新規まき直し 第一期2017年10月13日
素数べきと完全数の平行移動

飯高 茂

平成 29 年 8 月 11 日

目 次

1　素数べき

自然数 a の約数の和を $\sigma(a)$ で表すことは現在ほぼ確定した記号であるが, これを a の関数と見てユークリッド関数と言いたい.

$a=p^eq^f$ の約数は素因子分解の一意性より $p^rq^s,(r\leq e,s\leq f)$ と書ける. したがって

$$\sigma(a)=\sigma(p^e)\sigma(q^f). \tag{1}$$

a,b は互いに素とする. ab の約数 d は a の約数 δ と b の約数 D を用いて $d=\delta D$ と一意的に書ける. これを用いると

$$\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)$$

が成り立つ. この性質を $\sigma(a)$ は乗法性を持つ, と言う.

1.1　$\sigma(a)$ の表

$\sigma(a)$ に親しむため a とその素因数分解 , $\sigma(a)$ を横に並べ $\sigma(a)$ の順にしたがって 並べてみた.

表 1: $\sigma(a)$ の順

a	素因数分解	$\sigma(a)$	a	素因数分解	$\sigma(a)$
2	$[2]$	3	33	$[3,11]$	48
3	$[3]$	4	35	$[5,7]$	48
5	$[5]$	6	47	$[47]$	48
4	$[2^2]$	7	34	$[2,17]$	54
7	$[7]$	8	53	$[53]$	54
6	$[2,3]$	12	28	$[2^2,7]$	56
11	$[11]$	12	39	$[3,13]$	56
9	$[3^2]$	13	49	$[7^2]$	57
13	$[13]$	14	24	$[2^3,3]$	60
8	$[2^3]$	15	38	$[2,19]$	60
10	$[2,5]$	18	59	$[59]$	60
17	$[17]$	18	61	$[61]$	62
19	$[19]$	20	32	$[2^5]$	63
14	$[2,7]$	24	67	$[67]$	68
15	$[3,5]$	24	30	$[2,3,5]$	72
23	$[23]$	24	46	$[2,23]$	72
12	$[2^2,3]$	28	51	$[3,17]$	72
29	$[29]$	30	55	$[5,11]$	72
16	$[2^4]$	31	71	$[71]$	72
25	$[5^2]$	31	73	$[73]$	74
21	$[3,7]$	32	45	$[3^2,5]$	78
31	$[31]$	32	57	$[3,19]$	80
22	$[2,11]$	36	79	$[79]$	80
37	$[37]$	38	44	$[2^2,11]$	84
18	$[2,3^2]$	39	65	$[5,13]$	84
27	$[3^3]$	40	83	$[83]$	84
20	$[2^2,5]$	42	40	$[2^3,5]$	90
26	$[2,13]$	42	58	$[2,29]$	90
41	$[41]$	42	89	$[89]$	90
43	$[43]$	44	36	$[2^2,3^2]$	91

ここでは素因数分解 $2^2 \cdot 3^2$ を $[2^2, 3^2]$ のようにリスト表記で表した.
上の表を観察して次のことがわかる.

1. $\sigma(a)$ に出てこない数として 9,10,11 などがあり,

2. $\sigma(a) = 12$ なる数 a として 6,11 があげられる.

3. $\sigma(a) = 90$ になる数 a として 24,38,59.

これらを数学的に証明してみよう. (a が素数でないなら $\sigma(a)-a \geq 2$ はわかっている. $a \neq 89$ と仮定すると $a \leq 88$. ここからはシラミつぶしで行くしか無いか.)

1.2　等比数列の和

$a = 2^n p, (p > 2$:素数) の約数は

$$1, 2, 2^2, \cdots, 2^n, p, 2p, 2^2p, \cdots, 2^n p$$

であり, これらの和は等比数列の和の公式を使うと $2^{n+1}-1+(2^{n+1}-1)p$ になる.
ここで $p = 2^{n+1}-1$ を仮定してみる.

$$\begin{aligned}
\sigma(a) &= 2^{n+1}-1+(2^{n+1}-1)p \\
&= (2^{n+1}-1)(p+1) \\
&= 2^{n+1}p+(2^{n+1}-(p+1)) \\
&= 2^{n+1}p = 2a
\end{aligned}$$

よって, $\sigma(a) = 2a$.

