書泉グランデでの講義
高校生も十分わかる新しい数論研究
New Series, 第3期　資料3
オイラーの φ 完全数 ;ツチノコを探せ
2016 年7月22日

飯高 茂

平成28 年7 月19 日

1　オイラーの完全数 についての方程式

自然数 a と互いに素で a 未満の自然数の個数をガウスの定めにしたがって $\varphi(a)$ で示し, これをオイラー関数という.

そこで素数 P を1つとりこれを底とし, $\varphi(P^e)+1+m, (e>1)$ が素数 q になるとき $a=P^eq$ を (P を底とする) m だけ平行移動した (狭義の) オイラー φ 完全数という. これが定義である.

オイラーの φ 完全数 についての方程式は次のとおり:

$$P\varphi(a)=\overline{P}a+Pm-P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$$

ここで $\overline{P}=P-1$, かつ $\mathrm{Maxp}(a)$ は a の最大素因子を示す.

この方程式を満たす解 a を (P を底とする) m だけ平行移動した広義のオイラー φ 完全数という.

ここでは $P=2$ の場合, 広義のオイラー φ 完全数を調べる. この場合,φ 完全数 についての方程式は次のように簡単になる.

$$2\varphi(a)=a+2m-2\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$$

狭義の オイラーの φ 完全数の定義によれば $P=2$ のとき $q=\varphi(P^e)+1+m=2^{e-1}+1+m$ は素数なので m は偶数になる.

しかし方程式 $2\varphi(a)=a+2m-2\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$ ができた以上, m : 奇数の場合も平等に扱ってやりたい.

このように狭義の完全数ではありえない場合についても探求することが大切である.

かくして広義の完全数が導入されたが, 実際に出てくるものは何だろうか. 私はこれらを調べるにあたり心は踊り, ツチノコ [1] を探すような興奮を覚えたのであった.

$P=2$ のとき m だけ平行移動した広義のオイラー φ 完全数を次のように分類した調べる.
I 型. $m \geq 0, m$: 偶数
II 型. $m > 0, m$: 奇数
III 型. $m < 0, m$: 偶数
IV 型. $m \geq 0, m$: 奇数

2 I 型, $m \geq 0, m$: 偶数

2.1 $P=2, m=0$

広義のオイラー φ 完全数をもっとも簡単な場合からパソコンで調べよう.

表 1: $P=2, m=0$

a	素因数分解
12	$2^2 * 3$
40	$2^3 * 5$
544	$2^5 * 17$

2.2 $P=2, m=2$

表 2: $P=2, m=2$

a	素因数分解
20	$2^2 * 5$
56	$2^3 * 7$
176	$2^4 * 11$
608	$2^5 * 19$
8576	$2^7 * 67$
33536	$2^8 * 131$

[1] 日本に生息すると言われる未確認生物. 蛇のようだがもっと太いと言われている.

2.3 $P=2, m=4$

表 3: $P=2, m=4$

a	素因数分解
28	$2^2 * 7$
208	$2^4 * 13$
2368	$2^6 * 37$

これらの解はすべて $a=2^e q, q=2^{e-1}+1+m$: 素数の形になっている. これを通常解という. $m \geq 0$ の場合は, オイラー完全数の基本定理により広義のオイラー φ 完全数は狭義のオイラー φ 完全数になる. パソコンによる結果は基本定理を裏付ける.

3 II 型, $m < 0, m$: 偶数

3.1 $P = 2, m = -2$

表 4: $P = 2, m = -2$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
24	$[2^3, 3]$	8
112	$[2^4, 7]$	48
1984	$[2^6, 31]$	960
32512	$[2^8, 127]$	16128

以上の場合は, パソコンによる全数調査の結果. $m = -2; q = 2^{e+1} - 1$: 素数の場合については wxmaxima を用いて, 指数　$e < 21$ について調べると結果はすぐ出る.

表 5: $P = 2, m = -2; q = 2^{e-1} - 1, a = 2^e q$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	24	$2^3 * 3$	8
4	112	$2^4 * 7$	48
6	1984	$2^6 * 31$	960
8	32512	$2^8 * 127$	16128
14	134201344	$2^{14} * 8191$	67092480
18	34359476224	$2^{18} * 131071$	17179607040
20	549754765312	$2^{20} * 524287$	274876858368

以上からこれらはユークリッドの完全数の 4 倍であることがわかる.

