新規まき直し 第1期2017年10月27日
スーパー完全数の発展

飯高 茂

平成 29 年 10 月 26 日

0.1　スーパー完全数の定義

$a = 2^e$ とおくと $\sigma(a) = 2^{e+1} - 1$ となる. これを素数と仮定し q とおく. $\alpha = aq$ はユークリッドの完全数.

$$\sigma(\sigma(a)) = 2a$$

が成り立つ. 記号 $\sigma^2(a) = \sigma(\sigma(a))$ を用いると $\sigma^2(a) = 2a$ と書き直せる.
一般にこれを満たす a をスーパー完全数と呼ぶ.

0.2　スーパー完全数についてオイラーの定理の類似

定理 1.

$$\sigma^2(a) = 2a$$

を満たす a は偶数のとき 2^{p-1} とかける. ここで $q = 2^p - 1$ はメルセンヌ素数.

1　スーパー完全数の m だけ平行移動

m だけ平行移動 m した狭義の完全数 α は定義により $q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数になる e によって $\alpha = 2^e q$ と書ける.
$a = 2^e$ および $N = 2^{e+1} - 1$ とおくと,$N = \sigma(a), q = N + m = \sigma(a) + m, q + 1 = 2a + m$ を満たす.
q :素数 により

$$\sigma(q) = q + 1.$$

この式の左辺 $= \sigma(q) = \sigma(\sigma(a) + m)$. 右辺 $= q + 1 = 2a + m$
かくて

$$\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m.$$

これを平行移動 m のスーパー完全数の方程式といいこの解 a を平行移動 m のスーパー完全数という.

命題 1. $a = 2^e$ が平行移動 m のスーパー完全数ならば $q = 2^{e+1} - 1 + m$ は素数となる.

とくに $2^e q$ は平行移動 m の狭義の完全数になる.
Proof.
式 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ に $a = 2^e$ を代入すると

$$\sigma(2^{e+1} - 1 + m) = 2^{e+1} + m.$$

$q = 2^{e+1} - 1 + m$ とおくとき, $\sigma(q) = q + 1$. よって, q は 素数.

注意 1. 実例にあたると, a が偶数の仮定だけでも $a = 2^e$ が導ける可能性がある.

1.1 $m = 0$ のとき.

$m = 0$ のときパソコンで計算してみる.

表 1: $\sigma^2(a) = 2a$ の解

a	素因数分解	$2a - 1$ (メルセンヌ素数)
16	2^4	31
64	2^6	127
4096	2^{12}	8191
65536	2^{16}	131071
262144	2^{18}	524287

偶数スーパー完全数は 2 のべき, すなわち $a = 2^e$ であることはすでに示された.
パソコンで計算してみても奇数の解は見つからない.
完全数の場合奇数の完全数があるか？ という問題があるが 2000 年以上にわたって未解決.
スーパー完全数の場合も奇数のスーパー完全数あるかが問われている. この場合も難問かもしれないし, 案外簡単に解けるかもしれない.

1.2 $m = 2$ のとき.

$m = 2$ のとき, パソコンで計算してみると驚天動地の世界が現れた.
表を眺めた結果

- a が偶数なら 2 のべきになり,$2a + 1$ にはフェルマ素数が並ぶ.
- a が奇数の場合は, 11,41, 107 などの素数が出る一方, 65,959 などの合成数も並ぶ.

表 2: $\sigma(\sigma(a)+2)=2a+2$

a	素因数分解	$2a+1$(Fermat 素数あり)
1	2^0	$3=2+1$
2	2^1	$5=2^2+1$
8	2^3	$17=2^4+1$
11	11	
41	41	
65	$5*13$	
107	107	
128	2^7	$257=2^8+1$
149	149	
881	881	
959	$7*137$	
2141	2141	
14363	$53*271$	
21119	7^2*431	
32768	2^{15}	$65537=2^{32}+1$
238895	$5*47779$	
967679	$23*42073$	

2　素数解 p

$\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m$ に素数の解 p があるとする. すると定義より $\sigma(p+1+m)=2p+m$ を満たす.

与えられた m に対し上式の解となる素数 p を探した.

$m=2$ のとき, $\sigma(p+3)=2p+2$

$p=$11,41,107,149,881,2141,8381,18629,116621 (petit Fermat 素数とよぶ)

i). 最初の解 $p=11$. $b=p+1+m=p+3=14=2Q$. とおくとき $Q=7$. ここで $Q=7$ を伏せておき,

$p+3=2Q, a=p=2Q-3. \sigma(\sigma(a)+m)=\sigma(2Q)=3(Q+1), 2a+2=4Q-6+2=4Q-4$ なので $3(Q+1)=4Q-4$. これより $Q=7$; $a=2Q-3=14-3=11$

ii).$p=41$ $p+1+2=4*11=4Q$. $\sigma(4Q)=7(Q+1)=7Q+7, 7Q+7=2a+2=2(4Q-3)+2=8Q-4. Q=11$.

iii).$p=107$. $p+1+2=10*11=10Q$. $\sigma(10Q)=18Q+18$. $a=10Q-3$. $2a+2=20Q-4$.