日本の高校生なら誰でも知っている等比数列の和の公式は 2300 年も前に発見され完全数の理論に使われた. 日本がようやく弥生式の稲作を始めたころ (BC300 年頃) 等比数列の和の公式 (ユークリッド BC300) はすでにできていた. 本当にすごいことだ.

2　完全数と概完全数

$\sigma(a) = 2a$ を満たす自然数 a を古代ギリシャの数学者は完全数 (perfect numbers) と命名した. 完全数 という名前は魅力的であり, 名前の力のおかげで数学者はもちろん一般にも広く知れるようになった

$p = 2^{n+1}-1$ が素数のとき $a = 2^n p$ をユークリッドの完全数という. これは完全数になっている.

一方 $A = 2^e$ なら $\sigma(A) = 2A-1$ を満たす.

この場合,A が完全数になるには 1 だけ足りない. 少し惜しいゆえ概完全数 (almost perfect number) と呼ぶ. $a = 2^e$ は概完全数になるが, 概完全数, すなわち $\sigma(a) = 2a-1$ を満たす自然数 a は $a = 2^e$ に限るか?

という問題は未解決である.

2.1 完全数の数表

表 2: 完全数の場合,$q = 2^{n+1} - 1$ は素数

$e \bmod 4$	e	$e+1$	$2^e * q$	a	$a \bmod 10$
1	1	2	$2 * 3$	6	6
2	2	3	$2^2 * 7$	28	8
0	4	5	$2^4 * 31$	496	6
2	6	7	$2^6 * 127$	8128	8
0	12	13	$2^{12} * 8191$	33550336	6
0	16	17	$2^{16} * 131071$	8589869056	6
2	18	19	$2^{18} * 524287$	137438691328	8
2	30	31	A	B	8
0	60	61	C	D	6
0	88	89	E	F	6

ここで, $A = 2^{30} * 2147483647$
$B = 2305843008139952128$(Euler による)
$C = 2^{60} * 2305843009213693951$
$D = 2658455991569831744654692615953842176$
$E = 2^{88} * 618970019642690137449562111$
$F = 191561942608236107294793378084303638130997321548169216$
などと続く.

a の末尾の数は 6 か 8. 言い換えると $a \equiv 6$ または $8 \mod 10$. これは完全数の持つ周知の性質のひとつ.

数表を観察すると次の結果がわかる. ただし, ここで $e > 1$ の場合しか扱わない.
$e = 1$ は例外の場合として考える.
$e \equiv 0 \mod 4$ なら $q \equiv 1 \mod 10$. $a \equiv 6 \mod 10$.
$e \equiv 2 \mod 4$ なら $q \equiv 7 \mod 10$. $a \equiv 8 \mod 10$.

2.2　オイラーによる偶数の完全数定理の証明

a を偶数完全数としこれを, $a = 2^eL(e > 0, L:$ 奇数$)$ の形に書く.
$\sigma(a) = 2a$ により

$$\begin{aligned}\sigma(a) = \sigma(2^e)\sigma(L) &= (2^{e+1} - 1)\sigma(L)\\ &= (2^{e+1} - 1)\sigma(L)\\ &= 2^{e+1}L\\ &= 2 \cdot 2^{e+1}L\end{aligned}$$

$$\sigma(a) = \sigma(2^e)\sigma(L) = (2^{e+1} - 1)\sigma(L) = 2^{e+1}L$$

となるので $N = 2^{e+1} - 1$ とおけば $N\sigma(L) = (N + 1)L$ となり

$$N(\sigma(L) - L) = L.$$

$d = \sigma(L) - L$ とおくとき $Nd = L$. したがって d は L の約数である. つぎの 3 つの場合がある.

