

書泉グランデ  
高校生もわかる新しい数論研究  
第3期 予稿2; 完全数の垂直的展開

飯高 茂

2017 年5月26日

表 1:  $P = 5; -50 \leq m \leq -37$

$a$	素因数分解	$m$
333	$[3^2, 37]$	-50
50813	$[7^2, 17, 61]$	-50
3619	$[7, 11, 47]$	-49
13375	$[5^3, 107]$	-49
13625	$[5^3, 109]$	-47
9715	$[5, 29, 67]$	-46
279	$[3^2, 31]$	-44
4081	$[7, 11, 53]$	-43
14125	$[5^3, 113]$	-43
261	$[3^2, 29]$	-42
8695	$[5, 37, 47]$	-40
147	$[3, 7^2]$	-39
10295	$[5, 29, 71]$	-38
4543	$[7, 11, 59]$	-37
8815	$[5, 41, 43]$	-37

表 2:  $P = 5; -6 \leq m \leq -14$

$a$	素因数分解	$m$
207	$[3^2, 23]$	-36
4697	$[7, 11, 61]$	-35
10585	$[5, 29, 73]$	-34
171	$[3^2, 19]$	-32
845	$[5, 13^2]$	-32
153	$[3^2, 17]$	-30
5159	$[7, 11, 67]$	-29
15875	$[5^3, 127]$	-29
117	$[3^2, 13]$	-26
5467	$[7, 11, 71]$	-25
16375	$[5^3, 131]$	-25

表 3:  $P = 5; -6 \leq m \leq -14$

$a$	素因数分解	$m$
99	$[3^2, 11]$	-24
175	$[5^2, 7]$	-24
1445	$[5, 17^2]$	-23
5621	$[7, 11, 73]$	-23
11455	$[5, 29, 79]$	-22
63	$[3^2, 7]$	-20
275	$[5^2, 11]$	-20
114359	$[7, 17, 31^2]$	-20
17125	$[5^3, 137]$	-19
45	$[3^2, 5]$	-18
325	$[5^2, 13]$	-18
6083	$[7, 11, 79]$	-17
9635	$[5, 41, 47]$	-17
17375	$[5^3, 139]$	-17
9805	$[5, 37, 53]$	-16
425	$[5^2, 17]$	-14
12035	$[5, 29, 83]$	-14

表 4:  $P = 5; -13 \leq m \leq 4$

$a$	素因数分解	$m$
6391	[7, 11, 83]	-13
475	[5 <sup>2</sup> , 19]	-12
575	[5 <sup>2</sup> , 23]	-8
6853	[7, 11, 89]	-7
18625	[5 <sup>3</sup> , 149]	-7
18875	[5 <sup>3</sup> , 151]	-5
27	[3 <sup>3</sup> ]	-4
539	[7 <sup>2</sup> , 11]	-2
725	[5 <sup>2</sup> , 29]	-2
12905	[5, 29, 89]	-2
775	[5 <sup>2</sup> , 31]	0
2	[2]	1
35	[5, 7]	1
3059	[7, 19, 23]	1
7469	[7, 11, 97]	1
19625	[5 <sup>3</sup> , 157]	1
3	[3]	2
847	[7, 11 <sup>2</sup> ]	3
5	[5]	4
25	[5 <sup>2</sup> ]	4
125	[5 <sup>3</sup> ]	4
625	[5 <sup>4</sup> ]	4
3125	[5 <sup>5</sup> ]	4
15625	[5 <sup>6</sup> ]	4
78125	[5 <sup>7</sup> ]	4
55	[5, 11]	5
7777	[7, 11, 101]	5

表 5:  $P = 5; 5 \leq m \leq 23$

$a$	素因数分解	$m$
7	[7]	6
925	$[5^2, 37]$	6
65	[5, 13]	7
7931	[7, 11, 103]	7
20375	$[5^3, 163]$	7
637	$[7^2, 13]$	8
10915	[5, 37, 59]	8
11	[11]	10
1025	$[5^2, 41]$	10
85	[5, 17]	11
8239	[7, 11, 107]	11
20875	$[5^3, 167]$	11
13	[13]	12
1075	$[5^2, 43]$	12
95	[5, 19]	13
8393	[7, 11, 109]	13
10865	[5, 41, 53]	13
14065	[5, 29, 97]	14
17	[17]	16
1175	$[5^2, 47]$	16
11285	[5, 37, 61]	16
115	[5, 23]	17
8701	[7, 11, 113]	17
21625	$[5^3, 173]$	17
19	[19]	18
23	[23]	22
1325	$[5^2, 53]$	22
14645	[5, 29, 101]	22

