ゲームより面白い半完全数の世界

日本数学検定協会 学術顧問
飯高 茂

2016 年 11 月 19 日

1 半完全数

半完全数とは何だろう．完全数は聞いたことがあるという人は多い．たとえば, 6 や 28 は完全数である.

これらについて自分自身以外の約数 (真の約数という) を考える.

6 ならば, 真の約数は, 1,2,3 でこれらを加えると 1+2+3=6. こうして真の約数を足すと元の数が再現する.

28 ならば, 真の約数は, 1,2,4, 7,14, でこれらを加えると 1+2+4+7+14=28. こうして元の数 28 が再現する.

こういった性質を持つ整数を古代ギリシャの数学者 (ユークリッド) は完全数と呼んだ. 496,8128 も完全数であることは当時知られていた. ほかにこのような性質の数があるだろうかと 1800 年にわたって探し 15 世紀になって第 5 の完全数として 8 桁の数 33550336 が発見された.

半完全数は完全数の半分に違いないから, 3,14,248,4064 などがそうなるに違いない. 何だ, 簡単すぎてつまらないではないか.

このような感想を持っても当然だが, 半完全数は半分の完全数以外にある. なかには実に不思議な数もある.

たとえば 1155 は最も簡単な半分の完全数の例で, 素因数分解すると 3*5*7*11 となる. 奇数の素数を小さいほうから 4 つとり順にかけてできた数 1155 が半完全数の例になっている. こう言われても多くの人は信じないであろう.

2 モンスターの名前

半完全数の定義を正確にのべその定義に基づいて半完全数を探すことにしよう.

半完全数という名前に惹かれて彼らと出会う発見の旅に出ることになるが, 先取りして言うと, 半完全数には不思議な姿の数がありモンスターと呼びたくなるほ

どである. このモンスターを捕らえて名前をつけ, 彼らの性質を調べその性質が解明しえた時点でそのモンスターを get したという.

強大なモンスターは捕らえがたいが適当な強さのモンスターは 100 近くあると思われる. 読者も モンスターを捕らえ名前をつけ, その性質が証明できるであろう.

図 1: ユークリッド, 紀元前 3 世紀; イラスト 飯高順

3　完全数

a を自然数とするときその約数の和を $\sigma(a)$ と書く．これを a の関数とみてユークリッド関数という.

a, b が互いに素なら

$$\sigma(a)\sigma(b) = \sigma(ab)$$

が成り立つ．これをユークリッド関数の乗法性という.

$\sigma(a) = 2a$ を満たす数 a を 完全数 (perfect number) という.

$6, 28, 496, 8128$ などがあり古代の数学者ユークリッドによって考えられた.

これらの数は末尾が 6, または 8 でこれが交互に繰り返される.

これらを素因数分解すると

$$6 = 2 * (2^2 - 1), 28 = 2^2 * (2^3 - 1), 496 = 2^4 * (2^5 - 1), 8128 = 2^6 * (2^7 - 1)$$

などとなる.

2 のべきから 1 引いた $Q = 2^{e+1} - 1$ が素数になるとき $a = 2^e Q$ は完全数 (perfect numbers) でありとくにこの形の数をユークリッドの完全数という.

$a = 2^e Q$ の方程式について
$\sigma(a) = \sigma(2^e Q) = (2^{e+1} - 1)(Q + 1)$
$(2^{e+1} - 1)(Q + 1) = 2^{e+1}Q - Q + 2^{e+1} - 1 = 2a.$
かくしてえられた $\sigma(a) = 2a$ を完全数の方程式という.
最近 (2015 年 9 月 17 日)49 個目の完全数が発見された.
$e = 74207281, Q = 2^e - 1$ は素数で $a = 2^e Q$ が 49 個目の完全数である.

完全数についての一般的疑問:
1) 完全数は無限にあるか,
2) 奇数の完全数はあるか
については現代数学は何も答えることができない.

2300 年後の数学者が解けない問題が完全数の問題である．これだけでも不朽の価値がある.

しかし, 完全数の一般化をするとそこから多くの興味ある問題が出てくる.

