37$.

r が 37,61 の間の場合 q　は整数にならない.

表 17: $p=11$

r	分子	分母	q	$q-r-2$
31	3076	-2	-1538	-1571
37	3652	16	228.25	189.25
41	4036	28	144.1428571	101.1428571
43	4228	34	124.3529412	79.35294118
47	4612	46	100.2608696	51.26086957
53	5188	64	81.0625	26.0625
59	5764	82	70.29268293	9.292682927
61	5956	88	67.68181818	4.681818182
63	6148	94	65.40425532	0.404255319

ii).$p=13$ の場合.

表 18: $p=13$

r	分子	分母	q	$q-r-2$
17	2020	-26	-77.69230769	-96.69230769
19	2244	-16	-140.25	-161.25
23	2692	4	673	648
29	3364	34	98.94117647	67.94117647
31	3588	44	81.54545455	48.54545455
37	4260	74	57.56756757	18.56756757
41	4708	94	50.08510638	7.085106383
43	4932	104	47.42307692	2.423076923
45	5156	114	45.22807018	-1.771929825

分母が正になるには, $23 \le r \le 43$.
q　が整数になるには $r=23, q=673$. このとき $p=13$.

iii).$p = 17$ の場合.

表 19: $p = 17$

r	分子	分母	q	$q-r-2$
19	2884	28	103	82
23	3460	64	54.0625	29.0625
29	4324	118	36.6440678	5.644067797
31	4612	136	33.91176471	0.911764706

分母が正になるには, $23 \geq r \geq 43$.
q が整数になるには $19 \geq r$.
$q \geq r + 2$ のためには, $r \geq 31$.
r が 19,31 の間の場合 q が整数になるには $r = 19, q = 103$. このとき $p = 17$.

iv).$p \geq 23$.

表 20: $p = 23$

r	分子	分母	q	$q-r-2$
25	4996	184	27.15217391	0.152173913
27	5380	214	25.14018692	$-$ 3.859813084
29	5764	244	23.62295082	$-$ 7.37704918

$p \geq 23$ になると, $q \geq r+2$ が成り立たない.
このようにして計算だけで,$a = 3prq$ の伏せ字問題は解けた.
$a = tprq$ の伏せ字問題は解けないことはないと思う.

6 $P = 5, m = 4$

$P = 5$ なら半素べきの方程式 $4\sigma(a) = 5a + 3q - 16$ となる. この方程式の解としてパソコンで計算すると $a = 4253417 = 7 * 17 * 31 * 1153$ がある.

$P = 3$ のときは因数分解の最初の数は 3 だったので $P = 5$ のときは 5 に違いないと思ったが, 実際は 7 なのだ.

そこで $a = 7 * prq$ とおくとき,

$$\sigma(a) = 8 * (p+1)\widetilde{r}\widetilde{q}, a = 7prq$$

$A = \widetilde{r}\widetilde{q}, B = qr, \Delta = q + r$ とおくとき

$$32(p+1)A = 35prq + 3q - 16 = 35pB + 3q - 16.$$

$$p(32A - 35B) + 32A = 3q - 16$$

に $A = B + \Delta + 1$ 代入して整理すると,

$$B(32 - 3p) + 32\Delta(p+1) + 32(p+1) = 3q - 16.$$

q の 1 次式として整理すれば

$$q((32 - 3p)r + 32(p+1) - 3) + 32(r+1)(p+1) = -16.$$

ゆえに

$$q = \frac{32(p+1)(r+1)+16}{(3p-32)r-32p-29}.$$

これをエクセルに入れる.

分子 $= 32(p+1)(r+1)+16$, 分母 $= (3p-32)r-32p-29$, 入れてその商が q.

r, q は素数で $q \geq r+2 \geq p+2$.

$p < 15$ では解がなく, $p = 17$ で解 $r = 31, q = 1153, a = 4253417$ が発見される.

$p \geq 23$ では解がない.

表 21: $P = 5, m = 4$ のとき

r	bunshi	bunbo	q	$q-r-2$
29	17296	-22	-786.1818182	-817.1818182
31	18448	16	1153	1120
37	21904	130	168.4923077	129.4923077
41	24208	206	117.5145631	74.51456311
43	25360	244	103.9344262	58.93442623
47	27664	320	86.45	37.45
53	31120	434	71.70506912	16.70506912
59	34576	548	63.09489051	2.094890511

7　半素べきの解

究極の完全数の方程式 $(P-1)\sigma(a) = Pa + \mathrm{Maxp}(a)(P-2) - m(P-1)$ に P のべきの解 P^e があるとしよう.