(1) $d = 1$. $N = L.d = 1 = \sigma(L) - L$ により L は素数 p であり, $p = L = N = 2^{e+1} - 1$. $p = 2^{e+1} - 1$ は素数で $a = 2^ep$. これはユークリッドの与えた完全数の形となっている.

(2) $d = L$. $N = 1 = 2^{e+1} - 1$ になるので $e = 0$. a が奇数になり仮定に反す.

(3) $1 < d < L$. d は $1, L$ 以外の約数なので $\sigma(L) \geq 1+L+d$. よって $d = \sigma(L)-L \geq 1+d$. これは矛盾.

別証
場合を分けること無く証明する.
$N(\sigma(L) - L) = L$ を次のように変形する.
$\sigma(L) = L + \dfrac{L}{N}$. これより $d' = \dfrac{L}{N}$ は整数でとくに L の約数.
$\sigma(L) = L + d'$ として 2 約数の和になったが 1 も L の約数なので, $d' = 1.N = L$ $\sigma(L) = L + 1$ になったので, L は素数 p. $N = p, N = 2^{e+1} - 1 = p, a = 2^ep$.

2.3　素数べきの約数の和

$\sigma(2^e) = 2^{e+1} - 1$ が素数になるとき, $e + 1$ も素数である. 次の表では $e + 1$ が素数になる場合を扱い ,$\sigma(2^e)$ の素因数分解をしている.
素数になる $\sigma(2^e)$ は 7,31,127,8191,131071,524287,$\cdots$ などであり意外に多い. これらをメルセンヌ素数という.
$e + 1$ が素数となる場合 $\sigma(2^e)$ を単にメルセンヌ数という.

表 3: $\sigma(2^e) = 2^{e+1} - 1$:メルセンヌ数,($e+1$:素数)

$2^e = A$	$\sigma(A)$	素因数分解
$2 = 2$	3	[3]
$2^2 = 4$	7	[7]
$2^4 = 16$	31	[31]
$2^6 = 64$	127	[127]
$2^{10} = 1024$	2047	$[23, 89]$
$2^{12} = 4096$	8191	[8191]
$2^{16} = 65536$	131071	[131071]
$2^{18} = 262144$	524287	[524287]
$2^{22} = 4194304$	8388607	$[47, 178481]$
$2^{28} = 268435456$	536870911	$[233, 1103, 2089]$
$2^{30} = 1073741824$	2147483647	[2147483647]

たとえば $[23, 89]$ は 2047 の素因数分解 $23 \cdot 89$ をリストで表記したものである.
$\sigma(2^e)$ が素数のとき $2^e\sigma(2^e)$ は完全数になる. 例えば

$$2 * 3 = 6, 4 * 7 = 28, 16 * 31 = 496, 64 * 127 = 8128, \cdots$$

となり, これらは古代人が発見した 4 つの完全数である.
実際, $A = 2^e$ に対して $\sigma(A)$ が素数 q のとき $a = Aq$ とおく. $q = \sigma(2^e) = 2^{e+1} - 1$ より $q + 1 = 2^{e+1} = 2A$ なので

$$\sigma(a) = \sigma(A)\sigma(q) = q(q+1) = 2Aq = 2a.$$

したがって a は完全数になる.
この逆の命題, すなわち, 完全数 a は $\sigma(2^e)$ が素数 q になる 2^e を用いて $a = 2^e q$ と必ず書けるか？
という問題は現代でも解けていない. 数学界の最難問の 1 つと言ってよい.

3 完全数の平行移動

完全数を m だけ平行移動するとは次の意味である.

パラメータ m に対して $q=2^{e+1}-1+m$ が素数のとき $a=2^e q$ を m だけ平行移動した (狭義の) 完全数という. 結果として m は偶数になる.

3.1 $m=2$

2 だけ平行移動した場合を見てみよう. $q=2^{e+1}+1$ が素数になるので $e+1$ は 2 のべき, すなわち $e+1=2^r$ と書くことができる. 一般に $F_r=2^{2^r}+1$ をフェルマ数といい, これが素数になるならフェルマ素数という. フェルマはフェルマ数はすべて素数になると予想し, 死に至るまで考えていた.