$18Q+18=20Q-4$ により $Q=11, a=p=10Q-3=110-3=107$.

iv). ここでは少し一般に考える. $p+3=RQ, Q$:素数,R, Q: 互いに素とする. $\sigma(p+3)=\sigma(RQ)=\sigma(R)(Q+1)$, $2p+2=2(RQ-3)+2=2RQ-4$.

これより, $\sigma(R)(Q+1)=2RQ-4, \sigma(R)+4=(2R-\sigma(R))Q$.

簡単のため $R=2^{\varepsilon}$ のとき考察する.

$\sigma(R)=2^{\varepsilon+1}-1$ により, $2R-\sigma(R)=1$.

ゆえに,$\sigma(R)+4=(2R-\sigma(R))Q=Q$, $Q=\sigma(R)+4=2^{\varepsilon+1}+3$.

$Q=2^{\varepsilon+1}+3$ が素数でかつ, $2^{\varepsilon}Q-3$ が素数 p のとき解になる.

$Q=2^{\varepsilon}-1+4$ なのでこれは 4 だけ平行移動したメルセンヌ素数と考えられる.

表 3: $\sigma(p+3)=2p+2$

ε	$R=2^{\varepsilon}$	$R'=2R-1$	$Q=2^{\varepsilon}+3$	$p=RQ-3$	factor of p
1	2	3	7	11	O
2	4	7	11	41	O
3	8	15	19	149	O
4	16	31	35	557	$5*7$
5	32	63	67	2141	O
6	64	127	131	8381	17^2*29
7	128	255	259	33149	$7*37$
8	256	511	515	131837	$5*103$
9	512	1023	1027	525821	$149*3529$
10	1024	2047	2051	2100221	$7*293$

以上によって, $p=11,41,149,2141$.

$\sigma(p+1+m)=2p+m$ を満たす素数の表

表 4: petit Fermat primes

m	primes	primes	primes	primes	primes	primes
-6	17					
-4	23	107	467	653	130307	
-2	7	29				
2	11	41	107	149	881	2141
3	5					
4	47	587				

$m=4$,$\sigma(p+5)=2p+4$ を満たす.
p =47,587.

$m=-2$,$\sigma(p-1)=2p-2$ を満たす.
p =7,29

$m=-4$,$\sigma(p-3)=2p-4$
$p=$ 23,107,467,653,130307

これらの素数は居場所を探して彷徨っている難民のようだ. どこかに定住地を探したい.

3 究極のスーパーオイラー完全数 I 型

究極のスーパーオイラー完全数 I 型の定義をする.
スーパーオイラー完全数の I 型定義方程式は

$$2\varphi(\varphi(a)+1+m)=a+2m.$$

定理 2. $2\varphi(\varphi(a)+1+m)=a+2m$ の解は $a=2^e$ となる.$q=2^{e-1}+1+m$ は素数.

スーパーオイラー完全数 I 型の解は明快にわかる. 分かりすぎるので物足らない. そこでスーパーオイラー完全数 II 型を新たに導入した.

4 スーパーオイラー完全数 II 型

$\sigma(a)$ の代わりにオイラー関数 $\varphi(a)$ を用いて平行移動 m のスーパーオイラー完全数 II 型を定義してみよう.
$q_0=2^e+1+m$ は素数とする. $a=2^e$ とおく.
$a=2\varphi(a)$ により $q_0=2\varphi(a)+1+m$. 代入して $\varphi(q_0)=\varphi(2\varphi(a)+1+m)$.
q_0 は素数だから $\varphi(q_0)=q_0-1$.
一方, $q_0-1=a+m$. これらを組み合わせると,

$$\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m.$$

これを スーパーオイラー完全数 II 型の定義式といい, この解をスーパーオイラー II 型完全数という.

4.1 m:偶数の場合

$\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ において, m を偶数と仮定する. オイラー関数は自然数について定義されるので, $x=2\varphi(a)+1+m\geq 1$.
一般に $\varphi(x)$ は $x>2$ なら偶数なので,
$\varphi(x)=a+m$ は偶数なので a も偶数. よって奇数の L によって $a=2^eL$ と書ける.

1)$x=2\varphi(a)+1+m>1$ とする. $\varphi(x)\leq x-1=2\varphi(a)+m$.

$$a+m=\varphi(2\varphi(a)+1+m)=\varphi(x)\leq x-1=2\varphi(a)+m$$

$$2^eL+m=a+m\leq x-1=2\varphi(a)+m=2^e\varphi(L)+m.$$

$L\leq\varphi(L)$ により, $L=1, a=2^e$. $x=2\varphi(a)+1+m=2^e+1+m$,

$$\varphi(x)=\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m=2^e+m=Q-1.$$

ゆえに $x=2^e+1+m$ は素数.