表 6: $P = 2, m = -4$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
36	$[2^2, 3^2]$	12
80	$[2^4, 5]$	32
416	$[2^5, 13]$	192
1856	$[2^6, 29]$	896
7808	$[2^7, 61]$	3840

ここでは $a = 2^2 * 3^2$ が解でこれを非通常解という.

表 7: $P = 2, m = -4; q = 2^{e-1} - 3$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	8	2^3	4
4	80	$2^4 * 5$	32
5	416	$2^5 * 13$	192
6	1856	$2^6 * 29$	896
7	7808	$2^7 * 61$	3840
10	521216	$2^{10} * 509$	260096
11	2091008	$2^{11} * 1021$	1044480
13	33529856	$2^{13} * 4093$	16760832
15	536772608	$2^{15} * 16381$	268369920
21	2199016964096	$2^{21} * 1048573$	1099507433472

$a = 36 = 2^2 * 3^2$ のみが非通常解. それ以外は $a = 2^e q$ とかける解.

3.2 $P=2, m=-6$

表 8: $P=2, m=-6$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
48	$[2^4, 3]$	16
100	$[2^2, 5^2]$	40
352	$[2^5, 11]$	160
7552	$[2^7, 59]$	3712
128512	$[2^9, 251]$	64000

表 9: $P=2, m=-6; q=2^{e-1}-5$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
4	48	$2^4 * 3$	16
5	352	$2^5 * 11$	160
7	7552	$2^7 * 59$	3712
9	128512	$2^9 * 251$	64000
11	2086912	$2^{11} * 1019$	1042432
13	33513472	$2^{13} * 4091$	16752640
19	137436332032	$2^{19} * 262139$	68717903872

$a=100=2^2*5^2$ のみが非通常解. それ以外は $a=2^e q$ とかける解.

3.3 $P = 2, m = -8$

表 10: $P = 2, m = -8$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
196	$[2^2, 7^2]$	84

この場合は異常に解が少ない.
指数 $e = 40$ で解が発見された. 何という僥倖!.

表 11: $P = 2, m = -8; q = 2^{e+1} - 7$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
40	604462909799618005958656	$2^{40} * 549755813881$	X

$X = 302231454899259247165440$

表 12: $P = 2, m = -10$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
60	$[2^2, 3, 5]$	16
72	$[2^3, 3^2]$	24
224	$[2^5, 7]$	96
1472	$[2^6, 23]$	704

非通常解は　$a = 60 = [2^2, 3, 5]$, $a = 72 = [2^3, 3^2]$.

表 13: $P = 2, m = -10; q = 2^{e-1} - 9$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
5	224	$2^5 * 7$	96
6	1472	$2^6 * 23$	704
10	515072	$2^{10} * 503$	257024
12	8351744	$2^{12} * 2039$	4173824
18	34357379072	$2^{18} * 131063$	17178558464

3.4 $P = 2, m = -12$

表 14: $P = 2, m = -12$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
84	$[2^2, 3, 7]$	24
160	$[2^5, 5]$	64
484	$[2^2, 11^2]$	220
6784	$[2^7, 53]$	3328

$a = 84 = [2^2, 3, 7]$, $a = 484 = [2^2, 11^2]$ は非通常解.

表 15: $P=2, m=-12; q=2^{e-1}-11$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
5	160	$2^5 * 5$	64
7	6784	$2^7 * 53$	3328
11	2074624	$2^{11} * 1013$	1036288
19	137433186304	$2^{19} * 262133$	68716331008

4 II 型のときの証明

$P=2$ のとき方程式は

$$2\varphi(a)=a+2m-2(q-1), q=\mathrm{Maxp}(a)$$

により
$a=2^eL(, L:$ 奇数$)$, $S=-m>0$ とおくとき

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q-1+S.$$

$e>1$ を示すために $e=1$ とする.
S と $q-1$ は偶数なので $\mathrm{co}\varphi(L)$ も偶数.
しかし L は奇数, $\varphi(L)$ は偶数なので $\mathrm{co}\varphi(L)=L-\varphi(L)$ も奇数. これ矛盾した.
かくて $e\geq 2$ が示された.

