新規まき直し 第2期1回目 2018年2月9日
$a = mp$ 問題

飯高 茂

平成29年12月13日

1　$a = mp$ 問題

与えられた m に対して, m を割らない素数 p をとるとき $a = mp$ とおくと
$\sigma(a) = \sigma(m)\sigma(p) = \sigma(m)(p+1) = \sigma(m)\dfrac{a}{m} + \sigma(m)$ を満たす.
分母を払って,

$$m\sigma(a) = \sigma(m)a + m\sigma(m)$$

これを a を未知数とする ($a = mp$ 問題の) 方程式とみる.m を割らない素数 p をとると mp は解になる. これを通常解という.
通常解以外の解があればそれをすべて探したい.

定理 1. m の素因数 r をとり, $m = r^e m'$ とおく. $\alpha = r^{2e+1}m'$ は $a = mp$ 問題の解になる.

この解を一般に擬素数解という. ここでは r^{e+1} を擬素数 (pseudo prime) という.
Proof
$a = r^{2e+1}m'$ について計算し $m\sigma(a) = \sigma(m)a + m\sigma(m)$ を確認すればよい.
$W = r^{2e+2} - 1, \bar{r} = r - 1, N = r^{e+1} - 1,$ とおくと

$$\sigma(a) = \sigma(r^{2e+1})\sigma(m') = \frac{W}{\bar{r}}\sigma(m'), \sigma(m) = \frac{N}{\bar{r}}\sigma(m').$$

よって, $m\sigma(a) = r^e m' \dfrac{W}{\bar{r}}\sigma(m') = r^e m' W\sigma(m')/\bar{r}$.
次に右辺は

$$
\begin{aligned}
\sigma(m)a + m\sigma(m) &= \frac{N}{\overline{r}}\sigma(m')(r^{2e+1}m' + m) \\
&= r^e m' \frac{N}{\overline{r}}\sigma(m') \\
&= (r^{e+1}+1)N r^e m' \sigma(m')/\overline{r} \\
&= (r^{2e+2}-1) r^e m' \sigma(m')/\overline{r} \\
&= r^e m' W \sigma(m')/\overline{r}
\end{aligned}
$$

したがって, 等式が確認された.

注意 1 (H.Mizutani)**.** m の素因数ではない素数 p を $1 = p^0$ と見ると, $p^{0+1} = p$ なので $\alpha = pm$ を解と見れないことはない. こう見ると, 擬素数解は通常解 $\alpha = pm$ を含む.

2 研究の発端

ここで時計を戻して私が定年退職した頃の思い出を書く. 2013 年の 3 月に退職し 4 月に都内の私立高校に行った. 高校生のクラブ活動としての数学研究を支援することが目的である.

クラブ活動中の高校生と話してみると, クラブ活動では「数学の研究をするのが目的」という. 「実際完全数を研究したい,」あるいは「自分はオイラー関数の研究をしたい」などというのでいささか驚いた.

命題 1. *m が素数べき r^ε なら $a = r^\varepsilon p$ 問題の解は $r^\varepsilon p, (p : r$ 以外の素数$)$ と擬素数解 $r^{2\varepsilon+1}$.*

次に $\sigma(a) = \sigma(m)a + m\sigma(m)$ の解で m の倍数ではないものを列挙する. したがって, 擬素数解と通常解以外の解を与える. これらをエイリアン解という.

表 1: $a = mp, m = 6$ エイリアン解

$m = 6$	$2 * 3$
a	素因数分解
304	$2^4 * 19$
127744	$2^8 * 499$
33501184	$2^{12} * 8179$

$a = 6p$ 問題の方程式は $\sigma(a) = 2a + 12$ という簡単な形になる. それは $\sigma(6) = 12$ という特殊事情のせいである.

定理 2. *$\sigma(a) = 2a + 12$ の解が 6 の倍数なら $a = 6p, (p \neq 2, 3$:素数$)$ はすべて解.*

Proof.

a を素因子分解して $a = 2^e 3^f k, k > 1, (k$ は 2,3 で割れない) とおく. このとき, k が素数になることを示せばよい.

