新規まき直し 第2期 1 回目 2018年2月23日 スーパー完全数

飯高 茂

平成 29 年 12 月 10 日

1 スーパー完全数の m だけ平行移動

m だけ平行移動した狭義の完全数 α は定義により $q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数になる e によって $\alpha = 2^e q$ と書ける.
$a = 2^e$ および $N = 2^{e+1} - 1$ とおくと,$N = \sigma(a)$, $q = N + m = \sigma(a) + m, q + 1 = 2a + m$ を満たす.
q :素数 により

$$\sigma(q) = q + 1.$$

この式の左辺 $= \sigma(q) = \sigma(\sigma(a) + m)$. 右辺 $= q + 1 = 2a + m$
かくて

$$\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m.$$

これを平行移動 m のスーパー完全数の方程式といいこの解 a を平行移動 m のスーパー完全数という.

命題 1. *$a = 2^e$ が平行移動 m のスーパー完全数ならば $q = 2^{e+1} - 1 + m$ は素数となる.*

とくに $2^e q$ は平行移動 m の狭義の完全数になる.
Proof.
式 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ に $a = 2^e$ を代入すると

$$\sigma(2^{e+1} - 1 + m) = 2^{e+1} + m.$$

$q = 2^{e+1} - 1 + m$ とおくとき, $\sigma(q) = q + 1$. よって, q は 素数.
End

注意 1. *実例にあたると,$m < 10$ 位なら a が偶数の仮定だけでも $a = 2^e$ が導ける可能性がある. (反例は $m = -28$ である)*

1.1 $m = 0$ のとき.

$m = 0$ のときパソコンで計算してみる.
偶数スーパー完全数は 2 のべき, すなわち $a = 2^e$ であることはすでに示された.
パソコンで計算してみても奇数の解は見つからない.

1.2　$m = 2$ のとき.

$m = 2$ のとき, パソコンで計算してみると驚天動地の世界が現れた.
表を眺めた結果

- a が偶数なら 2 のべきになり,$2a + 1$ にはフェルマ素数が並ぶ.
- a が奇数の場合は, 11,41, 107 などの素数が出る一方, 65,959 などの合成数も並ぶ.

1.3　$m = 28$ のとき.

$m = 28$ のとき, パソコンで計算してみると 947 が素数ひとりぼっち.
解 2^e に対して $q = 2^{e+1} - 1 + 28$ は素数

- $e = 1, q = 3 + 28 = 31$
- $e = 3, q = 15 + 28 = 43$
- $e = 4, q = 33 + 28 = 61$

2　水谷一さんの研究

水谷さんは平行移動 m のスーパー完全数が素数の場合に注目すべき研究を行った.
$\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ に素数解 p があるとき, この解を研究する.
$A = \sigma(a) + m$ とおく. $A = p + 1 + m$ となり $\sigma(A) = \sigma(p + 1 + m) = 2p + m$ を満たす.
$p + 1 + m$ に対して, $\sigma(p + 1 + m)$ を計算するのは容易ではないが, 次の仮説をおく.
$p + 1 + m = 2^k q, (q:$ 素数$)$, とかける場合に注目し, $q = 2^{k+1} + m + 1$ と書けると仮定する.
$\sigma(A) = \sigma(p + 1 + m) = \sigma(2^k q) = N(q + 1)$. ここで, $N = 2^{k+1} - 1$. $q = 2^{k+1} + m + 1$, により

$$\begin{aligned}
\sigma(A) =& N(q+1) \\
&= (2^{k+1} - 1)q + N \\
&= 2^{k+1}q - q + N = 2(p + m + 1) - q + 2^{k+1} - 1 \\
&= 2p + m + 1 - q + 2^{k+1} + m + 1 - 1 \\
&= 2p + m.
\end{aligned}$$

ゆえに, $\sigma(A) = \sigma(p + 1 + m), A = 2p + m$. よって,

$$\sigma(p + 1 + m) = 2p + m.$$

$m = 2$ のとき, $q = 2^{k+1} + m + 1 = 2^{k+1} + 3$.

- $k = 1$ なら, $q = 2^{k+1} + 3 = 7$: 素数. $p = 2^k q - m - 1 = 14 - 3 = 11$.
- $k = 2$ なら, $q = 2^{k+1} + 3 = 711$: 素数. $p = 2^k q - m - 1 = 44 - 3 = 41$.