$(P-1)\sigma(a) = P^{e+1}-1, Pa+\mathrm{Maxp}(a)(P-2)-m(P-1) = P^{e+1}+P(P-2)-m(P-1)$

により

$$P^{e+1} - 1 = P^{e+1} + P(P-2) - m(P-1).$$

整理すると $-1 = P(P-2)m(P-1)$ となり, $(P-1)^2 = P(P-2)+1 = m(P-1)$ になり, $m = P-1$.

このとき e の値によらず P^e はみな解である.

逆に $m = P-1$ のとき P^e 以外の解はあるか, を問うてみよう.

P^e(prime power という) 以外の解を半素べき (semi prime power) と呼ぶことにしたい.

半素べきの方程式は

$$(P-1)\sigma(a) = Pa + \mathrm{Maxp}(a)(P-2) - (P-1)^2$$

となる.

$P=2$ なら $\sigma(a) = 2a-1$ となる. この方程式の解を概完全数 (almost perfect numbers) という. しかし実例はまだ見つかっていない.

無いことの証明もない. 概完全数の存在問題は未解決である.

$P=3$ なら $2\sigma(a) = 3a+q-4$ となる. この方程式の解として

$a = 3*17*19*103$, $a = 603681 = 3*13*23*673$ がある.

$P=5$ なら

$4\sigma(a) = 5a+3q-16$ となる. この方程式の解として

$P=11$ なら

$10\sigma(a) = 11a+9q-100$ となる. この方程式の解として次の結果が得られた.

表 22: $P = 11, m = 10$

a	factor
11	11
121	11^2
1331	11^3
8303	$19^2 * 23$
14641	11^4
161051	11^5
1148477	$11 * 131 * 797$
1771561	11^6

$P = 11, m = 10$ のモンスター解 $a = 8303 = 19^2 * 23$ について 伏せ字問題 r^2q を考える.

7.1 伏せ字問題 r^2q

$a = r^2q, (r < q)$ のとき, $R = 1 + r + r^2$ とおくとき
$\sigma(a) = R(q+1), 11a + 9q - 100 = 11r^2q + 9q - 100$ によって

$$10(R(q+1)) = 11a + 9q - 100 = 11r^2q + 9q - 100.$$

これによって

$$q(10R - 11r^2 - 9) = -100 - 10R.$$

整理して

$$q(1 + 10r - r^2) = -100 - 10R.$$

ゆえに

$$q(r^2 - 1 - 10r) = 100 + 10R = 10(10 + R).$$

$$q = \frac{10(10+R)}{r^2 - 1 - 10r} = \frac{10(11 + r(r+1))}{r(r-10) - 1}.$$

$r \geq 7$ について計算し, $q, q - r - 2$ を求めると, $r = 19, q = 23$ のみ救われる.

表 23: $P = 11, m = 10, r \geq 7$

r	分子	分母	q	$q - r - 2$
7	670	-22	-30.45454545	-39.45454545
9	1010	-10	-101	-112
11	1430	10	143	130
13	1930	38	50.78947368	35.78947368
17	3170	118	26.86440678	7.86440678
19	3910	170	23	2
23	5630	298	18.89261745	-6.10738255

7.2 伏せ字問題 prq

$a = prq, ((p < r < q):$ 素数$) A = \widetilde{rq}, B = rq, \Delta = r + q$ のとき,

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - \overline{P}^2$$

に $a = prq, A = \widetilde{rq}, B = rq, \Delta = r + q$ のとき,

$$\overline{P}(p+1)A - PpB = (P-2)q - \overline{P}^2.$$

$$\overline{P}(B + \Delta + 1)A - PpB = (P-2)q - \overline{P}^2.$$

$$q = \frac{(P-1)(p+1)(r+1) + \overline{P}^2}{Ppr + 9 - (P-1)(p+1)r - (P-1)(p+1)}.$$

ここで中断

8 一般の概完全数

$a = P^e$ なら

$$\overline{P}\sigma(a) = aP - 1$$

を満たす.

この式は半素べきの方程式に比べると簡単である.

この解で 素べきでない場合, 一般の概完全数でという.

異なる 2 素数の積 rq の形にかける一般の概完全数を探してみよう.

8.1 素数の積

異なる 2 素数の積 rq の形にかける一般の概完全数を探してみよう.