$X = 2^e, Y = 3^f$ とおき式を Y について 整理する, $A = 2X - 1, B = 3Y - 1$ とおくとき $2\sigma(a) = AB\sigma(k)$. よって次の基本方程式ができる.

$$AB\sigma(k) = 4XYk + 24.$$

$AB\sigma(k) = 3Y\sigma(k)A - A\sigma(k) = 4XYk + 24$ を整理して

$$(3\sigma(k)(2X - 1) - 4kX)Y = 24 + (2X - 1)\sigma(k).$$

$Y \geq 3$ により,

$$24 + (2X - 1)\sigma(k) \geq 3(3\sigma(k)(2X - 1) - 4kX) = 9\sigma(k)(2X - 1) - 12kX.$$

$$24 + 8\sigma(k) \geq (16\sigma(k) - 12k)X.$$

これよりよって

$$2(\sigma(k) + 3) \geq X(4\sigma(k) - 3k).$$

$X \geq 2$ によって,

$$2\sigma(k) + 6 \geq X(4\sigma(k) - 3k) \geq 8\sigma(k) - 6k.$$

ゆえに

$$6k + 6 \geq 6\sigma(k) \geq 6k + 6.$$

$\sigma(k) = k + 1$ が成り立ち, k が素数になる.

End

次の形で, 擬素数解が求まる.

命題 2. $\sigma(a) = 2a + 12$ の解 a が $a = 2^e 3^f (e, f \geq 1)$ となるなら, $a = 24$ または 54.

Proof. (記号は踏襲する) ただし $k = 1$.

$A = 2X - 1, B = 3Y - 1$ とおくと,

$$AB = 4XY + 24.$$

これより計算を行うと

$$(2X - 3)(Y - 1) = 26.$$

$2X - 3$ は奇数なので $26 = \alpha\beta$ において i) $\alpha = 1, \beta = 26$; $2X - 3 = 1$ より $X = 2, Y = 27 = 3^3. a = 54$.

ii) $\alpha = 13, \beta = 2$; $X = 8, Y = 3. a = 24$.

End

注意 2. $\sigma(a) = 2a + 12$ の解 a が $a = 2^e k$(k は 6 と互いに素) となるなら, k は素数で $k = 2^{e+1} - 13$ を満たすことになるか.

これを示すことは可能かもしれない. 次の結果はそのための小さい一歩である.

定理 3. $\sigma(a) = 2a + 12$ の解 a が $a = 2^e q^f, (e \geq 1, f \geq 2, q$ は 奇素数) となるなら, $q = 3, f = 3, e = 1$. すなわち擬素数.

Proof
$a = 2^e k q^f, X = 2^e, Y = q^f$ とする. いつものように $A = 2^{e+1} - 1, B = q^{f+1} - 1$ とおくと,
$\overline{q} = q - 1$ とおくと $\overline{q}\sigma(a) = AB, A = 2X - 1, B = rY - 1$.
$\overline{q}\sigma(a) = 2\overline{q}a + 12\overline{q}$ を元にし式を変形し

$$(2X - 1)(qY - 1) = \overline{q}Y(2X - 1) + \overline{q}Y + 12\overline{q}.$$

さらに式を変形して

$$(2X - 1)(qY - 1 - \overline{q}Y) = \overline{q}Y + 12\overline{q}.$$

ゆえに

$$(2X - 1)(Y - 1) = \overline{q}(Y + 12).$$

$Y - 1$ で割ると

$$2X - 1 = \frac{\overline{q}(Y + 12)}{Y - 1}.$$

$$2X - 1 = \overline{q}\frac{Y + 12}{Y - 1} = \overline{q} + \frac{13\overline{q}}{Y - 1}.$$

$f \geq 2$ なので順次調べる.

1) $Y = q^2$.
$\frac{13\overline{q}}{Y-1} = \frac{13}{q+1}$ は整数, $q + 1$ は偶数. よって矛盾.