4.1 $S=2$ のときの証明

まず簡単な場合を扱う.
$S=2$ のとき

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q-1+S=q+1.$$

i). L : 素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L)=1$ により ,
$2^{e-1}=1+q$. $q=2^{e-1}-1$. これはメルセンヌ素数. $a=2^eq=4*2^{e-2}q$ これは完全数の 4 倍.

2. L : 非素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L)\geq q$ により ,

$$2^e\mathrm{co}\varphi(L)=2(1+q)\geq 2^eq.$$

$(1+q)\geq 2^{e-1}q$ になり矛盾.

4.2 $S=4$ のときの証明

$m=-4$ なので

$$2\varphi(a)=a-6-2q.$$

$a=2^eL$, L : 奇数, とおくとき

$$2^e\mathrm{co}\varphi(L)=2(3+q).$$

1. L : 素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L)=1$ により ,
$2^{e-1}=3+q$. $q=2^{e-1}-3$. これより, $e=4, q=5, a=2^4*5$ など

2. L : 非素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L)\geq q$ により ,

$$2^e\mathrm{co}\varphi(L)=2(3+q)\geq 2^eq.$$

$3+q\geq 2^{e-1}q$ になる. ゆえに
$3\geq(2^{e-1}-1)q$. $e\geq 2$ のとき $q=3, e=2$ になり $a=2^*3^2$ のみが解.

4.3 $S = 10$ のときの証明

$S = 10$ によって

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 9.$$

$L = q$:素数のとき
$2^{e-1} - 9 = q.$　これは狭義の完全数の場合.

$L = q^2$ のとき
$L = q^2$ のとき

$$2^{e-1}q = q + 9.$$

$(2^{e-1} - 1)q = 9$ により $e = 2, 3.$
$e = 2$ なら $q = 9$ で矛盾.
$e = 3$ なら $q = 3$ となり, $a = 2^3 * 3^2.$

$L = q\mu(q > \mathrm{Maxp}(\mu)$ のとき
$\mathrm{co}\varphi(L) = (q-1)\varphi(L) = (q-1)\mu_0 + \mu.$ ($\mu_0 = \mathrm{co}\varphi(\mu)$ とおいた.)
i) $\mu_0 = 1$ なら μ:素数. $L = q\mu$ により

$$2^{e-1}(q + \mu - 1) = q + 9.$$

$e = 2$ のとき

$$2(q + \mu - 1) = q + 9.$$

$$q = 9 + 2 - 2\mu.$$

L: 奇数なので $\mu \geq 3$ により
$\mu = 3$ なら $q = 5.$ よって, $a = 2^2 * 3 * 5.$
$\mu > 4$ はない.
$e > 2$ のときは矛盾.
ii) $\mu_0 \geq 3$ なら $L = q\mu$ により

$$\mathrm{co}\varphi(L) = (q-1)\varphi(L) = (q-1)\mu_0 + \mu \geq 3(q-1) + \mu \geq 3q + 6.$$

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 9 \geq 2\mathrm{co}\varphi(L) \geq 2(3q + 6).$$

これは矛盾.

4.4 $S=12$ のときの証明

$S=12$ によって

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+11.$$

$L=q$:素数のとき
$2^{e-1}-11=q.$　これは狭義の完全数の場合.

$L=q^2$ のとき
$L=q^2$ のとき

$$2^{e-1}q=q+11.$$

$e=2$ のとき $q=11$. $a=2^2*11^2$.
$L=q\mu(q>\mathrm{Maxp}(\mu)$ のとき
$\mathrm{co}\varphi(L)=(q-1)\varphi(L)=(q-1)\mu_0+\mu$. ($\mu_0=\mathrm{co}\varphi(\mu)$ とおいた.)
i) $\mu_0=1$ なら μ:素数. $L=q\mu$ により

$$2^{e-1}(q+\mu-1)=q+11.$$

$e=2$ のとき

$$2(q+\mu-1)=q+11.$$

$$q=11+2-2\mu.$$

L: 奇数なので $\mu\geq 3$ により
$\mu=3$ なら $q=11+2-6$. よって, $q=7$. $a=2^2*3*7$.
$\mu>4$ はない.
$e>2$ のときは矛盾.
ii) $\mu_0\geq 3$ なら $L=q\mu$ により

$$\mathrm{co}\varphi(L)=(q-1)\varphi(L)=(q-1)\mu_0+\mu\geq 3(q-1)+\mu\geq 3q+6.$$

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+11\geq 2\mathrm{co}\varphi(L)\geq 2(3q+6).$$

これは矛盾.
非通常解は $a=2^2*11^2, a=2^2*3*7$.