2)$x = 2\varphi(a) + 1 + m = 1$ とする.

$2\varphi(a) + m = 0$.

$\varphi(2\varphi(a)+1+m) = a+m$ により, $1 = a+m$. $2\varphi(a)+m = 0$ なので $2\varphi(a) = -m = a-1$.

ところで, $2\varphi(a) = a - 1$ を満たす a は存在しない, という予想がある. そこでこれを仮説として使う.

したがって, $x = 2\varphi(a) + 1 + m = 1$ となる場合はないと理解する. この仮説を用いた結果次の定理ができた.

定理 3. *m を偶数と仮定する. $\varphi(2\varphi(a) + 1 + m) = a + m$ の解は $a = 2^e$, ここで, $Q = 2^e + 1 + m$ は素数. (これを擬メルセンヌ素数とよぶ)*

ここで, $m = 0$ なら $Q = 2^e + 1$ はフェルマ素数.

$m = -2$ なら $Q = 2^e - 1$ はメルセンヌ素数.

表 5: スーパーオイラー II 型完全数

$m = 0$			$m = 4$		
a	factor	擬メルセンヌ素数	a	factor	擬メルセンヌ素数
2	2	3	2	2	7
4	2^2	5	8	2^3	13
16	2^4	17	32	2^5	37
256	2^8	257	2048	2^{11}	2053

4.2 m:奇数の場合

$\varphi(2\varphi(a) + 1 + m) = a + m$ の解を求める.

m を奇数と仮定する. 一般に $x > 2$ なら $\varphi(x)$ は 偶数なので a も奇数.

5 オイラー余関数の評価

素因数分解

$$a = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r} = \prod_{j=1}^{r} p_j^{e_j}, (p_1 < \cdots < p_r)$$

に対して $\varepsilon(a) = \sum_{j=1}^{r} e_j$ とおく.

a の相異なる素因子の数を $s(a)$ と書く. したがって $s(a) = r$.

オイラー余関数は $co\varphi(a) = a - \varphi(a)$ によって定義される.

補題 1. *$a > 1$ のとき a : 素数になる必要十分条件は $co\varphi(a) = 1$ である.*

a が素数でないとき $co\varphi(a) \geq \sqrt{a}$ が成り立つ.
この証明は『数学の研究をはじめよう I』に書かれている.
ここでは, $s(a) \geq 2$ に限ってこれらを $co\varphi(a)$ の順に並べた.
$s(a) = 1$ なら $a = p^e$ でそのときは $co\varphi(a) = p^{e-1}$

表 6: $co\varphi(a)-\sqrt{a}$; a が平方数でないとき,

a	factor	$\varphi(a)$	$co\varphi(a)$	$co\varphi(a)-\sqrt{a}$
6	$[2,3]$	2	4	1.550510257
10	$[2,5]$	4	6	2.83772234
15	$[3,5]$	8	7	3.127016654
14	$[2,7]$	6	8	4.258342613
12	$[2^2,3]$	4	8	4.535898385
21	$[3,7]$	12	9	4.417424305
35	$[5,7]$	24	11	5.083920217
22	$[2,11]$	10	12	7.30958424
20	$[2^2,5]$	8	12	7.527864045
18	$[2,3^2]$	6	12	7.757359313
33	$[3,11]$	20	13	7.255437353
26	$[2,13]$	12	14	8.900980486
55	$[5,11]$	40	15	7.583801513

命題 2. a が素数でも, 平方数でもないとき, $co\varphi(a)-\sqrt{a}>1.5$
さらに, $a\neq 6,10,15$ ならば $co\varphi(a)-\sqrt{a}>4$

Proof.

$a=pq,(p<q:primes)$ のとき, 正の数 k を定め $co\varphi(a)-\sqrt{a}-k=p+q-1-\sqrt{pq}-k<0$ とする.

$$p+q-1-\sqrt{pq}-k=\sqrt{q}(\sqrt{q}-\sqrt{p})+p-k+1<0$$

それゆえ

$$0<\sqrt{q}(\sqrt{q}-\sqrt{p})<k+1-p.$$

$0<k_0=k+1-p$ により $p<k+1$.

$\alpha=\sqrt{q}$ とおくとき,

$$0<\alpha^2-\sqrt{p}\alpha<k_0.$$

2 次方程式 $t^2-\sqrt{p}t-k_0=0$ の 判別式を D とおくと $D=p+4k_0$. 解は根の公式により $\frac{\sqrt{p}\pm\sqrt{D}}{2}$.