表 1: $\sigma(\sigma(a)+2)=2a+2$

a $2a+1$(Fermat 素数あり)	素因数分解
1 $3=2+1$	2
2 $5=2^2+1$	2
8 $17=2^4+1$	2^3
11	11
41	41
65	$5*13$
107	107
128 $257=2^8+1$	2^7
149	149
881	881
959	$7*137$
2141	2141
14363	$53*271$
21119	7^2*431
32768 $65537=2^{32}+1$	2^{15}
238895	$5*47779$
967679	$23*42073$

表 2: $\sigma(\sigma(a)+28) = 2a+28$

a	素因数分解
2	2
8	2^3
16	2^4
128	2^7
512	2^9
947	947
4096	2^{12}
8192	2^{13}
32768	2^{15}

3 素数解 p

$\sigma(\sigma(a)+m) = 2a+m$ に素数の解 p があるとすると定義より $\sigma(p+1+m) = 2p+m$ を満たす.

与えられた m に対し上式の解となる素数 p を探した.

$\sigma(p+1+m) = 2p+m$ を満たす素数の表

表 3: petit Fermat primes

m	prime	prime	prime	prime	prime	prime
-6	17					
-4	23	107	467	653	130307	
-2	7	29				
2	11	41	107	149	881	2141
3	5					
4	47	587				

$m=4$,$\sigma(p+5) = 2p+4$ を満たす.

p =47,587.

これらの素数は居場所を探して彷徨っている難民のようだ. どこかに定住地を探したい.

4 通常解

$-200 \leq m \leq 150$ の範囲で調べた結果 $m = -58, -28, -18, -14$ に限って無数の素数に対応した無数解があることが分かった. これらは通常解であり B 型解といってよい.

ところで元祖完全数の平行移動 m で B 型解 αp がある場合,α は完全数, $m=-2\alpha$ に限っていた. 同様のことが究極の完全数でもありこの場合は超完全数が出てきた.

これと同様なことをスーパー完全数に期待しよう.

すなわち、$m=-994,-58,-28,-18,-14$ のとき B 型解が出てきたことに新しい研究の芽を感じる.

4.1 $m = -28$

表 4: $m = -28$

a	factor	$p = a/7$	$q = 2p - 5$
26	$2 * 13$		
35	$5 * 7$	5	5
77	$7 * 11$	11	17
98	$2 * 7^2$	14	23
107	107		
119	$7 * 17$	17	29
128	2^7		
161	$7 * 23$	23	41
203	$7 * 29$	29	53
329	$7 * 47$	47	89
371	$7 * 53$	53	101
413	$7 * 59$	59	113
497	$7 * 71$	71	137
623	$7 * 89$	89	173
707	$7 * 101$	101	197
917	$7 * 131$	131	257
959	$7 * 137$	137	269
1043	$7 * 149$	149	293
1253	$7 * 179$	179	353
1379	$7 * 197$	197	389
1589	$7 * 227$	227	449
1631	$7 * 233$	233	461
1799	$7 * 257$	257	509

$26 = 13 * 2$ 偶数でも 2 べきにならない例

この場合,2 べきの解でないなら $a = 7p(p \neq 7 :$ 素数$)$ の形の解が多い. ここで $q = 2p - 5$ は素数とする.

ところで 素数解 107 は珍しく 一匹狼というべき存在.

命題 2. $m=-28$ に対し,$q=2p-5$ が素数のとき, $a=7p$ は解.

Proof.
$m=-28$ を式 $\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m$ に代入すると $\sigma(\sigma(a)-28)=2a-28$.
$a=7p,(p\neq 7)$ とおくと $\sigma(a)-28=8(p+1)-28=8p-20=4(2p-5)$. ここで, $q=2p-5$ は素数と仮定すると, $\sigma(a)-28=4q$. したがって, $\sigma(4q)=7q+7$.
一方, $2a+m=14p-28=7(2p-4)=7(q+1)$. よって, $\sigma(\sigma(a)-28)=2a-28$.
END

この逆が弱いけれど次の形で成立する.

命題 3. $\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m,\ m=-28$ のとき $a=7L,(L\neq 0 \bmod 7)$ と書けるなら, $L=p,q=2p-5$ ともに素数.