5 III 型, $m < 0, m$: 偶数

狭義の オイラーの φ 完全数では起こりえない m : 奇数でかつ負の数のときから調査を開始する. 個々の場合にパソコンによる計算で調べてみよう.

$S = -m > 0$ とおく. $q = \mathrm{Maxp}(a)$ として a の最大素因子 q を導入すると φ 完全数 についての方程式は

$$2\varphi(a) = a - 2S - 2(q-1).$$

a は偶数になるので $a = 2^e L($ L : 奇数) とおくとき

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = S - 1 + q.$$

S : 奇数なので $S - 1 + q$ も奇数. よって $e = 1; a = 2L.$

狭義の オイラーの φ 完全数では $e \geq 2$ が満たされている. S : 奇数という尋常でない場合なので $e = 1$ になったと理解しておく.

したがってこの場合 φ 完全数 についての方程式は次のようにごく簡単になる:

$$\mathrm{co}\varphi(L) = S - 1 + q.$$

5.1 $S = 1$

$S = 1$ のとき φ 完全数 についての方程式

$$\mathrm{co}\varphi(L) = q$$

を解く.

以前オイラーの余関数を詳しく調べていたので結果は推測できて $L = q^2$ が解. したがって $a = 2q^2$.

$2\varphi(a) = a - 2q$ なら $a = 2q^2$ となる.

この結果は美しい (この証明は後で与える).

5.2 $S = 3$ の場合の計算結果

$S = 3$ のとき φ 完全数 についての方程式を解く.

$a < 1000000$ の範囲でパソコンによる解の全数調査をする.

結果として解が無数にでるがみな $a = 6p, (p > 3)$ の形をしている. これを通常解という.

表 16: $P = 2, S = 3$

a	素因数分解
$6p, (p > 3)$	$2 * 3 * p$

6　通常解

$S=p$: 奇素数のとき, $p<q$: 奇素数 について $L=pq$ は
$\mathrm{co}\varphi(L)=p+q-1$, $S-1+q=p-1+q$ により $\mathrm{co}\varphi(L)=S-1+q$ 　を満たす.
$a=2pq$ は次式の解でこれが通常解である.

$$2\varphi(a)=a-2p-2(q-1).$$

このように, $S=p$: 奇素数のとき通常解 $a=2pq$ がある.
$S=p$: 合成数のとき通常解はないが散発的な解はありうる. これらの非通常解を見出すことが興味ある課題である.

6.1　$S=5$ の場合の計算結果

表 17: $P=2, m=-5$

a	素因数分解
$10p, (p>5)$	$2*5*p$

$a=10p, (p>5)$ の形の通常解ばかり出る.

6.2　$S=7$ 　の場合の計算結果

表 18: $P=2, m=-7$

a	素因数分解
54	$2*3^3$
$14p, (p>7)$	$2*7*p$

通常解 $14p=2*7*p$ 以外に $54=2*3^3$ が最初にでてきた解で, これが非通常解.
非通常解の決定は興味ある問題である.

6.3 $S \geq 11$ の場合の計算結果

S : 奇数 であるが解の無い場合は記さない.

表 19: $P = 2, m < 0,\ S = -m \geq 11$

S	a	素因数分解
11	$22p, (p > 11)$	$2 * 11 * p$
13	$26p, (p > 13)$	$2 * 13 * p$
17	90	$2 * 3^2 * 5$
17	$34p, (p > 19)$	$2 * 17 * p$
21	126	$2 * 3^2 * 7$
21	250	$2 * 5^3$
23	$46p, (p > 23)$	$2 * 23 * p$
29	198	$2 * 3^2 * 11$
29	$58p, (p > 29)$	$2 * 29 * p$
31	64	2^6
31	150	$2 * 3 * 5^2$
31	$62p, (p > 31)$	$2 * 31 * p$
33	234	$2 * 3^2 * 13$
37	$74p, (p > 37)$	$2 * 37 * p$
41	306	$2 * 3^2 * 17$
41	$82p, (p > 41)$	$2 * 41 * p$
43	686	$2 * 7^3$
43	$86p, (p > 43)$	$2 * 43 * p$
45	342	$2 * 3^2 * 19$
47	$94p, (p > 47)$	$2 * 47p$
49	350	$2 * 5^2 * 7$
51	210	$2 * 3 * 5 * 7$
53	414	$2 * 3^2 * 23$
53	$106p, (p > 53)$	$2 * 53 * p$
57	294	$2 * 3 * 7^2$
59	270	$2 * 3^3 * 5$
59	$2 * 118p, (p > 59)$	$2 * 59 * p$