$a = rq$ とおいて一般の概完全数の方程式に代入する.

$$\overline{P}\widetilde{r}\widetilde{q} - Prq = -1.$$

を満たす. 以前使った記号を再び用いると

$$(P-1)A - PB = -1.$$

$A = B + \Delta + 1$ によれば

$$(P-1)(B + \Delta + 1) - PB = -1$$

これを整理すると

$$B - \overline{P}\Delta = P.$$

一方,$r_0 = r - \overline{P}, q_0 = q - \overline{P}$ を使うと

$$r_0 q_0 = B - \overline{P}\Delta + \overline{P}^2.$$

これより,

$$r_0 q_0 = P + P^2 = P^2 - P + 1.$$

$D = P^2 - P + 1$ とおいて, 因数分解 $r_0 q_0 = D$ によって得られた, r_0, q_0 に $\overline{P}$ を加えた r, q が素数なら $a = rq$ が概完全数になる.

これはパソコンで解を探すとてもよい例である.

8.2 一般の概完全数の例

表 24: 一般の概完全数の例

a	factor
prime=5	
77	$a = 7 * 11$
prime=11	
611	$a = 13 * 47$
prime=17	
2033	$a = 19 * 107$
1073	$a = 29 * 37$
prime=31	
6031	$a = 37 * 163$
prime=37	
5293	$a = 67 * 79$
prime=41	
25241	$a = 43 * 587$
prime=47	
9983	$a = 67 * 149$
prime=73	
65017	$a = 79 * 823$
prime=89	
50249	$a = 109 * 461$

8.3 $P = 3, m = 3$

$m = 3$ なので $2\sigma(a) = 3a + q - 6$ が方程式

表 25: $P = 3, m = 3$

a	factor
21	$3 * 7$
1161	$3^3 * 43$
89181	$3^5 * 367$

pq 形の解に加えて, 正規形の解
$a = 1161 = 3^3 * 43$,$a = 89181 = 3^5 * 367$

表 26: $P = 3, m = 3$; 正規形

a	factor
21	$3 * 7$
1161	$3^3 * 43$
89181	$3^5 * 367$
581179941	$3^9 * 29527$
A	B
C	D

$A = 29950171665240520173552997162026013851792610751822054 5401$
$B = 3^{59} * 2119557913760810175714721 6603$
$C = 159167491799470872815531783629094754615308050339358788840978581$
$D = 3^{65} * 1545157719131630618096032 0901767$

a の末尾 1 桁の数 1.
q の末尾 1 桁の数 3,7.

8.4 $P = 3, m = 4$

$5 = m + 1$ なので 5 が素数解.
正規形の解 $a = 153 = 3^2 * 17$, $a = 514173^2 * 29 * 197$.
第 2 正規形の解

表 27: $P = 3, m = 4$

a	factor
5	5
153	$3^2 * 17$
27639	$3^2 * 37 * 83$
51417	$3^2 * 29 * 197$
799713	$3^6 * 1097$
965007	$3^3 * 103 * 347$

$a = 27639 = 3^2 * 37 * 83$, $a = 51417 = 3^2 * 29 * 197$, $a = 965007 = 3^3 * 103 * 347$.
これらが本当の第 2 正規形と言ってよいかどうか.

9　$P=3$のときの第２正規形

$P=3$ なので $2\sigma(a)=3a+q-2m$ が方程式でありこれに
第２正規形の解 $a=3^e rq(3<r<q:$ 素数$)$ があるとする.
$N=3^{e+1}-1, A=\widetilde{r}\widetilde{q}, B=rq, \Delta=r+q$ とおくとき

$$2\sigma(a)=N\widetilde{r}\widetilde{q}=NA, 3a+q-2m=(N+1)B+q-2m$$

なので

$$NA=(N+1)B+q-2m.$$

$NA=N(B+\Delta+1)=(N+1)B+q-2m$ により

$$B-N\Delta=N+2m-q.$$

これが基本方程式になる.
$q_0=q-N, r_0=r-N$ とおくとき

$$q_0r_0=qr-N\Delta+N^2=B-N\Delta+N^2.$$

これより

$$q_0r_0=B-N\Delta+N^2=N+2m-q+N^2$$

$N-q=-q_0$ なので

$$q_0(r_0+1)=2m+N^2.$$

$D_1=2m+N^2$ とおくとき $\widetilde{r_0}=r_0+1$ を使うと

$$q_0\widetilde{r_0}=D_1.$$

9.1　$m=4$ のときの計算

$e=2, m=4$ とおくとき, $N=3^3-1=26, D_1=26^2+8=684=2^2*3^2*19.$
$q_0:$ 奇数, $\widetilde{r_0}$:偶数 なので

i) $q_0=9*19 :, \widetilde{r_0}=4$
$r_0=3, r=29; q_0=9*19, q=197$ $a=3^2*31*197$

ii) $q_0=57 :, \widetilde{r_0}=12$
$r_0=11, r=37; q_0=57, q=83$ $a=3^2*37*83$

iii) $q_0 = 19 :, \widetilde{r_0} = 36$
$r_0 = 35, r = 61; q_0 = 19, q = 45$:非素数.