表 4: $q=2^{e+1}+1$ が素数

e	$e+1$	$e \bmod 4$	2^e*q	a
0	1	0	3	3
1	2	1	$2*5$	10
3	4	3	2^3*17	136
7	8	3	2^7*257	32896
15	16	3	$2^{15}*65537$	2147516416

$F_0=3, F_1=5, F_2=17, F_3=257, F_4=65537$ らはフェルマ素数である.

F_5 は合成数であることを 641 が因数であることを示したのはオイラーである. このほかにフェルマ素数があるかどうかは未解決の難問. (私は無数のフェルマ素数があると想像している)

命題 1. *$e \geq 3$ のとき $q \equiv 7, a \equiv 6 \mod 10$.*

とくに a の末尾の数は 6.

Proof. $e+1=2^r$ により $r \geq 2$ なら $e+1=4N$ と書けるので $q=2^{e+1}+1 \equiv 2 \bmod 5$.

よって, $q=2+5L$. 一方, q は奇数なので L は偶数 $L=1+2M$. なので $q=7+10M$
$q \equiv 7 \mod 10$.

$a=2^e*q \equiv 3*q \equiv 6 \bmod 5$, a は偶数なので $a \equiv 6 \mod 10$.

3.2 $m = 4$

この場合 $q = 2^{e+1} + 3$ は素数.

表 5:

$e \bmod 4$	e	$2^e * q$	a	$a \bmod 10$
0	0	5	5	5
1	5	$2^5 * 67$	2144	4
2	6	$2^6 * 131$	8384	4
3	11	$2^{11} * 4099$	8394752	2
2	14	$2^{14} * 32771$	536920064	4
3	15	$2^{15} * 65539$	2147581952	2
1	17	$2^{17} * 262147$	34360131584	4
3	27	A	B	2
1	29	C	D	4
2	54	E	F	4
2	66	G	H	4

$A = 2^{27} * 268435459, B = 36028797421617152$
$C = 2^{29} * 1073741827, D = 576460753914036224$
$E = 2^{54} * 36028797018963971, F = 576460753914036224$
$G = 2^{66} * 147573952589676412931$
$H = 6490371073168535076095075695598464$

表を見ると

- $e \equiv 1 \bmod 4$ なら $q \equiv 7, a \equiv 4 \mod 10$.
- $e \equiv 2 \bmod 4$ なら $q \equiv 1, a \equiv 4 \mod 10$.
- $e \equiv 3 \bmod 4$ なら $q \equiv 4, a \equiv 2 \mod 10$.

3.3 $m = -2$

$q = 2^{e+1} - 3$ が素数になるがこの場合 $2^e q$ は指数 e の擬素数 $\mathbf{p}_e$ と呼ばれる. 完全数と比べると素数になる場合が多い.

表 6: $q = 2^{e+1} - 3$ が素数

$e \bmod 4$	e	$2^e * q$	a	$a \bmod 10$
2	2	$2^2 * 5$	20	0
3	3	$2^3 * 13$	104	4
0	4	$2^4 * 29$	464	4
1	5	$2^5 * 61$	1952	2
0	8	$2^8 * 509$	130304	4
1	9	$2^9 * 1021$	522752	2
3	11	$2^{11} * 4093$	8382464	4
1	13	$2^{13} * 16381$	134193152	2
3	19	A	B	4
1	21	C	D	2
3	23	E	F	4
0	28	G	H	4
1	93	I	J	2

$A = 2^{19} * 1048573, B = 549754241024$
$C = 2^{21} * 4194301, D = 8796086730752$
$E = 2^{23} * 16777213, F = 140737463189504$
$G = 2^{28} * 536870909, H = 144115187270549504$
$I = 2^{93} * 19807040628566084398385987581$
$J = 196159429230833773869868419445529014560349481041922097152$
表を見ると

- $e \equiv 1 \bmod 4$ なら $q \equiv 1, a \equiv 2 \mod 10$.
- $e \equiv 0 \bmod 4$ なら $q \equiv 9, a \equiv 4 \mod 10$.
- $e \equiv 3 \bmod 4$ なら $q \equiv 3, a \equiv 4 \mod 10$.