2) $Y = q^3$.
$\frac{13\overline{q}}{Y-1} = \frac{13}{q^2+q+1}$ は整数. $q^2 + q + 1 = 13$ になり, $q(q + 1) = 12$.
よって, $q = 3$.
$2X - 1 = \overline{q} + \frac{13\overline{q}}{Y-1} = 2 + 1$ によれば $X = 2$. $a = 2 * 3^3$, 擬素数.

3) $Y = q^f, f \geq 4$.
$q^{f-1} + \cdots 1 > 13$ が成り立つので矛盾.
End

第 2 完全数 28 の場合.

表 2: $a = mp, m = 28$

$m = 28$	$2^2 * 7$
a	素因数分解
4544	$2^6 * 71$
9272	$2^3 * 19 * 61$
14552	$2^3 * 17 * 107$
25472	$2^7 * 199$
74992	$2^4 * 43 * 109$
495104	$2^9 * 967$
6019264	$2^6 * 163 * 577$
15317696	$2^6 * 137 * 1747$
35019968	$2^6 * 131 * 4177$
53032832	$2^7 * 317 * 1307$

以上の,$m = 6, 28$ は完全数.

m が完全数なら $\sigma(m) = 2m$ になり $a = mp$ 問題の方程式は

$$\sigma(a) = 2a + 2m$$

この解 a は $-2m$ だけ平行移動した完全数である.

完全数の一般論で, たとえば正規形の解 $2^e q$,(ここで $q = 2^{e+1} - 1 - 2m$:素数.) が使えるので解が構成しやすい.

また第 2 正規形の解 $2^e rq$ もアルゴリズムでかなり作れる.

$a = 28p$ 問題の方程式は $\sigma(a) = 2a + 56$ という簡単な形になる. それは $\sigma(28) = 56$ という特殊事情のせいである.

定理 4. $\sigma(a) = 2a + 56$ の解が *28* の倍数なら $a = 28p, (p \neq 2, 7$ *:素数)*.

定理 5. $\sigma(a) = 2a + 56$ の解が $2^e 7^f$ の倍数なら $a = 2^5 * 7, 4 * 7^3$.

たぶん証明可能.

表 3: $a = mp, m = 30$

$m = 30$	$2 * 3 * 5$
a	素因数分解
1520	$2^4 * 5 * 19$
638720	$2^8 * 5 * 499$

$a = 30p$ 問題のエイリアン解は $a = 6p$ 問題のエイリアン解 $2^4 * 19$ の 5 倍としてえられた.

これらのことから高橋洋翔は次の結果を予想し, 証明した.

定理 6. *$a = mp$ 問題の解 α について, m, α と互いに素な素数 q について $m' = mq$ とおくと $a' = \alpha q$ は $a = m'p$ 問題の解となる.*

定理 7. *$a = mp$ 問題 について, m と互いに素な素数 q について $m' = mq$ とおく. α は $a = m'p$ 問題の解で 1 回だけ q で割れるとする.*

$a = \dfrac{\alpha}{q}$ は $a = mp$ 問題 の解になる.

3 $a = 36p$

定理 8. $a = 36p$ は通常解と擬素数解しかない.

言い換えればエイリアン解はない. Proof.

$m = 36$ のとき $\sigma(m) = 7 * 13 = 91$ により問題の方程式は $36a = 91a + \alpha, \alpha = 3276 = 36 * 91 = 2^2 3^2 * 7 * 13$.

この式により a は 4 の倍数であり 6 の倍数でもある.

a を素因子分解して $a = 2^e 3^f k : k$:2,3 で割れない, とおく.$e \geq 2, f \geq 2$ を元に $e = f = 2$, k が素数になることを示せばよい.

$X = 2^e, Y = 3^f$ とおき式を整理する,

$A = 2X - 1, B = 3Y - 1$ とおくとき $2\sigma(a) = AB\sigma(k)$.