Proof.
$a=7L$ のとき $A=\sigma(a)-28$ とおくと定義から $\sigma(A)=14L-28=7(2L-4)$.
$A=\sigma(a)-28=\sigma(7L)-28=8\sigma(L)-28=4(2\sigma(L)-7)$. $Q=2\sigma(L)-7$ とおくとき, $A=4Q$.
Q は奇数なので, 4 と互いに素. よって, $\sigma(A)=7\sigma(Q)$.

$$\sigma(A)/7=\sigma(Q)\geq Q+1=2\sigma(L)-6\geq 2L+2-6=2L-4=\sigma(A)/7.$$

よって等号が 2 回成り立ち,

$$\sigma(Q)=Q+1, 2\sigma(L)-6=2L-4.$$

よって, $\sigma(Q)=Q+1,\sigma(L)=L+1$. それゆえ $L,Q=2L-5$ はともに素数.
End

注意 2. L が 7 で割れないという仮定が厳しい.$a=7^fL$ という解はどうか.

4.2 $m=-18$

この場合,2 べきの解以外に $a=9$ と $a=3p(p\neq 5, p:$ 素数) の解が多い (実際にはこれのみか). さらに $q=2p-7$ は素数.

表 5: $m=-18$

a	factor	$p=a/3$	$q=2p-7$
15	$3*5$	5	3
16	2^4		
21	$3*7$	7	7
27	3^3	9	
39	$3*13$	13	19
57	$3*19$	19	31
64	2^6		
111	$3*37$	37	67
129	$3*43$	43	79
201	$3*67$	67	127
219	$3*73$	73	139
237	$3*79$	79	151
309	$3*103$	103	199
327	$3*109$	109	211
417	$3*139$	139	271
471	$3*157$	157	307
579	$3*193$	193	379
669	$3*223$	223	439
831	$3*277$	277	547
921	$3*307$	307	607
939	$3*313$	313	619
1024	2^{10}		

この場合, 素数 $a=p$ の解が多い. ただし, $q=(p-13)/6$ とおくとき q は素数とする.

命題 4. $m=-18$ に対し,$a=3p(p\neq 3, p:$ 素数$)$ かつ $q=2p-7$ が素数なら $a=3p$ は解.

Proof

$m=-18$ を式 $\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m$ に代入すると $\sigma(\sigma(a)-18)=2a-18.$

$a=3p,(p\neq 5)$ とおくと $\sigma(a)-18=4(p+1)-28=4p-14=2(2p-7).$ ここで, $q=2p-7$ は素数と仮定する. $\sigma((\sigma(a)-18))=\sigma(2q)=3q+3.$

一方, $2a+m=6p-18=3(2p-6)=3(q+7)-18=3q+3.$ よって, $\sigma(\sigma(a)-18)=2a-18.$

End

この逆が次の形で成立.

命題 5. $\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m,\ m=-18$ のとき

$a=3L,(L\neq 0 \bmod 7)$ と書ける解があるなら, $p=L, q=2p-7$ はともに素数.

Proof.

$a=3L$ に対して, $A=\sigma(3L)-18=4\sigma(L)-18=2(2\sigma(L)-9)$ となるので

$Q=2\sigma(L)-9$ とおくとき Q は奇数で $A=2Q, \sigma(A)=2a-18=6(L-3).$

$$\begin{aligned}\sigma(A)&=\sigma(2Q)\\&=3\sigma(Q)\geq 3Q+3\\&=6\sigma(L)-27+3\\&=6\sigma(L)-24\\&\geq 6L+6-24=6(L-3)\end{aligned}$$

$3\sigma(Q)=3Q+3, \sigma(A)=6(L-3)$ はすでに示されているのですべて等号成立.

$3\sigma(Q)\geq 3Q+3$, $6\sigma(L)-24=6L+6-24$ ゆえに

$$\sigma(Q)=Q+1, \sigma(L)=L+1.$$

よって, $L=p, q=2p-5$ はともに素数.

End

4.3 $m = -14$

表 6: $m = -14$

a	factor	$b = a - 13$	$q = b/6$
16	2^4	3	
37	37	24	4
43	43	30	5
64	2^6	51	
67	67	54	9
79	79	66	11
127	127	114	19
128	2^7	115	
151	151	138	23
199	199	186	31
247	$13 * 19$	234	39
271	271	258	43
317	317	304	50.66666667 76
331	331	318	53
367	367	354	59
379	379	366	61
439	439	426	71
487	487	474	79
512	2^9	499	
547	547	534	89
619	619	606	101
631	631	618	103
691	691	678	113
907	907	894	149
919	919	906	151
991	991	978	163
1051	1051	1038	173

この場合, 素数 $a = p$ の解が多い. ただし, $q = (p - 13)/6$ とおくとき q は素数とする.