この大きいほうの 根を t_2 とおけば

$$t_2=\frac{\sqrt{p}+\sqrt{D}}{2}.$$

さらに

$$q=\alpha^2\geq {t_2}^2.$$

1.$k=4$ のとき,

$p<k+1=5$ なので, p は素数だから,$p=2,3$.

1a. $p=3$. このとき, $k_0=2,D=p+4k_0=3+8=11<12$.

$$t_2=\frac{\sqrt{p}+\sqrt{D}}{2}<\frac{\sqrt{3}+\sqrt{12}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}=2.6\cdots.$$

ゆえに $q\geq {t_2}^2=6.75\cdots$. ゆえに $q=5$.

1b. $p=2$. このとき, $k_0=3,D=p+4k_0=14<16$.

$$t_2=\frac{\sqrt{p}+\sqrt{D}}{2}<\frac{\sqrt{2}+\sqrt{16}}{2}=\frac{\sqrt{2}+4}{2}=2.7\cdots.$$

ゆえに $q\geq 2.7^2=7.29\cdots$. ゆえに $q\leq 7$. $p=2<q=3,5,7$. しかし $p=2,q=7$ は不等式を満たさない.

$a=6,10,15$ が解になる.

2.$k=7$ のとき,

$p<k+1=8$ なので, p は素数だから,$p=2,3,5,7$.

同様の議論で, 解は次のとおり.
$6=[2,3]$,$10=[2,5]$,$15=[3,5]$, $14=[2,7]$,$12=[2^2,3]$ $21=[3,7]$.

6　オイラー余関数の新しい評価式

また 3 次の評価式も出ていたが. 長野県 飯山高校の生徒さんは次の形に一般化しオイラー余関数の新しい評価式をえた.
このような評価式を私は予想すらしていなかった.

定理 1 (飯山高校)**.** 自然数 $m>1$ について次の評価式が成り立つ.
$\varepsilon(a)\geq m$ のとき

$$co\varphi(a)\geq a^{\frac{m-1}{m}}$$

とくに $m=2$ なら,a が素数の平方でないなら $co\varphi(a)\geq\sqrt{a}$
$m=3$ なら $a=pq$ の場合を除くと $co\varphi(a)\geq\sqrt[3]{a^2}$
Proof.
1. $r=1$.
$e=e_1.p=p_1$ と書くとき $p^e,e\geq m$ なので

$$co\varphi(a)-a^{\frac{m-1}{m}}=p^{e-1}-p^{\frac{em-e}{m}}$$

$e-1-\frac{em-e}{m}=\frac{e-m}{m}\geq 0$ により, 上式は非負.
等号成立は $a=p^m$ のとき.

2. $r\geq 2$.
$P,R,\overline{P}$ を次式で定義する.
$P=\prod_{j=1}^r p_j, R=\prod_{j=1}^r {p_j}^{e_j-1}, \overline{P}=\prod_{j=1}^r \overline{p_j}, (\overline{p_j}=p_j-1)$, を以下で用いる**.**
$a=PR,\varphi(a)=\overline{P}R$ が成り立つ. それゆえ

$$\begin{aligned}co\varphi(a)-a^{\frac{m-1}{m}}&=co\varphi(a)-\frac{a}{a^{\frac{1}{m}}}\\&=PR-\overline{P}R-\frac{PR}{a^{\frac{1}{m}}}\end{aligned}$$

この式を R で割ると

$$(co\varphi(a)-a^{\frac{m-1}{m}})/R=P-\overline{P}-\frac{P}{a^{\frac{1}{m}}}.$$

$j>1$ について $p_1<p_j()$ なので $p_1^{\frac{e_j}{m}}<p_j^{\frac{e_j}{m}}$.
j について 1 から r について上の式を掛けると

$$p_1^{\frac{\varepsilon(a)}{m}}\leq\prod p_j^{\frac{e_j}{m}}=a^{\frac{1}{m}}.$$

ゆえに $r>1$ のとき $\varepsilon(a)\geq m$ により

$$a^{\frac{1}{m}}\geq p_1^{\frac{\varepsilon(a)}{m}}\geq p_1.$$

$$P-\overline{P}-\frac{P}{a^{\frac{1}{m}}}\geq P-\overline{P}-\frac{P}{p_1}.$$

$P_0=\prod_{j=2}^r p_j$ とおくとき $P=p_1P_0$. また $p_1=\overline{p_1}+1$ により $\overline{P_0}=\prod_{j=2}^r\overline{p_j}$ とおくと

$$\begin{aligned}P-\overline{P}-\frac{P}{p_1}&=(\overline{p_1}+1)P_0-\overline{P}-P_0\\&=\overline{p_1}P_0-\overline{p_1}\overline{P_0}\\&=\overline{p_1}(P_0-\overline{P_0})>0.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}(co\varphi(a)-a^{\frac{m-1}{m}})/R&=P-\overline{P}-\frac{P}{a^{\frac{1}{m}}}\\&\geq\overline{p_1}(P_0-\overline{P_0})>0.\end{aligned}$$

7 スーパーオイラーII型完全数,m:奇数

命題 3. *m を奇数 $2N-1$ とする. $m\geq-1$ の場合は $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ の解があるとき ,1)$N=0$ のとき $m=-1,a=2,$ またはフェルマ素数, 2) $N=1$ のとき $x=1,a=1$ になる.*

Proof.