表 28: $P = 3, m = 4,$ 第二正規形

e	a	factor
2	51417	$3^2 * 29 * 197$
2	27639	$3^2 * 37 * 83$
3	965007	$3^3 * 103 * 347$
5	4162847823	$3^5 * 751 * 22811$
11	277979312695831119	$3^{11} * 695047 * 2257691$

10 第 2 正規形, 一般の場合

$\overline{P}\sigma(a) = Pa + (P-2)q - m\overline{P}$ が方程式でありこれに
第 2 正規形の解 $a = P^e rq(P < r < q:$ 素数$)$ があるとする.
$N = P^{e+1} - 1, A = \widetilde{r}\widetilde{q}, B = rq, \Delta = r + q$ とおくとき

$$\overline{P}\sigma(a) = N\widetilde{r}\widetilde{q} = NA, Pa + (P-2)q - m\overline{P} = (N+1)B + (P-2)q - m\overline{P}$$

なので

$$NA = (N+1)B + (P-2)q - m\overline{P}.$$

$$NA = N(B + \Delta + 1) = (N+1)B + (P-2)q - m\overline{P}.$$
$$B - N\Delta = N - (P-2)q + m\overline{P}.$$

これが基本方程式になる.

$q_0 = q - N, r_0 = r - N$ とおくとき

$$q_0 r_0 = qr - N\Delta + N^2 = B - N\Delta + N^2.$$

これより

$$q_0 r_0 = N^2 + N - (P-2)q + m\overline{P} = N^2 + N - (P-2)(q_0 + N) + m\overline{P}$$

$$q_0(r_0 + P - 2)) = N^2 + N(3-P) + m\overline{P}.$$

$D_P = N^2 + N(3-P) + m\overline{P}$ とおくとき $r_{0,P} = r_0 + P - 2$ を使うと

$$q_0 r_{0,P} = D_P. \tag{2}$$

これが基本方程式になる.

10.1 $P = 3, m = 6$

$7 = m + 1$ により 7 が素数解.

10.2 $P = 3, m = 7$

2 素数の積 pq が解とする.
$m = 7$ のとき, $q_0\overline{p} = 4{+}2{*}7 = 18$. q_0 は奇数なので, $q_0 = 9; q = 11.\overline{p} = 2; p = 3$.
$a = 3 * 11$.

表 29: $P = 3, m = 6$

a	factor
7	7
171	$3^2 * 19$
10287	$3^4 * 127$

表 30: $P = 3, m = 7$

a	factor
33	$3 * 11$
385	$5 * 7 * 11$
1269	$3^3 * 47$
2975	$5^2 * 7 * 17$
53751	$3 * 19 * 23 * 41$

10.3 $P = 3, m = 8$

表 31: $P = 3, m = 8$

a	factor
35	$5 * 7$
51939	$3^2 * 29 * 199$
279055	$5 * 7^2 * 17 * 67$
279609	$3 * 11 * 37 * 229$
1336047	$3 * 17^2 * 23 * 67$

2 素数の積 pq が解とする.

$m = 8$ のとき, $q_0\overline{p} = 4+2*8 = 20$. q_0 は奇数なので, $q_0 = 5; q = 7.\overline{p} = 4; p = 5$. $a = 5 * 7$.

表 32: $P = 3, m = 8$

e	a	factor
2	51939	$3^2 * 29 * 199$
4	10214836272423	$3^8 * 36821 * 42283$
11	435027039990994161	$3^{11} * 612671 * 4008253$
12	21539587380792522005259	$3^{12} * 1594421 * 25420220719$

10.4 $P = 3, m = 9$

表 33: $P = 3, m = 9$

a	factor
25	5^2
39	$3 * 13$
90639	$3^5 * 373$

2 素数の積 pq が解とする.

$m = 9$ のとき, $q_0\overline{p} = 4 + 2 * 9 = 22$. q_0 は奇数なので, $q_0 = 11; q = 13.\overline{p} = 2; p = 3$.

$a = 5 * 7$.

$2\sigma(a) = 3a + q - 2m$ に素数のべき解 $a = p^e$ があるとする.