$m=-14$ を式 $\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m$ に代入すると $\sigma(\sigma(a)-14)=2a-14$.

命題 6. $a=p, p\neq 2,3$ とおくと $\sigma(a)-14=p-13$. ここで, $6q=p-13$. q は素数と仮定する. a は $\sigma(\sigma(a)-14)=2a-14$ の解になる.

$\sigma(\sigma(a)-14)=2a-14$
$\sigma(a)-14=6q$. のとき, $\sigma(6q)=12q+12$ になる. よって,

$$\sigma(\sigma(a)-14)=12q+12=2p-26+12=2a-14.$$

q は素数との仮定は本質的仮定である.

$a=317$ については $b=a-13=304$ は 6 の倍数ではない. $304=2^4*19$ であって, $620=\varphi(304)$ となり $2a+m=2*317-14=620$. これは正しいから 317 は解である.

317 は通常解ではない.

解 a に対して $q=(a-13)/6$ を次に示した.

$b/6$ が整数にすらならない解は独自の解であり, 一匹狼 (lonely wolf) と呼ばれるにふさわしい.

4.4 $m = -58$

$m = -58$ を式 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ に代入する.

表 7: $m = -58$

a	factor	$b = a - 57$	$q = b/28$
81	3^4	24	
86	$2 * 43$	29	
128	2^7	71	
197	197	140	5
281	281	224	8
421	421	364	13
701	701	644	23
1093	1093	1036	37
1373	1373	1316	47
1429	1429	1372	49
1625	$5^3 * 13$	1568	56
1709	1709	1652	59
1933	1933	1876	67
2255	$5 * 11 * 41$	2198	78.5
2269	2269	2212	79
2381	2381	2324	83
2549	2549	2492	89
2717	$11 * 13 * 19$	2660	95
3109	3109	3052	109
3221	3221	3164	113
3613	3613	3556	127
4229	4229	4172	149
4621	4621	4564	163
4733	4733	4676	167
5573	5573	5516	197
6301	6301	6244	223

$A = \sigma(a) - 58$ とおく. $b = \sigma(A)$ が $2a - 58$ になれば a は解.

命題 7. *$a = p$ が素数で $A = p - 57 = 28q, (q:$ 素数$)$ となると仮定する. a は解.*

Proof
$b = \sigma(A) = \sigma(p - 57) = \sigma(28q) = 56(q + 1)$ になる.
一方, $2a - 58 = 2p - 58 = 2(57 + 28q) - 58 = 56q + 2 * 57 - 58 = 56(q + 1)$.
End

$a = p$ が素数であっても $\dfrac{p - 57}{28}$ が整数でない例はそこそこある. たとえば, $a = 281, 1429,$
この辺りは研究不足

4.5 $m = -994$

式 $\sigma(\sigma(a) - 994) = 2a - 994$ に代入する.

表 8: $m = -994$

p	factor	$b = p - 993$	$c = b/31$	$q = c/16$
6449	6449	5456	176	11
12401	12401	11408	368	23
15377	15377	14384	464	29
27281	27281	26288	848	53
31249	31249	30256	976	61
36209	36209	35216	1136	71
37201	37201	36208	1168	73
40177	40177	39184	1264	79
45137	45137	44144	1424	89
52081	52081	51088	1648	103
55057	55057	54064	1744	109
57041	57041	56048	1808	113
74897	74897	73904	2384	149
512	2^9			
2093	$7 * 13 * 23$			
7385	$5 * 7 * 211$			
13349	$7 * 1907$			
31913	$7 * 47 * 97$			

a を素数 p とする. $b = p - 993$, $c = b/31, q = c/16$ とおくと,q も素数になる.

命題 8. $a = p$ は素数で $q = (p - 993)/496$:素数と仮定する. そのとき a は解.