4　半完全数

$q = 2^{e+1} - 1$: 素数のとき $2^e q$ は完全数であるがそれを半分にした $a = 2^{e-1}q$ を (狭義の) 半完全数 (half perfect numbers) という.

半完全数 $a = 2^{e-1}q$ に対して,

$$\sigma(a) = \sigma(2^{e-1}q) = (2^e - 1)(q+1) = (2^e - 1)q + 2^e - 1 = 2a - q + 2^e - 1.$$

$q = 2^{e+1} - 1$ を用いて

$$2\sigma(a) = 4a - 2q + 2^{e+1} - 2 = 4a - q - 1.$$

$\mathrm{Maxp}(a)$ を a の最大素因子とおくと半完全数の満たす方程式

$$2\sigma(a) = 4a - \mathrm{Maxp}(a) - 1$$

が得られた. これを満たす解を (広義の) 半完全数という.

4.1 半完全数の数表

パソコンで得られた半完全数の数表は次のとおり.

表 1: 半完全数

a	素因数分解
3	3
14	$2 * 7$
248	$2^3 * 31$
1155	$3 * 5 * 7 * 11$
4064	$2^5 * 127$
483945	$3 * 5 * 7 * 11 * 419$
3267770	$2 * 5 * 11 * 61 * 487$

方程式は $2\sigma(a) = 4a - \mathrm{Maxp}(a) - 1$ となる.

$3 = 6/2$,$14 = 2 * 7 = 28/2$,$248 = 2^3 * 31 = 496/2$, $4064 = 2^5 * 127 = 8128/2$ は狭義の半完全数である.

さて新規参入組は次のとおり:

$1155 = 3 * 5 * 7 * 11$,

$483945 = 3 * 5 * 7 * 11 * 419$,

$3267770\ 2 * 5 * 11 * 61 * 487$.

$1155 = 3 * 5 * 7 * 11$ は小さいほうから 4 個の奇素数の積でその姿がいかにも優美なのでニックネームをつけてオビと呼ぶ.

一方 $483945 = 3 * 5 * 7 * 11 * 419$ と $32677702 * 5 * 11 * 61 * 487$

は両者とも 5 個の奇素数の積で取り扱いは簡単にはいかない. これらの研究は進んでいないので, 名前はまだ無い.

漱石の猫のように最後まで「名前はまだ無い」になるかもしれない.

5 オビの特徴付け

$a = 1155 = 3 * 5 * 7 * 11$ の特徴付けを考えてみよう.

結論を先取りしていうと, 4 つの異なる奇素数 p, q, r, s の積 $a = prsq, (p < r < s < q)$ が半完全数の方程式 $2\sigma(a) = 4a - \mathrm{Maxp}(a) - 1$ を満たすとき, それは 1155, すなわちオビになる, というのである.

$q = \mathrm{Maxp}(a)$ とおくとき, 方程式は $2\sigma(a) = 4a - q - 1$ になりその解として $a = pqrs, (p < r < s < q)$ があるとする.

しかし4変数の不定方程式を解くのは困難そうなので伏字法でとく. すなわち解 $a=3*5*7*11$ において, 7,11 を伏せておき

$a=15sq$ を解として解くのである.

i) $a=15sq$ とする.

$2\sigma(a)=48*\widetilde{sq}, (\widetilde{s}=s+1, \widetilde{q}=q+1)$, $4a-q-1=60sq-q-1$ なので

$$48*\widetilde{sq}=60sq-q-1.$$

$C=\widetilde{sq}, D=sq, \Delta=s+q$ とおくとき $C=\widetilde{sq}=D+\Delta+1$.

よって $48(D+\Delta+1)=60D-q-1$ になり

$$48(\Delta+1)=12D-q-1.$$

これより

$$q(12s-49)=49+48s.$$

$3\leq p, 5\leq p+2\leq r, 7\leq r+2\leq s$ により $s\geq 7, q\geq s+2$.

$$q(12s-49)=49+48s\geq(12s-49)(s+2).$$

$F(x)=(12x-73)x-147$ とおくと, $F(s)\leq 0$.

一方, $F(7)=77-147<0, F(11)>0$. よって, $s\leq 11$. s は素数なので $s\leq 7$.