$\sigma(a) = \sigma(p^e) = \dfrac{p^{e+1} - 1}{\overline{p}}$ によって $2\sigma(a) = 3a + q - 2m$ を用いて

$$2(p^{e+1} - 1) = (3p^e + p - 2m)(p - 1).$$

$$-2 = p^e(p - 3) + p(p - 1) + 2m(1 - p).$$

$\overline{p} = p - 1$ に注意して

$$0 = p^e(p - 3) + 2 + p(p - 1) + 2m(1 - p) = p^e(\overline{p} - 2) + 2 + p\overline{p} - 2m\overline{p}.$$

整理して

$$p^e(\overline{p} - 2) + 2 + p\overline{p} - 2m\overline{p} = \overline{p}(p^e + p - 2m + 2(1 + p + \cdots + pe - 1))$$

これより
$$2m = p^e + p - 2(1 + p + \cdots + p^{e-1}).$$

$e = 2$ のとき, $2m = p(p-1) - 2$
$p = 3$ のとき $2m = p(p-1) - 2 = 4$. $m = 2$ のとき $a = 3^2$ が解.
$p = 5$ のとき $2m = p(p-1) - 2 = 18$. $m = 9$ のとき $a = 5^2$ が解.

$e = 3$ のとき, $2m = p^2(p-2) - p - 2$.
$p = 2$ のとき, $2m = -4$. $m = -2$ のとき $a = 2^3$.
$p = 3$ のとき, $2m = 9 - 5 = 4$. $m = 2$ のとき $a = 3^3$.

一般に, $p = 3, m = 2$ とすると, $4 = 3^e + 3 - 2(1 + 3 + \cdots + 3^{e-1}) = 3^e + 3 - (3^e - 1)$ が成り立ち, $a = 3^e$ が解になる.

10.5 $P = 3, m = 10$

表 34: $P = 3, m = 10$

a	factor
11	11
957	$3 * 11 * 29$
10611	$3^4 * 131$
112805	$5 * 7 * 11 * 293$
607269	$3 * 13 * 23 * 677$
804087	$3^6 * 1103$

10.6 $P = 3, m = 12$

表 35: $P = 3, m = 12$

a	factor
13	13

10.7 $P = 3, m = 17$

表 36: $P = 3, m = 17$

a	factor
455	$5 * 7 * 13$
1645719	$3 * 17 * 23^2 * 61$

10.8 $P = 3, m = 23$

表 37: $P = 3, m = 23$

a	factor
969	$3 * 17 * 19$
54723	$3 * 17 * 29 * 37$
1017171	$3^3 * 101 * 373$

```
18 ?- univ_nee_P(1,11,3,31).
1131    $a=3*13*29$
41571   $a=3^2*31*149$
25929   $a=3^2*43*67$
1149741 $a=3^3*97*439$
15864881211     $a=3^5*733*89069$
429869722329    $a=3^6*2203*267667$
22593617793     $a=3^6*2699*11483$
34482794366781  $a=3^7*6577*2397319$
2784051315634401        $a=3^8*19699*21540859$
4977184799892794481     $a=3^{10}*177211*475642379$
```

10.9 $P = 3, m = -1$

10.10 $P = 3, m = -2$

表 38: $P = 3, m = -1$

a	factor
27755	$5 * 7 * 13 * 61$
218225	$5^2 * 7 * 29 * 43$

表 39: $P = 3, m = -2$

a	factor
8	2^3
99	$3^2 * 11$
759	$3 * 11 * 23$
795339	$3^6 * 1091$

10.11 $P = 3, m = -3$

10.12 $P = 3, m = -4$

10.13 $P = 3, m = -5$

表 40: $P = 3, m = -2$, 第二正規形の解

e	a	factor
4	19184931	$3^4 * 433 * 547$
5	8061750261	$3^5 * 739 * 44893$
5	721889577	$3^5 * 947 * 3137$
5	629690031	$3^5 * 1019 * 2543$
7	998897581791	$3^7 * 7331 * 62303$
12	156372861294706304709	$3^{12} * 1608337 * 182948677$
13	43612339225270702734885159	$3^{13} * 4782971 * 5719200505223$

表 41: $P = 3, m = -3$

a	factor
999	$3^3 * 37$

表 42: $P = 3, m = -4$

a	factor
147	$3 * 7^2$
3185	$5 * 7^2 * 13$
50373	$3^2 * 29 * 193$
283176230906781	$3^9 * 100511 * 143137$

表 43: $P = 3, m = -5$

a	factor
663	$3 * 13 * 17$
38223	$3^2 * 31 * 137$
87237	$3^5 * 359$
862299	$3^3 * 109 * 293$
15862743783	$3^5 * 733 * 89057$
760262656887	$3^7 * 7669 * 45329$