パソコンによる計算の結果, $S = 17$ のとき $a = 2*17*p$ という解以外に $a = 90 = 2*3^2*5$ が出てきた. これは非通常解.

これらの結果から非通常解は最小の通常解より小さいことが推定できる.

S : 非素数なら通常解の大きさはどのように評価できるか

という問題は自然な問いかけである.

21 は素数ではないので通常解はない. 非通常解は 2 つある.

$S=9$ および $S=15$ のときは解がない.
$25=5^2$ は素数ではないから通常解はない.

7 III 型の場合の証明

以上の結果はパソコンでの計算結果なのでこれから数学的証明を行う.
$S=1$ のとき.

$$\mathrm{co}\varphi(L)=q$$

が方程式でこれを解けばよい. q は L の最大素因子で, L は奇数.

7.1 $S=1$ のときの証明

i) $s(L)=1$.
$L=q^j$ とおくとき, $\mathrm{co}\varphi(L)=q^{j-1}=q$ により $j=2$.
ii) $s(L)\geq 2$.
$L=q^j\mu,(q>\mathrm{Maxp}(\mu))$ と書き, $\mu_0=\mathrm{co}\varphi(\mu)$　とおくとき $\mathrm{co}\varphi(L)=q^{j-1}(\mu+\overline{q}\mu_0=q$
.
これにより $j=1$. $\mu+\overline{q}\mu_0>q$ が成り立つのでこれはおきない.
よって, 奇素数 q に関して $L=q^2$.　よって $a=2q^2$.
$S=3,5$ のときは同様にできるので略し, 非通常解の出る最初の例 $S=7$ を扱う.

7.2 $S=7$　のときの証明

$$\mathrm{co}\varphi(L)=S-1+q=6+q$$

が方程式でこれを解けばよい. q は L の最大素因子で, L は奇数.

$L=q^j,(j\geq 2)$ とおくとき,
$\mathrm{co}\varphi(L)=q^{j-1}=q+6$ によって, $j=3,q^2-q=6$. これより $q=3$. 非通常解 $a=2*3^3$ がでる.

$L=q\mu,q>\mathrm{Maxp}(\varphi(\mu))$ の場合. $\mu_0=\mathrm{co}(\mu)$ とおくとき $\mathrm{co}\varphi(L)=(q-1)\mu_0+\mu$ となる.

i) $\mu_0=1$.
$\mathrm{co}\varphi(L)=q+\mu-1$ なので $q+\mu-1=q+6$. よって, $\mu=7$. $q>\mu=7$ が条件で $a=2*7q=14q$. これは通常解.

μ が非素数なら, μ は奇数なので　1) $\mu_0 = 3, \mu = 9$,2) $\mu_0 = 5, \mu = 25$, 3) $\mu_0 = 7, \mu = 49, 35$ 等.

1) $\mu_0 \geq 3, \mu$:非素数のとき, $\mu \geq 9$.

$$\mathrm{co}\varphi(L) \geq 3q + 6, \mathrm{co}\varphi(L) = q + 6 \geq 3q + 6.$$

これは不成立.

7.3　$S = 17$ のときの証明

$$\mathrm{co}\varphi(L) = S - 1 + q = 16 + q$$

が方程式

$L = q^j, j \geq 2$ とおくとき,

$\mathrm{co}\varphi(L) = q^{j-1} = q + 16$, によって, $q^{j-1} - q = 16$. これより $j = 3, q(q-1) = 16$. 不成立

i) $\mu_0 = 1$. μ が素数なので

$q + \mu - 1 = q + 16$. よって, $\mu = 17$. $q > \mu = 17$ が条件で $a = 2 * 17q = 34q$. これは通常解.

ii) $\mu_0 > 2$.　μ が非素数なので

1) $\mu_0 = 3, \mu = 9$ のとき,

$$\mathrm{co}\varphi(L) = 3q + 6, \mathrm{co}\varphi(L) = q + 16.$$

$3q + 6 = q + 16$ により $2q = 10$. したがって $q = 5, a = 2 * 3^2 * 5$.