Proof
$A = \sigma(a) + m = p + 1 - 994$ とおくと, $A = 496q$. 496 は第 3 の完全数.
$\sigma(A) = 496q = \sigma(496)\sigma(q) = 2 * 496 * (q + 1) = 992(q + 1)$.
一方, $p - 993 = 496q$. それゆえ

$$\begin{aligned}
\sigma(A) &= 496q \\
&= \sigma(496)\sigma(q) \\
&= 2 * 496 * (q + 1) \\
&= 992(q + 1).
\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}
2a + m = 2p - 994 &= 2p - 994 \\
&= 2(993 + 496q) - 994 \\
&= 2 * 993 + 992q - 993 - 1 \\
&= 993 + 992q - 1 \\
&= 992(q + 1).
\end{aligned}$$

よって, $\sigma(\sigma(a) + m) = \sigma(A) = 2a + m$.
End

5 部分解の構成

与えられた m に対して $\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m$ を満たす a を求めることは通例容易ではない.

水谷一は次の条件下で解を部分的に構成できることを示した.

命題 9 (水谷一)**.** α を完全数とし, $m=-2\alpha-2$ とおく.

p,q は素数として, $p=\alpha q+2\alpha+1$ を満たすと仮定する. $a=p$ は次の式 $\sigma(\sigma(a)+m)=2a\quad+m$ を満たす.

Proof.

$$\sigma(p)=p+1=\alpha q+2\alpha+2.$$

$\sigma(\sigma(a)+m)=\alpha q+2\alpha+2+m=\alpha q$ により α が q でわれないとき $\sigma(a)+m=\sigma(\alpha q)$ によって

$$\sigma(\sigma(a)+m)=\sigma(\alpha q)=2\alpha(q+1)=2\alpha q+2\alpha.$$

$p=\alpha q+2\alpha+1$ を用いると,

$$\begin{aligned}2\alpha q+2\alpha&=2p-2(2\alpha+1)+2\alpha\\&=2p-2\alpha-2\\&=2p+m\end{aligned}$$

これより

$$\sigma(\sigma(a)+m)=2p+m.$$

End

5.1 解の例

α が q でわれない条件を満たさないとき xx で示す.

1) $\alpha=6$
こうして 43,79,91,127, などの解がえられた.

2). $\alpha=28$ のとき

表 9: $\alpha = 6$ のとき水谷構成による解

q	p	prime ?
3	31	xx
5	43	
7	55	x
11	79	
13	91	
17	115	x
19	127	
23	151	
29	187	x
31	199	
37	235	x
41	259	x
43	271	
53	331	
59	367	

表 10: $\alpha = 28$ のとき水谷構成による解

q	p	prime ?
3	141	x
5	197	
7	253	xx
11	365	x
13	421	
17	533	x
19	589	x
23	701	
29	869	x
31	925	x
37	1093	
41	1205	x
43	1261	x
53	1541	x
59	1709	

6　$w=(a-1)/(\sigma(a)-a)$ 整数の場合

素数 P に対して, $a=P^e$ のとき $(P-1)\sigma(a)=(P-1)\sigma(P^e)=Pa-1$ を満たす.
$\overline{P}=P-1$ を使うと, $\overline{P}\sigma(a)=Pa-1=\overline{P}a-1+a$ なので,

$$\overline{P}(\sigma(a)-a)=a-1.$$

ここで, この式を a を未知数と見て方程式と考えこの解を概完全数という.
素数べきは概完全数であるが, この他に概完全数があるか, という問題がある.
さらに一般に捉えて, $\sigma(a)-a$ が $a-1$ の約数になる場合をパソコンで調べてみた. ただし a が素数の場合を除き $w_0=(a-1):(\sigma(a)-a)$ とき $w=w_0+1$ を表示してみたら素数べき以外の場合を含めすべて素数となった.

表 11: $w=(a-1)/(\sigma(a)-a)$ 整数の場合

a	$\sigma(a)$	$w=(a-1)/\sigma(a)-1)+1$	factor
16	31	2	2^4
25	31	5	5^2
27	40	3	3^3
32	63	2	2^5
49	57	7	7^2
64	127	2	2^6
77 *	96	5	$7*11$
81	121	3	3^4
121	133	11	11^2
125	156	5	5^3
128	255	2	2^7
169	183	13	13^2
243	364	3	3^5
256	511	2	2^8
289	307	17	17^2
343	400	7	7^3
361	381	19	19^2
512	1023	2	2^9
529	553	23	23^2