仮定から $s=7$. このとき, $q(12s-49)=49+48s$ により, $q=11; a=15*7*11=1155$.

ii) $p=3$ とする. すなわち, $a=3rsq$.

$r=5$ は前の項で調べたので $r\geq 7$ と仮定してよい.

$2\sigma(a)=8\widetilde{rsq}$, $4a-q-1=12rsq-q-1$ なので

$$8(r+1)\widetilde{sq}=12rsq-q-1.$$

$A=\widetilde{sq}, B=sq$ とおくと

$$8(r+1)A=12rB-q-1.$$

$$q+1=12rB-8(r+1)A=r(12B-8A)-8A.$$

$r\geq 7$ によって

$$q+1=r(12B-8A)-8A\geq 7(12B-8A)-8A=84B-64A.$$

$\Delta=q+s$ とおくとき, $A=B+\Delta+1$.

$$84B-64A=84(B+\Delta+1)-64A=20B-64(\Delta+1).$$

$$q+1=20B-64(\Delta+1)>20B-80(\Delta+1)+q+1$$

と変形して

$$0\geq 20B-80(\Delta+1).$$

$0\geq B-4(\Delta+1)$ になり, $q_0=q-4, s_0=s-4$ とおくとき $q_0s_0=qs-4\Delta+16$ なので

$$4\geq B-4\Delta=q_0s_0-16.$$

$20\geq q_0s_0$ になり, 一方, $s_0=s-4\geq 7, q_0=q-4\geq 9$.
$20>s_0q_0\geq 63$; 矛盾.

iii) $a=prsq$. $p=3$ は前の項で調べたので $p\geq 5$ を仮定する. すると $r\geq 7$.
$2\sigma(a)=2(p+1)\widetilde{rsq}$, $A=\widetilde{rsq}, B=rsq$ とおくと $2\sigma(a)=4a-q-1=4prsq-q-1$ なので

$$2(p+1)A=4pB-q-1.$$

整理して

$$p(2A-4B)=-2A-q-1.$$

$p\geq 5$ によって

$$2A+q+1=2p(2B-A)\geq 10(2B-A).$$

整理して

$$q+1\geq 10(2B-A)-2A=20B-12A=4(5B-3A).$$

$C=\widetilde{sq}, D=sq$ とおくとき $A=(r+1)C, B=rD$ によって,

$$5B-3A=5rD-3(r+1)C=r(5D-3C)-3C.$$

$r\geq 7, \Delta=s+q$ によって ,$C=D+\Delta+1$ を用いると

$$q+1\geq 4(5B-3A)=4r(5D-3C)-12C\geq 140D-96C=44D-96(\Delta+1).$$

大きく評価して

$$1\geq 44(D-3(\Delta+1)).$$

$$1 \geq D - 3(\Delta + 1).$$

$s_0 = s - 3 \geq 11 - 3 = 8, q_0 = q - 3 \geq 13 - 3 = 10, s_0 q_0 = sq - 3\Delta + 9 = D - 3\Delta + 9$ を用いて

$$1 \geq D - 3(\Delta + 1) = s_0 q_0 - 12.$$

よって, $13 \geq s_0 q_0 > 8 * 10 = 80$; 矛盾.

6 重完全数

$q = 2^{e+1} - 1$ が素数のとき $2^e q$ を重ねた $a = 2^{e+1} q$ を狭義の重完全数 (double perfect numbers) という.

狭義の重完全数の満たす方程式を求めよう.

重完全数 $a = 2^{e+1} q$ に対して,

$$\sigma(a) = \sigma(2^{e+1} q) = (2^{e+2} - 1)(q + 1) = (2^{e+2} - 1)q + 2^{e+2} - 1 = 2a - q + 2^{e+2} - 1.$$

$q = 2^{e+1} - 1$ を用いて $2q = 2^{e+2} - 2$. ゆえに

$$\sigma(a) = 2a + \mathrm{Maxp}(a) + 1.$$

これを重完全数の方程式といい, この解を広義の重完全数という.

7 広義の重完全数

$\sigma(a) = 2a + \mathrm{Maxp}(a) + 1$ を満たす解を求めて次の結果を得た.