4　m だけ平行移動した完全数の定義式

パラメータ m に対して $q=2^{e+1}-1+m$ が素数のとき $a=2^eq$ を m だけ平行移動した (狭義の) 完全数ということはすでに紹介したとおりである. 次にこれの満たす方程式を求めよう.

$N=2^{e+1}-1$ とおく. $q=N+m$ は素数であることに注意.

$$\sigma(a)=\sigma(2^eq)=(2^{e+1}-1)(q+1)=Nq+N, N+m=q$$

に注意して次の式変形を行う.

$Nq=2^{e+1}q-q=2a-q,$ が成り立ちさらに

$$\begin{aligned}\sigma(a)&=Nq+N\\&=2a-q+N\\&=2a-q+q-m\\&=2a-m.\end{aligned}$$

かくして $\sigma(a)=2a-m.$

方程式 $\sigma(a)=2a-m$ の解 a を平行移動 m の広義の完全数という.

平行移動 m の広義の完全数, すなわち方程式 $\sigma(a)=2a-m$ の解は, $q=2^{e+1}-1+m$ が素数となる e によって $a=2^eq$, となるか (したがって $s(a)=2$ を満たす), という問題を考えよう.

一般的に言って m が少し大きいと反例が出やすい.

$m=0,2$ では反例が見つからない, 次に $m=4$ の場合を扱う.

4.1　$\sigma(a) = 2a - 4$ の場合

$a = 4$ とき $\sigma(a) = 2a - 4$ を満たす解をパソコンで順次計算たところ次の表ができた.

表 7: $\sigma(a) = 2a - 4$

a	素因数分解	$\sigma(a)$
5	$[5]$	6
14	$[2, 7]$	24
44	$[2^2, 11]$	84
110	$[2, 5, 11]$	216
152	$[2^3, 19]$	300
884	$[2^2, 13, 17]$	1764
2144	$[2^5, 67]$	4284
8384	$[2^6, 131]$	16764
18632	$[2^3, 17, 137]$	37260

$a = 110, a = 884, a = 18632$ は解だが $s(a) = 3$.

$s(a) = 3$ の解は他に 2 個あるが $2^e rq, (e < q$: 素数) の形をしている. これらは第 2 正規形の解と呼ばれる.

5　スーパー完全数

Suryanarayayan は 1969 年にスーパー完全数 (superperfect numbers) を定義して基本定理を確立した.

$a = 2^e$ とおき $\sigma(a) = 2^{e+1} - 1$ となる. これを素数と仮定し q とおく.

$\sigma(q) = q + 1 = 2^{e+1} = 2a$ になる.

$q = \sigma(a)$ を代入すると,

$$\sigma(\sigma(a)) = 2a$$

が成り立つ. $\sigma^2(a) = \sigma(\sigma(a))$ を用いると

$$\sigma^2(a) = 2a$$

と書き直せるが, これを満たす a をスーパー完全数と呼ぶ.

定義だけみると何をふざけているのですか. と言いたくなる. ここでもオイラーの定理が成り立つ. しかも証明は簡単だ.

定理 1.

$$\sigma^2(a) = 2a$$

を満たす a は偶数のとき 2^{p-1} とかける. ここで $2^p - 1$ はメルセンヌ素数.

Proof.

仮定により, $e > 0$ があり $a = 2^e L, (L:$ 奇数$)$ となる. $N = 2^{e+1} - 1$ とおく. $\sigma(a) = NL$.

1).$L = 1$

$a = 2^e$ により $\sigma(a) = N$. $\sigma^2(a) = \sigma(N).\sigma(a) = 2a = N + 1$ によれば $\sigma(N) = N + 1$. それゆえ N は素数. $N = 2^{e+1} - 1$ はメルセンヌ素数. $a = 2^e$.