7.4　$S = 21$　のときの証明

$$\mathrm{co}\varphi(L) = S - 1 + q = 20 + q$$

が方程式

$L = q^j, j \geq 2$ とおくとき,

$\mathrm{co}\varphi(L) = q^{j-1} = q + 20$, によって, $q^{j-1} - q = 20$. これより $j = 3, q(q-1) = 20$. これは解けて $q = 5, a = 2 * 5^3$.

i) $\mu_0 = 1$. μ が素数なので

$q + \mu - 1 = q + 20$. よって, $\mu = 21$. 素数でないから解がでない.

μ が非素数なら

1) $\mu_0 = 3, \mu = 9$ のとき,

$$\mathrm{co}\varphi(L) = 3q + 6, \mathrm{co}\varphi(L) = q + 20.$$

$3q + 6 = q + 20$ により $2q = 14$. したがって $q = 7, a = 2 * 3^2 * 7$.

7.5 $S=31$ のときの証明

$$\mathrm{co}\varphi(L)=S-1+q=30+q$$

が方程式

$L=q^j, j\geq 2$ とおくとき,

$\mathrm{co}\varphi(L)=q^{j-1}=q+30$, によって, $q^{j-1}-q=30$. これより $q(q^{j-2}-1)=30$. $q=2$ とおくと,$q^{j-2}-1=2^{j-2}-1=15$. よって, $j-2=4, j=6; L=2^6$.

$L=q^2\mu$ とおくとき,

$\mathrm{co}\varphi(L)=q(\overline{q}\mu_0+\mu)=q+30$.

μ が素数なら　$\mu_0=1$. $q(q+\mu-1)=q+30$. $q(q+\mu-2)=30$, により $q=5, q+\mu-2=3+\mu=6.\mu=3$.

$a=2*3*5^2$.

$L=q\mu$ とおくとき,

$$\mathrm{co}\varphi(L)=\overline{q}\mu_0+\mu=q+30.$$

μ が素数なら

$q+\mu-1=q+30$. よって, $\mu=31$. 素数なので解は $a=2*31q,(q>\mu)$.

μ が非素数なら

1) $\mu_0=3,\mu=9$ のとき,

$$\mathrm{co}\varphi(L)\geq 3q+6, \mathrm{co}\varphi(L)=q+30\geq 3q+6.$$

$q=12$ により矛盾.

2) $\mu_0\geq 5,\mu\geq 25$ のとき,

$$\mathrm{co}\varphi(L)=\mu+\overline{q}\mu_0\geq 5q+20, \mathrm{co}\varphi(L)=q+30\geq 5q+20.$$

$10\geq 4q$ により矛盾.

8 IV 型 m : 正の奇数

m : 奇数, 負の数 の場合が済んだので m : 奇数, 正の数の場合を扱う. この場合は意外なことにきわめて簡単になる. 小さなツチノコを発見した思いがした.

$P = 2, m = 1, 3, 5, \cdots$

表 20: $P = 2, m = 1, 3, 5, \cdots$

m	$a =$ 素因数分解
1	6=2*3
3	10=2*5
5	14=2*7
9	22=2*11
11	26=2*13
13	none(13+2=15, 非素数)
15	34=2*17
17	38=2*19
19	none(13+2=21, 非素数)
21	46=2*23
23	none((23+2=25, 非素数)

$m + 2 = q$ のとき解は $a = 2q$ のみ

この場合は解が完全に決まるが面白いものはでてこない.

以下証明.

$\mathrm{co}\varphi(L) = q - 1 - m$ を解く.

L が素数なら $\mathrm{co}\varphi(L) = 1 = q - 1 - m$ なので $q = m + 2$.

L が非素数なら $\mathrm{co}\varphi(L) \geq q$ なので $q \leq \mathrm{co}\varphi(L) = q - 1 - m$. 矛盾.