よって次の基本方程式ができる.

$$18AB\sigma(k) = 91XYk + \alpha.$$

途中式を略す.

$$18\sigma(k) - \alpha = Y(91Xk - 54(2X - 1)\sigma(k)) + 36X\sigma(k).$$

$$2\sigma(k) - 3 * 91 \geq (91k - 108\sigma(k))X + 54\sigma(k).$$

$1 + k \geq \sigma(k)$ が出る. そして $1 + k = \sigma(k)$, $e = f = 2$.

```
uu(X,Y,k,s):=(18*(2*X-1)*(3*Y-1)*s-91*X*Y*k-3276);

126*s*(3*Y-1)-364*k*Y-3276

3276*s-3276*k-3276
```

表 4: $a = mp, m = 42$

$m = 42$	
a	素因数分解
42	$2 * 3 * 7$
a	素因数分解
2128	$2^4 * 7 * 19$

$m = 6q$ ($q \neq 2, 3$:素数) の場合はエイリアン解が出てくる.

$m = 6q$ の場合のエイリアン解 a が aq として浸入してくるのでこれらをとくに invador と呼ぶ.

表 5: $a = mp, m = 66 = 6 * 11$

$m = 66$	$2 * 3 * 11$
a	素因数分解
3344	$2^4 * 11 * 19$
1405184	$2^8 * 11 * 19$

4 $m = 6q$

$m = 6q$ のとき $a = mp(p \neq 2, 3, q)$ とする.
$\widetilde{q} = q + 1$ を使う.

表 6: $a = mp, m = 44$

$m = 44$	$2^2 * 11$
a	素因数分解
1210	$2 * 5 * 11^2$

5　$m = 44$ の場合

$\sigma(a) = \frac{a\sigma(m)}{m} + \sigma(m)$ において $m = 44$ のときは

$\sigma(m) = \sigma(4)\sigma(11) = 7 * 12$ なので, $\dfrac{\sigma(m)}{m} = \dfrac{21}{11}$. よって,

$$11\sigma(a) = 21a + 7 * 12 * 11.$$

a は 11 の倍数なので, $a = 11Q$ と自然数 Q で表される.

1) Q は 11 で割れないとする.

$\sigma(a) = 12\sigma(Q)$ により

$$11 * 12\sigma(Q) = 11 * 21 * Q + 7 * 12 * 11.$$

よって,

$$4\sigma(Q) = 7Q + 7 * 4.$$

したがって, Q は偶数で $Q = 2^{\varepsilon}Q_1$ (Q_1 は奇数) とおく. $\varepsilon \geq 2$.

$W = 2^{\varepsilon+1} - 1$ とおくとき, $\sigma(Q) = W\varepsilon(Q_1)$.

よって

$$4W\sigma(Q_1) = 7 * 2^{\varepsilon}Q_1 + 7 * 4.$$

4 で割ると

$$W\sigma(Q_1) = 7 * 2^{\varepsilon-2}Q_1 + 7.$$

$$7 * 2^{\varepsilon-2}Q_1 + 7 = W\sigma(Q_1) \geq W(Q_1 + 1) = WQ_1 + W.$$

$$(7 * 2^{\varepsilon-2} - W)Q_1 + 7 \geq W - 7 = 2^{\varepsilon+1} - 8 \geq 0.$$

$$7 * 2^{\varepsilon-2} - W = 7 * 2^{\varepsilon-2} - 2^{\varepsilon+1} + 1 = -2^{\varepsilon-2} + 1 \geq 0.$$

これより $\varepsilon - 2 = 0$. $W = 7$ なので, $4\sigma(Q_1) = 4Q_1 + 4$. 4 で割って $\sigma(Q_1) = Q_1 + .$ したがって $Q_1 = p$ は素数で, $a = 44p$.

パソコンの結果によると, Q は 11 で一度だけ割れる場合がある.
$a = 11^2 Q_2$ と自然数 Q_2 で表せて, Q_2 は 11 と互いに素.
$\sigma(11^2) = 12 + 121 = 133 = 7 * 19$ になり,

$$19\sigma(Q_2) = 33Q_2 + 12.$$

この解 Q_2 は 10 になるらしい. 実際, $19\sigma(10) = 19 * 3 * 6 = 342$, $33Q_2 + 12 = 342$. しかし到底証明できない. たぶん $a = 10 * 11^2$ が唯一のエイリアン解.