2).$L > 2$

$N > 1$ なので, $\sigma(L)$ は $\sigma(a) = N\sigma(L)$ の真の約数. よって

$$\sigma^2(a) \geq 1 + \sigma(L) + N\sigma(L).$$

$\sigma^2(a) = 2a$ なので $2a \geq 1 + \sigma(L) + N\sigma(L)$.

$2a = 2^{e+1}L = (N + 1)L$ によれば

$$(N + 1)L \geq 1 + \sigma(L) + N\sigma(L) \geq 1 + (N + 1)L.$$

これは矛盾.

5.1　計算例

これらの解を n とおくとき, $p = 2n - 1$ は素数, とくにメルセンヌ素数.

表 8: $\sigma^2(a) = 2a$

a	素因数分解
16	2^4
64	2^6
4096	2^{12}
65536	2^{16}
262144	2^{18}

6　平行移動 m のスーパー完全数

平行移動 m の狭義の完全数 a は $q=2^{e+1}-1+m$:素数, を満たす.

$N=2^{e+1}-1$ とする. $q=M+m$ を満たす. $a=2^e$ とおくとき,$\sigma(a)=2^{e+1}-1=N$ なので $q=N+m$ 素数 により　$\sigma(q)=q+1$ に注意して

$$\sigma(q)=\sigma(N+m)=\sigma(\sigma(a)+m).$$

よって $\sigma(\sigma(a)+m)=q+1=2^{e+1}+m=2a+m.$

かくて

$$\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m$$

これを平行移動 m のスーパー完全数の方程式といいこの解 a を平行移動 m のスーパー完全数という.

命題 2. $a=2^e$ が平行移動 m のスーパー完全数ならば $q=2^{e+1}-1+m$ は素数となる.

$2^e q$ は平行移動 m の狭義の完全数になる.

Proof.

$\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m$

$a=2^e$ を代入すると

$$\sigma(2^{e+1}-1+m)=2^{e+1}+m.$$

$k=2^{e+1}-1+m$ とおくとき, $\sigma(k)=k+1$. よって, k: 素数.

注意 1. 実例にあたると, $a=2^e$ の仮定を弱めて, a:偶数でもよい可能性がある.

6.1 計算例

$m = 0$ のとき解は元祖完全数のみ
$m = 2$ のとき.

表 9: $\sigma(\sigma(a) + 2) = 2a + 2$

a	素因数分解	Fermat 素数
1	2^0	$3 = 2 + 1$
2	2^1	$5 = 2^2 + 1$
8	2^3	$17 = 2^4 + 1$
11	11	
41	41	
65	$5 * 13$	
107	107	
128	2^7	$257 = 2^8 + 1$
149	149	
881	881	
959	$7 * 137$	
2141	2141	
14363	$53 * 271$	
21119	$7^2 * 431$	
32768	2^{15}	$65537 = 2^{32} + 1$
238895	$5 * 47779$	
967679	$23 * 42073$	

$m = 2$ のとき解は
1) 偶数の解 2^e は $q = 2^e + 1$: 素数, となりこれらはフェルマ完全数. (ただし証明はできない)
2) 奇数の解は数多くある. (これらの奇数解の性質はまったく分からない)

$m = 2$ のとき.

表 10: $\sigma(\sigma(a) + 4) = 2a + 4$

a	素因数分解
1	1
2	2
4	2^2
8	2^3
32	2^5
47	47
64	2^6
341	$11 * 31$
587	587
2048	2^{11}
16384	2^{14}
32768	2^{15}
131072	2^{17}
249793	$19 * 13147$
1309933	$277 * 4729$
2102267	2102267

$m = 4$ のとき解は

1) 偶数の解 2^e は $q = 2^e + 3$: 素数, となる. (ただし証明はできない)

2) 奇数の解は数多くある.

$m=-2$ のとき.