$2\varphi(a)+1+m=2(\varphi(a)+N)$ によって

$$\varphi(2(\varphi(a)+N))=a+2N-1.$$

$b=\varphi(a)+N$ とおくとき $\varphi(2b)=a+2N-1.$

$b=\varphi(a)+N=2^\varepsilon L(L:$ 奇数$)$ の形に書いて

$L>2$ のとき, $L-\varphi(L)\geq1$ により

$$\begin{aligned}a+2N-1&=\varphi(2b)\\&=2^\varepsilon\varphi(L)\\&\leq2^\varepsilon(L-1)\\&=\varphi(a)+N-2^\varepsilon\\&\leq a-1+N-2^\varepsilon.\end{aligned}$$

これより

$$a + 2N - 1 \leq a - 1 + N - 2^{\varepsilon}.$$

$N \leq -2^{\varepsilon} \leq -1$. よって $m \leq -3$.

$L = 1$ のとき, $b = \varphi(a) + N = 2^{\varepsilon}$.
一方, $2^{\varepsilon} = \varphi(2b) = a + 2N - 1$, により

$$a + 2N - 1 = 2^{\varepsilon} = \varphi(a) + N$$

$a > 1$ ならば

$$a - \varphi(a) + 2N - 1 = N + 1 - 2N = 1 - N.$$

ゆえに $N = 0, a - \varphi(a) = 1$.
$b = 2^{\varepsilon} = \varphi(a) + N = a - 1$.
ゆえに,$a = 1 + b = 1 + 2^{\varepsilon}$ は素数なのでこれが奇数ならフェルマ素数. $\varepsilon = 0$ のとき, $a = 2$. したがって, $a = 2$, またはフェルマ素数

$a = 1$ ならば $a + 2N - 1 = \varphi(a) + N$ に代入すれば, $2N = 1 + N$. よって,$N = 1$.

7.1 $m = 1 - 4k$ の場合

高橋洋翔のプリントにしたがい,$m = 1 - 4k, (k > 0)$ とする.
$\varphi(2\varphi(a) + 2 - 4k) = a + 1 - 4k$ となる.
$b = \varphi(a) + 1 - 2k$ とおくと, これは奇数 ($a > 2$).
かくして

1. $a + 1 - 4k = \varphi(b)$
2. $b = \varphi(a) + 1 - 2k$

これを (a, b) についての連立方程式とみる.
$\varphi(b) \leq b - 1 = \varphi(a) - 2k$ によって,

$$a + 1 - 4k \leq \varphi(a) - 2k.$$

一般に $co\varphi(a) = a - \varphi(a)$ と定めこれをオイラー余関数と呼ぶ. すると, $co\varphi(a) = a - \varphi(a) \leq 2k - 1$. $co\varphi(a) = 1, 2, \cdots, 2k - 1$ となる.
(a, b) についての連立方程式を加えると $a + b + 1 - 4k = \varphi(a) + 1 - 2k + \varphi(b)$
整理して

$$a + b - 2k = \varphi(a) + \varphi(b).$$

余関数を使うと,

$$co\varphi(a) + co\varphi(b) = 2k.$$

これは美しい関係式である.

$b>1$ なので $co\varphi(b)\geq 1$. よって,$co\varphi(a)\geq 2k-1$.

補題 2. $co\varphi(a)\geq 2k-1$.

さて余関数について次の評価式を用いる.

a が素数でも, 平方数でもないとき, $co\varphi(a)-\sqrt{a}>1.5$

さらに, $a\neq 6,10,15$ ならば $co\varphi(a)-\sqrt{a}>4$.

$2k-1\geq co\varphi(a)$ と組み合わせると

$$2k-1\geq co\varphi(a)>\sqrt{a}+4.$$

a が素数でも, 平方数でもないとき $\sqrt{a}>2$.

したがって, $2k-1>6$. ゆえに $2k-1\geq 7$. $k\geq 4$.

$k\leq 3$ なら a が素数 か平方数または $a=6,10,15$.

a: 素数のときから調べる.

7.2 a: 素数のとき

$co\varphi(a)=1$ なので $co\varphi(b)=2k-1$.

1. $k=1$ のとき. $m=-3$. $co\varphi(b)=1$ になり, $b=a-2$: 素数. よって (a,b) は双子素数.