事実 1. $m = 44 * 7$ に対する $a = mp$ 問題のエイリアン解

表 7: $a = mp, m = 44 * 7$ の解

$m = 44 * 7$	
a	素因数分解
8470	$2 * 5 * 7 * 11^2$
49984	$2^6 * 11 * 71$
101992	$2^3 * 11 * 19 * 61$
160072	$2^3 * 11 * 17 * 107$

解 $a = 8470 = 2*5*7*11^2$ は $m = 44$ でのエイリアン解 $a = 2*5*11^2$ が元になった侵入者であるが $a = 49984 = 2^6*11*71, 101992 = 2^3*11*19*61, 160072 = 2^3*11*17*107$ はすべて独立に生まれたエイリアンである.

これらを Home Grown と呼んでもいいかもしれない.

表 8: $a = mp, m = 66$

$m = 66$	
a	素因数分解
66	$2 * 3 * 11$
a	素因数分解
3344	$2^4 * 11 * 19$
1405184	$2^8 * 11 * 19$

6 $m = 6q$ の場合

表 9: $a = mp, m = 78$

$m = 78$	$2 * 3 * 13$
a	素因数分解
3952	$2^4 * 13 * 19$
1660672	$2^8 * 13 * 499$

表 10: $a = mp, m = 84$

$m = 84$	$2^2 * 3 * 7$
a	素因数分解
13632	$2^6 * 3 * 71$
27816	$2^3 * 3 * 19 * 61$
43656	$2^3 * 3 * 17 * 107$
76416	$2^7 * 3 * 199$

表 11: $a = mp, m = 102$

$m = 102$	$2 * 3 * 17$
a	素因数分解
5168	$2^4 * 17 * 19$

表 12: $a = mp, m = 132$

$m = 132$	$2^2 * 3 * 11$
a	素因数分解
3630	$2 * 3 * 5 * 11^2$

表 13: $a = mp, m = 138$

$m = 138$	$2 * 3 * 23$
a	素因数分解
6992	$2^4 * 19 * 23$

表 14: $a = mp, m = 140$

$m = 140$	$2^2 * 5 * 7$
a	素因数分解
22720	$2^6 * 5 * 71$
46360	$2^3 * 5 * 19 * 61$
72760	$2^3 * 5 * 17 * 107$
127360	$2^7 * 5 * 199$

表 15: $a = mp, m = 150$

$m = 150$	$2 * 3 * 5^2$
a	素因数分解
7600	$2^4 * 5^2 * 19$

表 16: $a = mp, m = 210$

$m = 210$	$2 * 3 * 5 * 7$
a	素因数分解
10640	$2^4 * 5 * 7 * 19$

表 17: $a = mp, m = 222$

$m = 222$	
a	素因数分解
222	$2 * 3 * 37$
11248	$2^4 * 19 * 37$

表 18: $a = mp, m = 224$

$m = 224 = 2^5 * 7$	
a	素因数分解
4240	$2^4 * 5 * 53$
5096	$2^3 * 7^2 * 13$
11968	$2^6 * 11 * 17$
497536	$2^7 * 13^2 * 23$

表 19: $a = mp, m = 246$

$m = 246 = 6 * 41$	
a	素因数分解
12464	$2^4 * 19 * 41$

表 20: $a = mp, m = 252$

$m = 252 = 2^{*}3^{2} * 7 = 9 * 28$	
a	素因数分解
40896	$2^6 * 3^2 * 71$
83448	$2^3 * 3^2 * 19 * 61$
130968	$2^3 * 3^2 * 17 * 107$
229248	$2^7 * 3^2 * 199$

表 21: $a = mp, m = 258$

$m = 252 = 2^{*}3^{2} * 7 = 9 * 28$	
a	素因数分解
13072	$2^4 * 19 * 43$

表 22: $a = mp, m = 270$

$m = 270 = 2 * 3^3 * 5$	
50508	$2^2 * 3^2 * 23 * 61$
254208	$2^8 * 3 * 331$

表 23: $a = mp, m = 282$

$m = 282 = 6 * 47$	
a	素因数分解
14288	$2^4 * 19 * 47$

表 24: $a = mp, m = 294$

$m = 294 = 6 * 7^2$	
a	素因数分解
14896	$2^4 * 7^2 * 19$

表 25: $a = mp, m = 308$

$m = 308 = 28 * 11$	
a	素因数分解
8470	$2 * 5 * 7 * 11^2$
49984	$2^6 * 11 * 71$
101992	$2^3 * 11 * 19 * 61$
160072	$2^3 * 11 * 17 * 107$
280192	$2^7 * 11 * 199$