表 6:  $P = 5; 23 \leq m \leq 38$

$a$	素因数分解	$m$
145	[5, 29]	23
22375	[5 <sup>3</sup> , 179]	23
155	[5, 31]	25
22625	[5 <sup>3</sup> , 181]	25
14935	[5, 29, 103]	26
29	[29]	28
833	[7 <sup>2</sup> , 17]	28
1475	[5 <sup>2</sup> , 59]	28
31	[31]	30
1525	[5 <sup>2</sup> , 61]	30
185	[5, 37]	31
9779	[7, 11, 127]	31
343	[7 <sup>3</sup> ]	34
15515	[5, 29, 107]	34
205	[5, 41]	35
10087	[7, 11, 131]	35
23875	[5 <sup>3</sup> , 191]	35
37	[37]	36
1675	[5 <sup>2</sup> , 67]	36
215	[5, 43]	37
221	[13, 17]	37
24125	[5 <sup>3</sup> , 193]	37
169	[13 <sup>2</sup> ]	38
931	[7 <sup>2</sup> , 19]	38
15805	[5, 29, 109]	38

表 7:  $P = 5; 40 \leq m \leq 49$

$a$	素因数分解	$m$
41	[41]	40
1775	$[5^2, 71]$	40
12395	$[5, 37, 67]$	40
235	$[5, 47]$	41
10549	$[7, 11, 137]$	41
24625	$[5^3, 197]$	41
43	[43]	42
1825	$[5^2, 73]$	42
247	[13, 19]	43
3857	$[7, 19, 29]$	43
10703	$[7, 11, 139]$	43
12095	$[5, 41, 59]$	43
24875	$[5^3, 199]$	43
47	[47]	46
16385	$[5, 29, 113]$	46
55811	$[7^2, 17, 67]$	46
265	$[5, 53]$	47
1975	$[5^2, 79]$	48

# 1 $P = 7, 49 \leq m \leq 40$

表 8:  $P = 7; 49 \leq m \leq 40$

$a$	素因数分解	$m$
63623	[7, 61, 149]	-49
425	[5 <sup>2</sup> , 17]	-48
55699	[7, 73, 109]	-47
121079	[7 <sup>3</sup> , 353]	-47
539	[7 <sup>2</sup> , 11]	-46
9583	[7, 37 <sup>2</sup> ]	-45
325	[5 <sup>2</sup> , 13]	-44
637	[7 <sup>2</sup> , 13]	-44
64477	[7, 61, 151]	-43
275	[5 <sup>2</sup> , 11]	-42
123137	[7 <sup>3</sup> , 359]	-41
833	[7 <sup>2</sup> , 17]	-40
7843	[11, 23, 31]	-40



## 2 $P = 7; -39 \leq m \leq -21$

表 9:  $P = 7; -39 \leq m \leq -21$

$a$	素因数分解	$m$
11033	[11, 17, 59]	-39
175	[5 <sup>2</sup> , 7]	-38
931	[7 <sup>2</sup> , 19]	-38
59563	[7, 67, 127]	-36
1127	[7 <sup>2</sup> , 23]	-34
55853	[7, 79, 101]	-34
11407	[11, 17, 61]	-33
125881	[7 <sup>3</sup> , 367]	-33
1421	[7 <sup>2</sup> , 29]	-28
57743	[7, 73, 113]	-27
127939	[7 <sup>3</sup> , 373]	-27
1519	[7 <sup>2</sup> , 31]	-26
67039	[7, 61, 157]	-25
32	[2 <sup>5</sup> ]	-24
81	[3 <sup>4</sup> ]	-24
56959	[7, 79, 103]	-22
129997	[7 <sup>3</sup> , 379]	-21

### 3 $P = 7; 20 \leq m \leq -6$

表 10:  $P = 7; 20 \leq m \leq -6$

$a$	素因数分解	$m$
1813	$[7^2, 37]$	-20
61439	$[7, 67, 131]$	-20
7163	$[13, 19, 29]$	-19
131369	$[7^3, 383]$	-17
1573	$[11^2, 13]$	-16
2009	$[7^2, 41]$	-16
12529	$[11, 17, 67]$	-15
2107	$[7^2, 43]$	-14
133427	$[7^3, 389]$	-11
2303	$[7^2, 47]$	-10
12943	$[7, 43^2]$	-8
69601	$[7, 61, 163]$	-7
27	$[3^3]$	-6
125	$[5^3]$	-6