表 2: $[P = 2, m = 0]$ 重完全数

a	素因数分解
12	$2^2 * 3$
56	$2^3 * 7$
66	$2 * 3 * 11$
992	$2^5 * 31$
3230	$2 * 5 * 17 * 19$
4730	$2 * 5 * 11 * 43$
8415	$3^2 * 5 * 11 * 17$
16256	$2^7 * 127$
28035	$3^2 * 5 * 7 * 89$
491536	$2^4 * 31 * 991$
9914264	$2^3 * 17 * 269 * 271$

以下のものは完全数の 2 倍になっている (重完全数の定義の意味).
$12 = 2^2 * 3$, $56 = 2^3 * 7$, $992 = 2^5 * 31$, $16256 = 2^7 * 127$

しかしこれら以外に新規参入組がある.
$66 = 2 * 3 * 11$,
$3230 = 2 * 5 * 17 * 19$
$4730 = 2 * 5 * 11 * 43$
$8415 = 3^2 * 5 * 11 * 17$
$28035 = 3^2 * 5 * 7 * 89$
$491536 = 2^4 * 31 * 991$
$9914264 = 2^3 * 17 * 269 * 271$
これらは思いもかけぬ存在で, なぜ出てきたか問いたくなる.

新規参入組は珍種のモンスターであり. これらモンスターを調べることは興味ある課題である.

最初にモンスターを分類する.
I 型 名前は $2^e rq$
$66 = 2 * 3 * 11$,
$491536 = 2^4 * 31 * 991$

II 型 名前は $10rq$

$3230 = 2 * 5 * 17 * 19$

$4730 = 2 * 5 * 11 * 43$

III 型 名前は $45rq$

$8415 = 3^2 * 5 * 11 * 17$

$28035 = 3^2 * 5 * 7 * 89$

しかし $9914264 = 2^3 * 17 * 269 * 271$ はまだ分類できていないし名前もついていない.

7.1 I 型の解

$a = 2^e qr, (r < q :$ 素数) と書ける解が $q = \mathrm{Maxp}(a)$ とおくとき

$$\sigma(a) = 2a + q + 1$$

を満たすとする.

$\sigma(a) = (2^{e+1} - 1)\widetilde{qr}$ および $2a + q + 1 = 2^{e+1}qr + q + 1$ なので $\widetilde{r} = r + 1$ を用いて

$$(2^{e+1} - 1)\widetilde{qr} = 2^{e+1}qr + q + 1.$$

$$2^{e+1}(\widetilde{qr} - qr) = \widetilde{qr} + q + 1.$$

$\Delta = q + r$ を使うと

$$(2^{e+1})(\Delta + 1) = qr + \Delta + 1 + q + 1 = q\widetilde{r} + \Delta + 2.$$

よって,

$$q\widetilde{r} = 2^{e+1}(\Delta + 1) - \Delta - 2.$$

$\Delta' = \Delta + 1$ とおくとき $\Delta' = q + \widetilde{r}$.

それゆえ

$$q\widetilde{r} = (2^{e+1} - 1)\Delta' - 1.$$

$N_0 = 2^{e+1} - 1$ とおくとき

$$q\widetilde{r} = N_0\Delta' - 1.$$

$q_0 = q - N_0, \widetilde{r}_0 = \widetilde{r} - N_0$ とおけば

$$q_0\widetilde{r}_0 = q\widetilde{r} - N_0(q + \widetilde{r}) + N_0^2.$$

これより

$$q_0\widetilde{r}_0 = N_0^2 - 1.$$

$D = N_0^2 - 1$ とおくとき $q_0\widetilde{r}_0 = D$.

そこで $e = 1, 2, 3, \cdots$ に応じて, $N_0 = 2^{e+1} - 1, D = N_0^2 - 1$ を求め因数分解 $q_0\widetilde{r}_0 = D$ に応じて, $q = q_0 + N_0, r = \widetilde{r}_0 + N_0 - 1$ が素数になるものを選べばよい.

パソコンでの計算の結果

$a = 2 * 11 * 3$ と $a = 2^4 * 991 * 31$.

$e < 10$ ではこの他に解はない.