表 26: $a = mp, m = 318$

$m = 318 = 6 * 53$	
a	素因数分解
16112	$2^4 * 19 * 53$

表 27: $a = mp, m = 330$

$m = 330 = 6 * 5 * 11$	
a	素因数分解
16720	$2^4 * 5 * 11 * 19$

表 28: $a = mp, m = 354$

$m = 354 = 6 * 59$	
a	素因数分解
17936	$2^4 * 19 * 59$

表 29: $a = mp, m = 364$

$m = 364 = 2 * 7 * 13$	
a	素因数分解
59072	$2^6 * 13 * 71$
120536	$2^3 * 13 * 19 * 61$
189176	$2^3 * 13 * 17 * 107$
331136	$2^7 * 13 * 199$

表 30: $a = mp, m = 366$

$m = 366 = 6 * 61$	
a	素因数分解
18544	$2^4 * 19 * 61$

表 31: $a = mp, m = 402$

$m = 402$	$2 * 3 * 67$
a	素因数分解
20368	$2^4 * 19 * 67$

表 32: $a = mp, m = 420$

$m = 420$	$2^2 * 3 * 5 * 7$
a	素因数分解
68160	$2^6 * 3 * 5 * 71$
139080	$2^3 * 3 * 5 * 19 * 61$
218280	$2^3 * 3 * 5 * 17 * 107$
382080	$2^7 * 3 * 5 * 199$

表 33: $a = mp, m = 462$

$m = 462 \quad 2 * 3 * 7 * 11$

a	素因数分解
23408	$2^4 * 7 * 11 * 19$

表 36: $a = mp, m = 496$ 第 3 完全数

$m = 496$	$2^4 * 31$
a	素因数分解
2892	$2^2 * 3 * 241$
6104	$2^3 * 7 * 109$
170612	$2^2 * 13 * 17 * 193$
458144	$2^5 * 103 * 139$

表 37: $a = mp, m = 498$

$m = 498$	$2 * 3 * 83$
a	素因数分解
25232	$2^4 * 19 * 83$

表 38: $a = mp, m = 672$, 3 倍完全数 (Hiroshi Takahashi)

$m = 672 = 2^5 * 3 * 7$		
a	素因数分解	HomeGrown
12720	$2^4 * 3 * 5 * 53$	invador
15288	$2^3 * 3 * 7^2 * 13$	invador
35904	$2^6 * 3 * 11 * 17$	invador
96048	$2^4 * 3^2 * 23 * 29$	HomeGrown
1492608	$2^7 * 3 * 13^2 * 23$	invador
16763328	$2^6 * 3^3 * 89 * 109$	HomeGrown

invador from $m = 224$

表 39: $a = mp, m = 224$

$m = 224 = 2^5 * 7$	
a	素因数分解
4240	$2^4 * 5 * 53$
5096	$2^3 * 7^2 * 13$
11968	$2^6 * 11 * 17$
497536	$2^7 * 13^2 * 23$

7 $m = 2r$,(r:奇素数) の場合

$a = mp$ 問題の研究において, $m = 2r$,(r:奇素数) の場合,$r = 3$ のときエイリアンが出てきた. しかし, パソコンによる計算の結果によると $m = 10, 14, 22, 26$ などの場合はエイリアンが出てこないらしい.

次の著しい結果に到達した.