表 11: $\sigma(\sigma(a)-2)=2a-2$

a	素因数分解
4	2^2
7	7
8	2^3
16	2^4
29	29
32	2^5
253	$11*23$
256	2^8
512	2^9
889	$7*127$
2048	2^{11}
8192	2^{13}
111097	$7*59*269$
178741	$47*3803$
282385	$5*56477$
524288	2^{19}

$m=-2$ のとき解は
1) 偶数の解 2^e は $q=2^e-3$: 素数, となる. (ただし証明はできない)
2) 奇数の解は数多くある.

表 12: $\sigma(\sigma(a)-4)=2a-4$

a	素因数分解
4	2^2
8	2^3
23	23
32	2^5
107	107
128	2^7
242	$2*11^2$
467	467
512	2^9
653	653
2048	2^{11}
3077	$17*181$
6728	2^3*29^2
9953	$37*269$
131072	2^{17}
440897	$353*1249$
524288	2^{19}
130307	130307

$m=-4$ のとき解は

1) 偶数の解 2^e は $q=2^e-5$: 素数, となる. (ただし証明はできない)

2) 奇数の解は数多くある.

7　素数解 p

$\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m$ に素数の解 p があるとする．すると定義より $\sigma(p+1+m)=2p+m$ を満たす．

与えられた m に対し上式の界となる素数を探した．

$m=2$
$p=$11,41,107,149,881,2141,8381,18629,116621

$m=4$
$p=$47,587

$m=-2$
$p=$7,29,497,8129

$m=-4$
$p=$ 23,107,467,653,1955,130307,522755

8　究極のスーパー完全数

底が奇素数 P のとき スーパー完全数の平行移動 m を行う.
$q=\sigma(P^e)+m$ を素数とし, $a=P^e$, $N=P^{e+1}-1$ とおくと,
$q=\sigma(a)+m, q=\dfrac{N}{\overline{P}}+m.$
これより, $q-m=\dfrac{N}{\overline{P}}.$
そこで $\sigma(q)=\sigma(\sigma(a)+m), \sigma(q)=q+1.$

$$\sigma(\sigma(a)+m)=q+1=\frac{N}{\overline{P}}+m+1=\frac{aP-2+P}{\overline{P}}+m.$$

分母を取り去って

$$\overline{P}(\quad\sigma(\sigma(a)+m)-m)=aP+P-2.$$

これが底が奇数素数 P , 平行移動 m のときのスーパー完全数の方程式である.
これを一般に 究極のスーパー完全数 (ultimate superperfect numbers) の方程式という.
この解を 究極のスーパー完全数 (ultimate superperfect numbers) という.

8.1 数値例

表 13: $2\sigma(\sigma(a)) = 3a + 1$

a	素因数分解
9	3^2
729	3^6
531441	3^{12}

表 14: $2\sigma(\sigma(a) - 3) = 3a + 1$

a	素因数分解
3	3
27	3^3
243	3^5
19683	3^9

表 15: $4\sigma^2(a) = 5a + 3$

a	素因数分解
25	5^2
15625	5^6

計算例から推測する．
$P \geq 3, m = 0$ のとき解はすべて微小解 P^e しか出てこないらしい．

命題 3. $\overline{P}(\quad \sigma(\sigma(a) + m) - m) = aP + P - 2$ の解 P^e があるとする．$Q = \sigma(P^e) + m$ は素数になる．

Proof.
$a = P^e$ を代入する, $N = P^{e+1} - 1$ とおくとき $\sigma(P^e) = \dfrac{N}{\overline{P}}$.

$Q = \sigma(P^e) + m = \dfrac{N}{\overline{P}} + m$ とおくとき

$$\overline{P}(\sigma(\frac{N}{\overline{P}} + m) - m) = N + 1 + P - 2.$$

$\sigma(\frac{N}{\overline{P}} + m) - m = \sigma(Q) - m$ を用いて

$$\overline{P}(\sigma(Q) - m) = N + 1 + P - 2 = N + \overline{P}.$$

$\overline{P}$ で割ると

$$\sigma(Q) - m = \frac{N}{\overline{P}} + 1.$$

変形して

$$\sigma(Q) = \frac{N}{\overline{P}} + m + 1 = Q + 1.$$

Q は素数になった.