7.2 II 型の解

$a = 2 * 5 * qr, (r < q : 素数)$ と書ける解について調べる.

i) $q = \mathrm{Maxp}(a)$ とおくとき

$$\sigma(a) = 2a + q + 1$$

の解で $a = 2 * 5 * qr, (r < q : 素数)$, と書けるものを探す.

$\sigma(a) = 18\widetilde{q}\widetilde{r}$, $2a + q + 1 = 20qr + q + 1 = 18\widetilde{q}\widetilde{r}$ なので

$$18\widetilde{q}\widetilde{r} = 20qr + q + 1.$$

$\Delta = q + r$ とおくとき $18\widetilde{q}\widetilde{r} = 18(qr + \Delta + 1) = 20qr + q + 1$ によって

$$-2(qr - 9\Delta - 9) = q + 1.$$

$q_0 = q - 9, r_0 = r - 9$ とおけば $q_0r_0 = qr - 9\Delta + 81$ になり

$$q_0r_0 = qr - 9\Delta - 9 + 90.$$

$$-2(q_0r_0 - 90) = q + 1 = q_0 + 10.$$

これを整理して

$$170 = q_0(2r_0 + 1).$$

q_0 : 偶数 , $2r_0 + 1 > 2$: 奇数なので, $170 = 10 * 17 = 2 * 5 * 17$ により

1) $2r_0 + 1 = 5$, 2) $2r_0 + 1 = 17$, 3) $2r_0 + 1 = 5 * 17$.

1) $2r_0+1=17, q_0=10$; $q=19, r=r_0+9=17$. これより $a=2*17*19$.

2) $2r_0+1=5, q_0=34$. $q=43, 2r_0+1=5; r_0=2, r=11$. これより $a=2*11*43$.

3) $2r_0+1=5*17=85, q_0=2$. $q=11, r_0=42; r=51$. これは素数ではないから矛盾.

こうしてモンスター $a=2*5*17*19$ $a=2*5*11*43$ を get.

問 $a=3^e rq$ の形の解を求めよ.

解は存在しない.

7.3 III 型の解

7.4 $a=3^2*5*qr, (7 \le r < q:$ 素数) と書ける解

i)

$$\sigma(a)=2a+q+1$$

の解で $a=3^2*5*qr, (r<q:$ 素数), と書けるものを探す. $\Delta=r+q$ とおくとき

$\sigma(a)=13*6*\widetilde{qr}=13*6*(rq+\Delta+1)$, $2a+q+1=90rq+q+1$ なので

$$13*6*(rq+\Delta+1)=90rq+q+1.$$

整理して

$$12rq+q+1=78(\Delta+1)$$

$q \ge r+2 \ge 7$ により $q \ge 11$.

$r_0=r-7, q_0=q-11$ を用いると

$$77=(12r-77)q-78=(12r_0+7)q-78(r_0+7).$$

さらに整理して

$$(12r_0+7)q=(12r_0+7)(q_0+11)=(12r_0+7)q_0+132r_0+77.$$

$$78*7=546=q_0(12r_0+7)+54r_0.$$

r_0 は偶数なのでこれを順次調べる.

a) $r_0=0$ のとき. $546=7q_0$ になるので $q_0=78; q=89, r=7$. $a=3^2*5*7*89$.

b) $r_0=2$ のとき. $546=31q_0+108$ になるが整数解はない.

c) $r_0=4$ のとき. $546=q_0(48+7)+54*4$ になるので $q_0=6; q=17, r=11$. $a=3^2*5*11*17$.

$r_0 \geq 6$. $546 \geq q_0(72+7)+54*6$ になるので $324 \geq 79q_0; q_0 \leq 3$. $q \leq 13$ になるが $r \geq 6+7=13$ なので矛盾.

こうしてモスター $a = 3^2*5*7*89, a = 3^2*5*11*17$ を get.

ii) $a = 3^2*5*qr$ となる解は 2 つのモスターになることを示したのだが, さらに伏字を増やして, $a = 3^2pqr$ の場合も同じ結果になることを示そう.

$$\sigma(a) = 2a+q+1$$

の解 $a = 3^2pqr$ は $a = 3^2*5*rq, (r < q:$ 素数$)$, と書けることを示す.