定理 9. *$m = 2r$,(r:奇素数) の場合,$r > 3$ とすると偶数の解に限るとエイリアン解は無い.*

Proof

$m = 2r$,(r:奇素数) の場合, $\widetilde{r} = r + 1$ を使うと . $\sigma(m) = 3\widetilde{r}$ であり

$a = mp$, ($p \neq r$ の奇素数) については $a = mp = 2rp$ なので

$$\sigma(a) = 3\widetilde{r}(p + 1) = 3\widetilde{r}p + 3\widetilde{r} = 3\widetilde{r}\frac{a}{2r} + 3\widetilde{r}.$$

$2r$ 倍して

$$2r\sigma(a) = 3\widetilde{r}a + 6r\widetilde{r}.$$

これを a を未知数とする方程式とみなして解を求める.

$r > 3$ としさらに a を偶数と仮定する.

方程式を 3 を法としてみると,

$$3\widetilde{r}a \equiv 0 \mod r.$$

$3\widetilde{r}a \equiv 3a \equiv 0 \mod r$ によって, $r > 3$ と仮定しているので, $a \equiv 0 \mod r$. よって, a は r の倍数でさらに a を偶数と仮定しているので, r の倍数 でもある.

a を素因数分解して k を 6 と互いに素の自然数とすると ,$a = 2^e r^f k$ とおける.

$X = 2^e, Y = r^f$ と書くとき,e,f¿0なので,X $\geq 2, Y \geq r$.

$\overline{r} = r - 1$ を用いると,

$$\sigma(a) = \sigma(2^e r^f k) = (2^{e+1} - 1)\frac{r^{f+1} - 1}{\overline{r}}\sigma(k) = \frac{(2X - 1)(rY - 1)\sigma(k)}{\overline{r}}.$$

よって,

$$\overline{r}\sigma(a) = (2X - 1)(rY - 1)\sigma(k).$$

$A = 2X - 1, B = rY - 1$ を用いると, $\overline{r}\sigma(a) = AB\sigma(k)$ と簡潔に表せる.

$2r\sigma(a) = 3\widetilde{r}a + 6r\widetilde{r}$ に $\overline{r}$ を掛けると

$$2r\overline{r}\sigma(a) = 3\overline{r}\widetilde{r}a + 6r\overline{r}\widetilde{r}.$$

さらに $R = \overline{r}\widetilde{r} = r^2 - 1, X = \dfrac{A + 1}{2}$ を用いて次のように式変形を行う.

$$2r\overline{r}\sigma(a) = 3Ra + 6rR.$$

$$
\begin{aligned}
2r\overline{r}\sigma(a) &= 2rAB\sigma(k) \\
&= 2rA\sigma(k)(rY-1) \\
&= 2r^2A\sigma(k)Y - 2rA\sigma(k).
\end{aligned}
$$

$3Ra = 3RXYk$ によって,

$$
\begin{aligned}
6rR &= 2r\overline{r}\sigma(a) - 3Ra \\
&= 2r^2A\sigma(k)Y - 2rA\sigma(k) - 3RXYk \\
&= 2r^2A\sigma(k)Y - 3RXYk - 2rA\sigma(k) \\
&= (2r^2A\sigma(k) - 3RXk)Y - 2rA\sigma(k) \\
&= (2r^2A\sigma(k) - 3R(\frac{A+1}{2})k)Y - 2rA\sigma(k)
\end{aligned}
$$

$Y \geq r$ によって

$$
\begin{aligned}
6rR &\geq (2r^2A\sigma(k) - 3R(\frac{A+1}{2})k)Y - 2rA\sigma(k) \\
&\geq (2r^2A\sigma(k) - 3R(\frac{A+1}{2})k)r - 2rA\sigma(k).
\end{aligned}
$$

r で除して

$$6R \geq (2r^2A\sigma(k) - 3R(\frac{A+1}{2})k) - 2A\sigma(k).$$

2 倍して,A で括ると

$$12R \geq (4r^2A\sigma(k) - 3R(A+1)k - 4A\sigma(k) = (4r^2\sigma(k) - 3Rk - 4\sigma(k))A - 3Rk.$$

$A = 2X - 1 \geq 3$ によって

$$
\begin{aligned}
12R &\geq 3(4r^2\sigma(k) - 3Rk - 4\sigma(k)) - 3Rk \\
&= 3(4r^2-4)\sigma(k) - 12Rk \\
&= 12R\sigma(k) - 12Rk \\
&= 12R(\sigma(k) - k).
\end{aligned}
$$

$$12R \geq 12R(\sigma(k)-k).$$

それゆえ $1 \geq \sigma(k)-k$.