#### 4 $P = 7; -4 \leq m \leq 5$

表 11:  $P = 7; -4 \leq m \leq 5$

$a$	素因数分解	$m$
8	$[2^3]$	-4
2597	$[7^2, 53]$	-4
13277	$[11, 17, 71]$	-3
136171	$[7^3, 397]$	-3
7657	$[13, 19, 31]$	-1
9	$[3^2]$	0
2	$[2]$	1
126293	$[17^2, 19, 23]$	1
137543	$[7^3, 401]$	1
3	$[3]$	2
2891	$[7^2, 59]$	2
59171	$[7, 79, 107]$	2
77	$[7, 11]$	3
13651	$[11, 17, 73]$	3
5	$[5]$	4
2989	$[7^2, 61]$	4
64253	$[7, 67, 137]$	4
91	$[7, 13]$	5
71309	$[7, 61, 167]$	5

## 5 $P = 7; 6 \leq m \leq 19$

表 12:  $P = 7; 6 \leq m \leq 19$

$a$	素因数分解	$m$
7	[7]	6
49	[7 <sup>2</sup> ]	6
343	[7 <sup>3</sup> ]	6
2401	[7 <sup>4</sup> ]	6
16807	[7 <sup>5</sup> ]	6
117649	[7 <sup>6</sup> ]	6
9361	[11, 23, 37]	8
119	[7, 17]	9
140287	[7 <sup>3</sup> , 409]	9
11	[11]	10
3283	[7 <sup>2</sup> , 67]	10
133	[7, 19]	11
13	[13]	12
65191	[7, 67, 139]	12
3479	[7 <sup>2</sup> , 71]	14
60277	[7, 79, 109]	14
161	[7, 23]	15
17	[17]	16
3577	[7 <sup>2</sup> , 73]	16
19	[19]	18
143717	[7 <sup>3</sup> , 419]	19

## 6 $P = 7; 20 \leq m \leq 33$

表 13:  $P = 7; 20 \leq m \leq 33$

$a$	素因数分解	$m$
221	[13, 17]	20
2057	[11 <sup>2</sup> , 17]	20
203	[7, 29]	21
14773	[11, 17, 79]	21
144403	[7 <sup>3</sup> , 421]	21
23	[23]	22
3871	[7 <sup>2</sup> , 79]	22
217	[7, 31]	23
73871	[7, 61, 173]	23
247	[13, 19]	24
169	[13 <sup>2</sup> ]	25
4067	[7 <sup>2</sup> , 83]	26
29	[29]	28
259	[7, 37]	29
31	[31]	30
147833	[7 <sup>3</sup> , 431]	31
299	[13, 23]	32
4361	[7 <sup>2</sup> , 89]	32
287	[7, 41]	33
15521	[11, 17, 83]	33
148519	[7 <sup>3</sup> , 433]	33

## 7 $P = 7; 35 \leq m \leq 42$

表 14:  $P = 7; 35 \leq m \leq 42$

$a$	素因数分解	$m$
301	[7, 43]	35
37	[37]	36
2299	[11 <sup>2</sup> , 19]	38
62489	[7, 79, 113]	38
329	[7, 47]	39
3179	[11, 17 <sup>2</sup> ]	39
150577	[7 <sup>3</sup> , 439]	39
41	[41]	40
4753	[7 <sup>2</sup> , 97]	40
10373	[11, 23, 41]	40
76433	[7, 61, 179]	41
43	[43]	42

## 8 $P = 7; 43 \leq m \leq 49$

表 15:  $P = 7; 43 \leq m \leq 49$

$a$	素因数分解	$m$
9889	[11, 29, 31]	43
64897	[7, 73, 127]	43
151949	[7 <sup>3</sup> , 443]	43
377	[13, 29]	44
4949	[7 <sup>2</sup> , 101]	44
371	[7, 53]	45
47	[47]	46
5047	[7 <sup>2</sup> , 103]	46
77287	[7, 61, 181]	47
403	[13, 31]	48
437	[19, 23]	49
154007	[7 <sup>3</sup> , 449]	49

## 9 $P = 3$ のとき 完全数まがい

$P = 3$ , 平行移動:  $m$  の究極の完全数の方程式は

$2\sigma(a) = 3a + q - 2m$  になる.

ここで  $a = 21p$ , ( $p > 7$ : 素数) という解が無限にあるとしよう.

$\sigma(a) = \sigma(21p) = 32p$ ,  $q = p$  なので,

$$64(p+1) = 63p + p - 2m.$$

これより,  $m = -32$ . 実際  $2\sigma(a) = 3a + q + 64$  には解  $a = 21p$  が無限にある.