2. $k=2$ のとき. $m=-7$. $co\varphi(b)=3$ になり, $b=9$. $a+1-4k=a+1-8=\varphi(b)=6$. よって, $a=13$.

3. $k=3$ のとき. $m=-11$. $co\varphi(b)=5$ になり, $b=25$.

$a=1-4k=a+1-12=\varphi(b)=20$. よって, $a=31$.

4. $k=4$ のとき. $m=-15$. $co\varphi(b)=7$ になり, $b=49$.

$a=1-4k=a+1-16=\varphi(b)=42$. よって, $a=57$. 素数でないから矛盾.

5. $k=5$ のとき. $m=-19$. $co\varphi(b)=9$ になり, $b=27$.

$a=1-4k=a+1-20=\varphi(b)=18$. よって, $a=37$: 素数.

a : 素数のとき $co\varphi(a)+co\varphi(b)=2k$ により $co\varphi(b)=2k-1$. $k>1$ なら, $co\varphi(b)>1$ により b は有限個.

$a+1-4k=\varphi(b)$ により a も有限個.

7.3 $a=p^2$, p:素数のとき

$a=p^2$ のとき $2k-1\geq co\varphi(a)=p$.

とりあえず $k\leq 4$ を仮定すると, $2k-1=7\geq p$.

$k=3$ なら $5\geq p$.

$k=2$ なら $3\geq p$.

次に逆の評価式を使う.

条件式 $\varphi(2\varphi(a)+2-4k)=a+1-4k$ により, $2\varphi(a)+2-4k \geq 1$ に $a=p^2$ を代入する.

$$2\varphi(a)=2p\overline{p} \geq 4k-1.$$

これより $p\overline{p} \geq 2k-1/2$ により $p\overline{p} \geq 2k$.

1. $p=2$ なら $k=1$.
2. $p=3$ なら $k \leq 3$.
3. $p=5$ なら $k \leq 10$.
4. $p=7$ なら $k \leq 21$.

$k=2$ なら $p=2,3$. ここで上の評価式より, $p=3, a=9$.

$k=3$ なら $p=3,5$. ここで上の評価式より, $(p=3, a=9)$,$(p=5, a=25)$.

$k=4$ なら $p=3,5$. ここで上の評価式より, $(p=3, a=9)$,$(p=5, a=25)$,$(p=7, a=49)$.

a が決まれば解かどうかは簡単である.

7.4 $a=p^3$, p:素数のとき

$a=p^3$ のとき $p=2$ のときのみ $k \leq 4$.

7.5 $a=6,10,15$:のとき

表 7: スーパーオイラー II 型完全数

$m=-7$	
a	factor
8	2^3
9	3^2
13	13

表 8: スーパーオイラー II 型完全数

$m=-5$	
a	factor
9	3^2
13	13

表 9: スーパーオイラー II 型完全数

$m=-3$	
a	factor
4	2^2
5	5
7	7
13	13
19	19

7.6 オイラー余関数の評価

一般に．$a>1$ なら $co\varphi(a) \geq 1$. 次の結果はやさしいが有用.

1. $co\varphi(a)=1$ なら a は素数. 逆も正しい
2. $co\varphi(a)=2$ なら $a=4$.
3. $co\varphi(a)=3$ なら $a=9$.
4. $co\varphi(a)=4$ なら $a=6,8$.
5. $co\varphi(a)=5$ なら $a=25$.
6. $co\varphi(a)=6$ なら $a=10$.
7. $co\varphi(a)=7$ なら $a=49,15$.
8. $co\varphi(a)=8$ なら $a=12,14,16$.
9. $co\varphi(a)=9$ なら $a=27,21$.

8 $m=-1-4k$ のとき

高橋氏は $m=-1-2^{\varepsilon}$ のとき解は無限にあるのではないかと推察を私への私信で述べた.
これができれば双子素数は無限にある, という予想まで解ける.

これは到底できそうもないが解が無限にあるとき $m=-1-2^{\varepsilon}$ となることを示すことに成功した. 望外の成功であった.

とりあえず一般にして $m=-1-4k$ のときを考える. 条件式は $\varphi(2\varphi(a)-4k)=a-1-4k$ となる.

$b=\varphi(a)-2k$ とおくとこれは偶数 ($a>2$), $\varphi(2b)=a-1-4k$ となる. b を素因数分解して, $b=2^{\varepsilon}Q, Q$: 奇数とする.

$$\varphi(2^{\varepsilon+1}Q)=a-1-4k.$$

i). $Q=1$ のとき.

$\varphi(a)-2k=b=2^{\varepsilon}$,$\varphi(2^{\varepsilon+1})=2^{\varepsilon}=a-1-4k$.