$k>1$ なら $\sigma(k)-k \geq 1$ なので, $\sigma(k)-k=1$. よって k は素数. $X=2, A=3, Y=r$.

次に $k=1$ の場合を扱う. 擬素数の解になることの確認.

命題 3. $X=2^e2, Y=3^f, A=2X-1, e>0, f>0$ のとき $6rR=2r^2AY-2rA-3RXY$ を満たすなら $X=2, Y=r^3$ または $X=8, Y=r$.

Proof

$X=2$ のとき $Y=r^3$. $X=8$ のとき $Y=r$. は計算で出る.

$X=4$ のとき $Y=\frac{3r^3+4r}{r+6}$. $Y=r^2$ は解にならない.

End

8 $m=4r$,r:素数の場合

$a=mp$ 問題の研究において, $m=4r$,(r:奇素数) の場合,$r=7,11$ のときエイリアンが出てきた. しかし, パソコンによる計算の結果によると

次の著しい結果に到達した.

定理 10. *$m=4r$,(r:奇素数) の場合,$r>7$ とする. 解 a を 4 の倍数に限るとエイリアン解は無い.*

Proof

$m=4r$,(r:奇素数) の場合,$\sigma(m)=7r+7$.

$a=4rp, (p>11:$ 素数$)$ に対して, $\sigma(a)=7\widetilde{r}(p+1)=\dfrac{7\widetilde{r}a}{4r}+7\widetilde{r}$. よって,

$$4r\sigma(a)=7\widetilde{r}a+28r\widetilde{r}.$$

法 r のとき

$$0=7\widetilde{r}a \equiv 7a \mod r.$$

これより $r \neq 7$ によって a は r で割れる. 解 a を 4 の倍数に限るという仮定の下で $a=2^er^fk, (e \geq 2, f \geq 1, k$ は $2r$ と互いに素な素数.

$X=2^e, Y=r^f$ とおき $A=2X-1, B=rY-1, \overline{r}=r-1$ を用いると

$$\overline{r}\sigma(a)=AB\sigma(k), \widetilde{r}a=\widetilde{r}XYk.$$

$4r\sigma(a)=7\widetilde{r}a+28r\widetilde{r}$ に代入するために, $\overline{r}$ を掛けて式を整理する.

$R=\widetilde{r}\overline{r}=r^2-1$ とおくと

$$4r\widetilde{r}\sigma(a)=7Ra+28rR.$$

$$4rAB\sigma(k) = 7RXYk + 28rR.$$

$AB\sigma(k) = Ar\sigma(k)Y - A\sigma(k)$ なので, Y でまとめる.

$$\begin{aligned}
28rR &= 4rAB\sigma(k) - 7RXYk \\
&= Ar\sigma(k)Y - A\sigma(k) - 7RXYk \\
&= Ar\sigma(k)Y - 7RXYk - A\sigma(k) \\
&= (Ar\sigma(k) - 7RXk)Y - A\sigma(k).
\end{aligned}$$

$X = \frac{A+1}{2}$ 代入するため 2 倍する.

$$56rR(2Ar\sigma(k) - 7R(A+1)k)Y - 2A\sigma(k).$$

$X \geq 4, Y \geq r$ を代入する. $k > 1$ のとき

$$56r(k+1) \geq 56r\sigma(k).$$

よって, $k+1 \geq \sigma(k)$. これより k は素数 p なり $k+1 = \sigma(k), X = 4, Y = r, a = 4rk$.

これより k は素数 p となり $a = 4rp$.

End

$m = 4r$,(r:奇素数) の場合 $r = 7$ と $r \neq 7$ はここで差が出るのである.

オイラーが偶数完全数のときと同じように a が偶数ならできるか. エイリアン解がないことを示せるだろうか.

a は 4 で割れることを仮定すればエイリアンは出ない.

$m = 44$ において $a = 2Yk, Y = 11^f, k \neq 11, k > 2$ を仮定してエイリアンを探そう.