これを一般化する. 底の素数:  $P$ , 平行移動:  $m$  の究極の完全数の方程式は

$$\overline{P}\sigma(a) = Pa + (P-2)q - \overline{P}m$$

である.  $a = Prq$ , ( $P < r < q$ : 素数) の解が無限にあるとし,

$$\overline{P}\sigma(a) = Pa + (P-2)q - \overline{P}m$$

において  $A = (r+1)(q+1)$ ,  $B = rq$ ,  $\Delta = r+q$  を用いるとき  $a = PB$ ,

$$\sigma(a) = (P+1)A, Pa + (P-2)q - \overline{P}m = P^2B + (P-2)q - \overline{P}m$$

によって,

$$\bar{P}(P+1)A = P^2B + (P-2)q - \bar{P}m.$$

$A = B + \Delta + 1$  を使い

$$\bar{P}(P+1)(B + \Delta + 1) = P^2B + (P-2)q - \bar{P}m$$

になるので

$$(P^2 - 1)(B + \Delta + 1) = P^2B + (P-2)q - \bar{P}m \text{ を整理すると}$$

$$(P^2 - 1)(\Delta + 1) = B + (P-2)q - \bar{P}m$$

$$q(P^2 - 1 - P + 2 - r) + (r + 1)(P^2 - 1) = -(P - 1)m.$$

$r = P^2 - P + 1$  とおくとき,

$$(r + 1)(P^2 - 1) = -(P - 1)m. \text{ } P - 1 \text{ で除して}$$

$$m = -(P + 1)(r + 1).$$

## 9.1 $P = 2$ のとき

$P = 2$  のときは以前に扱ったが考え方を整理するため再録する.

$r = P^2 - P + 1 = 3, a = 6q. m = -(P + 1)(r + 1) = -12. -m$  は完全数 6 の 2 倍でこのとき解  $a = 6q$  は B 型の解という.

## 9.2 $P \geq 3$

$P = 3$  のとき,  $r = P^2 - P + 1 = 7, a = 21q.$

$m = -(P + 1)(r + 1) = -32. -m = 32.$  このとき解  $a = 21p$  は B 型の解.

$P = 5$  のとき,  $r = P^2 - P + 1 = 27.$  素数ではない. (ドーピング検査で陽性と判定されたような感じ.)

$P = 7$  のとき,  $r = P^2 - P + 1 = 43.$  素数. このとき解  $a = 7 \times 43q = 301q$  は B 型の解.

$P = 11$  のとき,  $r = P^2 - P + 1 = 111.$  素数ではない.

$P = 13$  のとき,  $r = P^2 - P + 1 = 157.$  素数. このとき解  $a = 13 \times 157q = 2041q$  は B 型の解.

$P = 17$  のとき,  $r = P^2 - P + 1 = 273 = 3 * 7 * 13.$  素数ではない.

$P = 19$  のとき,  $r = P^2 - P + 1 = 343 = 7^3.$  素数ではない.



## 10 さらなる一般化

底が素数:  $P$ , 平行移動:  $m$  の究極の完全数の方程式において  $a = P^e r q$ , ( $P < r, q$ : 素数,  $e > 0$ ) と一般化する.  $A = (r+1)(q+1)$ ,  $B = r q$ ,  $\Delta = r+q$ ,  $N = P^{e+1}-1$  を用いるとき

$$\bar{P}\sigma(a) = NA, (P^{e+1} - 1)A, Pa = (N + 1)B$$

なので

$$N(r + 1)(q + 1) = (N + 1)B + (P - 2)q - m$$

によって,

$$N(B + \Delta + 1) = (N + 1)B + (P - 2)q - \bar{P}m.$$

$$N(\Delta + 1) = B + (P - 2)q - \bar{P}m.$$

ゆえに

$$N(q + r + 1) = qr + (P - 2)q - \bar{P}m.$$

$q$  で整理する.

$$q(N + 2 - P - r) + (r + 1)N = -\bar{P}m.$$

$q$  を消すために

$N + 2 - P - r = 0$  と仮定すると,  $r = N + 2 - P = P^{e+1} - P + 1$  となり

$$(r + 1)N = (r + 1)(P^{e+1} - 1) = -\bar{P}m$$

$$m = -(r + 1)(1 + P + \cdots + P^e)$$

をえる.

## 10.1 計算例

表 16:  $P = 3$

$e$	$r$	$-m$	$Pr$
1	7	32	21
3	79	3200	237
4	241	29282	723
5	727	264992	2181
8	19681	193690562	59043

表 17:  $P = 5$

$e$	$r$	$-m$	$Pr$
4	3121	2438282	9363
6	78121	1525800782	390605

表 18:  $P = 7$

$e$	$r$	$-m$
1	43	352
2	337	19266
5	117643	2306763552
8	40353601	271402225964802