$a=1+4k+2^{\varepsilon}$, かつ $\varphi(a)=2^{\varepsilon}+2k$

これによって $\mathrm{co}\varphi(a)=a-\varphi(a)=2k+1$.

a). $k=1; m=-5$.

$\mathrm{co}\varphi(a)=2k+1=3$. すると, $a=9$. $9=a=1+4k+2^{\varepsilon}=5+2^{\varepsilon}$.

$2^{\varepsilon}=4$ になり, $\varepsilon=2, b=4$.

b). $k=2; m=-9$, $\varphi(2\varphi(a)-8)=a-9$. $\mathrm{co}\varphi(a)=2k+1=5$. すると, $a=25$. これは解.

ii). $Q>2$. $\varphi(Q)\leq Q-1, b=\varphi(a)-2k$ を使う.

$$\begin{aligned}
a-1-4k &= \varphi(2^{\varepsilon+1}Q)\\
&= 2^{\varepsilon}\varphi(Q)\\
&\leq 2^{\varepsilon}(Q-1)\\
&= 2^{\varepsilon}Q-2^{\varepsilon}\\
&= b-2^{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

$$a-1-4k\leq b-2^{\varepsilon}=\varphi(a)-2k-2^{\varepsilon}.$$

$b=\varphi(a)-2k$ によって, $b=\varphi(a)-2k$, $\varphi(2b)=a-1-4k$ であり

$$a-1-4k\leq \varphi(a)-2k-2^{\varepsilon}.$$

$a>2$ のとき, $\varphi(a)\leq a-1$ を用いて

$$a-1-4k\leq \varphi(a)-2k-2^{\varepsilon}\leq a-12k-2^{\varepsilon}.$$

中抜きして

$$a-1-4k \le a-1-2k-2^{\varepsilon}.$$

これより $-4k \le -2k-2^{\varepsilon}$; $k \ge 2^{\varepsilon-1}$.

以後 $k=1$ とする. $m=5$. 上の評価式により, $k=1 \ge 2^{\varepsilon-1}$. すなわち, $\varepsilon-1=0$.

$a-5=a-1-4k \le b-2^{\varepsilon}=b-2=\varphi(a)-4$ により $a-5 \le b-2=\varphi(a)-4 \le a-5$.

ゆえに, $a-5=b-2, \varphi(a)=a-1$. $b=a-3$ かつ a は素数.

$\varphi(2b)=a-1-4k=a-5=b-2, \varphi(2b)=\varphi(4Q)=2\varphi(Q)$.

$2\varphi(Q)=\varphi(2b)=a-5=b-2=2Q-2$ が得られて, $\varphi(Q)=Q-1$. ゆえに Q も素数で, $a=3+2Q$ も素数になった.

a	$a-3$	$Q=(a-3)/2$
13	10	5
17	14	7
29	26	13
37	34	17
41	38	19
61	58	29
89	86	43
97	94	47

さて逆に奇素数 a をとる. $a-3$ は偶数なのでこれを 2 で割ると素数 p. $a=2p+3, 2a-6=4p$. $2\varphi(a)-4=2(a-3)=4p$.

そこで $\varphi(2a-6)=\varphi(4p)=2(p-1)=a-5$.

$p, a=2p+3$ がともに素数となる場合は無限にあるかもしれない. かくして双子素数と類似した素数の対についてこれらが無限にあるか, という問題ができた.

このような (a,p) を年の差カップルと呼ぶことに異論はないでしょう.

$k=2, m=-9$ の場合も興味深い.

高橋洋翔氏は 2017 年 9 月 3 日の ipad での私信で

(v) $m=-1-2^{e}$ のとき $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ の解は無限にありそう (未証明)

と書いた.

彼はそれに先立つ 8 月 28 日ごろ ,$m=-3$ のとき 解が 4 と双子素数の兄の方になることを証明していた.

$m=-5$ と $m=-9$ のとき 解が 双子素数と類似の形になることが分かった. しかし個別研究はともかく, これから一般論を作るのは困難であろう, と私は考えていた.

しかし, 高橋洋翔氏の第 v のテーゼが気になったので調べたところこれらの解は超双子素数になることがわかった.

双子素数 と同様に 超双子素数も無限にあると信じれば解が無限にありそう, という彼の感想はまさに正鵠を得たものと言える.

8.1 検証

命題 4. p と $a = 2^e p + 2^e + 1$ がともに素数なら a は $m = -1 - 2^{e+1}$ のとき $\varphi(2\varphi(a) + 1 + m) = a + m$ の解

Proof.
$a = 2^e p + 2^e + 1$ は素数なので $\varphi(a) = 2^e p + 2^e = 2^e(p+1)$.
$2\varphi(a) + 1 + m = 2^{e+1}(p+1) - 2^{e+1} = 2^{e+1}p$ なので $\varphi((2\varphi(a) + 1 + m)) = 2^e(p-1)$
一方, $a + m = 2^e p + 2^e + 1 - 1 - 2^{e+1} = 2^e(p-1)$.
よって $\varphi(2\varphi(a) + 1 + m) = a + m$ が確認された.