表 12: $w = (a-1)/(\sigma(a)-a)$ 整数の場合

a	$\sigma(a)$	$w = (a-1)/\sigma(a)-1)+1$	factor
611 *	672	11	$13*47$
625	781	5	5^4
729	1093	3	3^6
841	871	29	29^2
961	993	31	31^2
1024	2047	2	$2^{1}0$
1073 *	1140	17	$29*37$
1331	1464	11	11^3
1369	1407	37	37^2
1681	1723	41	41^2
1849	1893	43	43^2
2033 *	2160	17	$19*107$
2048	4095	2	$2^{1}1$
2187	3280	3	3^7
2197	2380	13	13^3
2209	2257	47	47^2
2401	2801	7	7^4
2809	2863	53	53^2
3125	3906	5	5^5
3481	3541	59	59^2
3721	3783	61	61^2
4096	8191	2	$2^{1}2$
4489	4557	67	67^2
4913	5220	17	17^3
5041	5113	71	71^2
5293 *	5440	37	$67*79$
5329	5403	73	73^2
6031 *	6232	31	$37*163$
6241	6321	79	79^2
6561	9841	3	3^8

表 13: $w = (a-1)/(\sigma(a)-a)$ 整数の場合

a	$\sigma(a)$	$w = (a-1)/\sigma(a)-1)+1$	factor
6859	7240	19	19^3
6889	6973	83	83^2
7921	8011	89	89^2
8192	16383	2	2^13
9409	9507	97	97^2
9983 *	10200	47	$67 * 149$
10201	10303	101	103^2
10609	10713	103	107^2
11449	11557	107	109^2
11881	11991	109	23^3
12167	12720	23	113^2
12769 *	12883	113	$61 * 229$
13969	14260	49	11^4
14641	16105	11	5^6
15625 *	19531	5	$37 * 431$
15947	16416	35	127^2
16129	16257	127	2^14
16384	32767	2	7^5
16807	19608	7	131^2
17161	17293	131	137^2
18769	18907	137	139^2
19321	19461	139	3^9
19683	29524	3	149^2
22201	22351	149	151^2
22801 *	22953	151	$83 * 283$
23489	23856	65	29^3
24389	25260	29	157^2

表 14: $w = (a-1)/(\sigma(a)-a)$ 整数の場合

a	$\sigma(a)$	$w = (a-1)/\sigma(a)-1)+1$	factor
24649 *	24807	157	$43 * 587$
25241	25872	41	163^2
26569	26733	163	167^2
27889	28057	167	13^4
28561	30941	13	31^3
29791	30784	31	173^2
29929	30103	173	179^2
32041	32221	179	181^2
32761	32943	181	$2^{1}5$
32768	65535	2	191^2
36481	36673	191	193^2
37249	37443	193	197^2
38809	39007	197	199^2
39601 *	39801	199	$191 * 211$
40301	40704	101	211^2
44521	44733	211	223^2
49729 *	49953	223	$139 * 359$
49901 *	50400	101	$109 * 461$
50249	50820	89	37^3
50653 *	52060	37	$137 * 373$
51101	51612	101	227^2
51529	51757	227	229^2
52441	52671	229	233^2
54289*	54523	233	$211 * 269$
56759	57240	119	239^2
57121	57361	239	241^2
58081	58323	241	$3^{1}0$
59049	88573	3	251^2

表 15: $w = (a-1)/(\sigma(a)-a)$ 整数の場合

a	$\sigma(a)$	$w = (a-1)/\sigma(a)-1)+1$	factor
63001 *	63253	251	$79 * 823$
65017	65920	73	2^16
65536	131071	2	257^2
66049	66307	257	41^3
68921	70644	41	263^2
69169 *	69433	263	$229 * 313$
71677	72220	133	269^2
72361	72631	269	271^2
73441	73713	271	277^2
76729	77007	277	5^7
78125	97656	5	281^2
78961	79243	281	43^3
79507	81400	43	283^2
80089	80373	283	17^4
83521 *	88741	17	$149 * 571$
85079	85800	119	293^2
85849	86143	293	307^2
94249	94557	307	311^2
96721*	97033	311	$67 * 1451$
97217*	98736	65	$7 * 61 * 229$
97783	114080	7	313^2
97969 *	98283	313	$263 * 373$
98099 *	98736	155	$113 * 877$
99101 *	100092	101	$113 * 877$