表 10: $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$

$m=-3$		$m=-5$			$m=-9$		
a	$a-2$	a	$a-3$	b/2	a	$a-5$	$b/4$
5	3	13	10	5	17	12	3
7	5	17	14	7	73	68	17
13	11	29	26	13	97	92	23
19	17	37	34	17	193	188	47
31	29	41	38	19	241	236	59
43	41	61	58	29	337	332	83
61	59	89	86	43	409	404	101
73	71	97	94	47	433	428	107
103	101	109	106	53	457	452	113
109	107	137	134	67	601	596	149
139	137	149	146	73	673	668	167
151	149	181	178	89	769	764	191
181	179	197	194	97	937	932	233
193	191	229	226	113	1009	1004	251
199	197	257	254	127	1033	1028	257
$4=2^2$		$9=3^2$			$25=5^2$		

表 11: $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ 続き

$m=-17$			$m=-33$			$m=-65$		
a	$a-9$	b/8	a	$a-17$	b/16	a	$a-33$	$b/32$
97	88	11	97	80	5	193	160	5
113	104	13	193	176	11	257	224	7
193	184	23	673	656	41	449	416	13
241	232	29	769	752	47	577	544	17
257	248	31	1153	1136	71	641	608	19
337	328	41	2113	2096	131	769	736	23
353	344	43	2689	2672	167	1217	1184	37
433	424	53	3169	3152	197	1409	1376	43
577	568	71	4129	4112	257	2689	2656	83
593	584	73	4513	4496	281	3137	3104	97
641	632	79	4993	4976	311	3329	3296	103
21=3*7			65=5*13			$209=11*19$		
25=5*5			$289=17^2$			$961=31^2$		
49=7*7								

9 $m=-1-2t$ で、解が無限にあるとき

$m=-1-2t$ のとき $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ の解が無限にあるとする.

$b=\varphi(a)-t$ とおくと $2b=2\varphi(a)+1+m$. $b=2^{\varepsilon}Q$, (Q:奇数) とおくと $2b=2^{\varepsilon+1}Q$ となり, $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ に代入すると

$$2^{\varepsilon+1}\varphi(Q)=a+m=a-1-2t$$

よって,

$$a=2t+1+2^{\varepsilon}\varphi(Q).$$

さらに

$$\varphi(a)=t+b=t+2^{\varepsilon+1}Q.$$

この式を引いて

$$co\varphi(a)=a-\varphi(a)=1+t-2^{\varepsilon}co\varphi(Q).$$

よって

$$1+t=co\varphi(a)+2^{\varepsilon}co\varphi(Q).$$

$co\varphi(a)\leq 1+t$.

a が素数でないなら $co\varphi(a)\geq 2$. このとき評価式 $co\varphi(a)\geq\sqrt{a}$ が成り立つ.

これより, $1+t\geq\sqrt{a}$. $(1+t)^2\geq a$ となり解は有限個.

したがって解が無限にあるとの仮定によって, a が素数になり,$co\varphi(a)=1$.

$$1=co\varphi(a)=1+t-2^{\varepsilon}co\varphi(Q).$$

よって,

$$t=2^{\varepsilon}co\varphi(Q).$$

$$a-1=\varphi(a)=t+2^{\varepsilon}Q.$$

により a に無限に解があれば Q にも無限に解がある.

$t=2^{\varepsilon}co\varphi(Q)$ において, $\dfrac{t}{2^{\varepsilon}}=co\varphi(Q)$.

Q が素数でない, すなわち $co\varphi(Q)>1$ なら $co\varphi(Q)>\sqrt{Q}$.

$$(\frac{t}{2^{\varepsilon}})^2\geq Q.$$

Q は有限個の解になり仮定に反する. よって $co\varphi(Q)=1$. すなわち, Q は素数. $t=2^{\varepsilon}co\varphi(Q)=2^{\varepsilon}$.

$$\varphi(a)=t+b=t+2^{\varepsilon}Q$$

に以上の式を入れて

$$a-1=t+2^{\varepsilon}Q.$$

$t = 2^{\varepsilon}$ のとき,

$$1 + t = co\varphi(a) + 2^{\varepsilon} co\varphi(Q).$$

$co\varphi(a) = co\varphi(Q) = 1$ 以外の解がありうる.

一般の解決は難しいので, $a = p^2$, $Q = 1$ としてみる. $co\varphi(a) = p, co\varphi(Q) = 0$ が成り立ち,

$$1 + t = 1 + 2^{\varepsilon} = p.$$

これは, p がフェルマ素数になることを意味する.