$p \geq 5$ であり, $p = 5$ の場合は前の項で示したので, $p \geq 7$ を仮定して以下で矛盾を導く.

$r > p \geq 7$ により r は素数なので, $r \geq 11$.

$a = 3^2pqr$ のとき, $\sigma(a) = 13\widetilde{p}\widetilde{r}\widetilde{q} = 13(p+1)A$. 一方 $B = rq$ とおくと $A = \widetilde{r}\widetilde{q}$, $2a+q+1 = 18pB+q+1$ によって,

$$13(p+1)A = 18pB+q+1.$$

これより,

$$p(18B-13A) = 13A-q-1.$$

$p \geq 7$ によって,

$$p(18B-13A) = 13A-q-1 \geq 7(18B-13A) = 126B-91A.$$

ゆえに

$$104A-q-1 \geq 126B.$$

$A = B+\Delta+1$ によって,

$$104(B+\Delta+1)-q-1 \geq 126B.$$

これを整理して,

$$103 \geq 22B-104\Delta+q = q(22r-103)-104r.$$

$q \geq r+2$ により

$$103 \geq q(22r-103)-104r \geq (r+2)*(22r-103)-104r.$$

整理して

$$0 \geq 22r^2 - 163r - 206.$$

$f(x) = 22x^2 - 163x - 206$ の値を 7 から 19 までの奇数について求める.

表 3: $f(x)$ の値

a	素因数分解
x	$f(x)$
7	-269
9	109
11	663
13	1393
15	2299
17	3381
19	4639

$r \geq 11$ のときは $f(r) \geq 663$. したがって矛盾.

iii) $a = 3^2pqr$ となる解は 2 つのモスターになることを示したのだが, さらに伏字を増やして, $a = w^2pqr(2 < w < p < r < q : \text{素数})$ の場合も同じ結果になることを示したいが証明は完了していない.

$w = 3$ のときは前に示したので, $w \geq 5$ を仮定して矛盾に導く.

$a = w^2pqr$ のとき,$W = 1 + w + w^2$ とおくと

$\sigma(a) = W\widetilde{prq}, 2a + q + 1 = 2w^2pqr + q + 1$ により

$$W\widetilde{prq} = 2w^2pqr + q + 1.$$

これより,

$$\widetilde{prq} = w(2wpqr - (1 + w)\widetilde{prq}) + q + 1.$$

$Z = 2wpqr - (1 + w)\widetilde{prq}$ とおくと

$$\widetilde{prq} = wZ + q + 1.$$

$A = \widetilde{rq}, B = qr, \Delta = q + r$ を用いて

$$(p + 1)A = wZ + q + 1.$$

$Z = 2wpB - (1+w)(1+p)A = p(2wB - (1+w)A) - (1+w)A = w(2pB - (p+1)A) - (p+1)A$ により

$$(p+1)A = w^2(2pB - (p+1)A) - (p+1)Aw + q + 1.$$

$2B - A = B - (\Delta + 1)$ なので

$$2pB-(p+1)A = p(2B-A)-A = p(B-(\Delta+1))-B-(\Delta+1) = (p-1)B-(p+1)(\Delta+1) > 0.$$

$w \geq 5$ によって,
この先は証明ができていない.

しかしながら 解 $9914264 = 2^3 * 17 * 269 * 271$ は今のところ仲間がいないので, この正体がわからない．これをモスターとみたてても get したとは到底言えない.

8 完全数の平行移動

m だけ平行移動した完全数とは何か.

$q = 2^{e+1} - 1 + m$: 素数のとき $a = 2^e q$ を m だけ平行移動した (狭義の) 完全数という.

これは $\sigma(a) = 2a - m$ を満たす.

proof.

$a = 2^e q$ について

$\sigma(a) = \sigma(2^e q) = (2^{e+1} - 1)(q + 1)$

$$(2^{e+1} - 1)(q + 1) = 2^{e+1}q - q + 2^{e+1} - 1 = 2a - m$$

かくしてえられた

$$\sigma(a) = 2a - m$$

を m だけ平行移動した完全数の方程式という.

ここで話しを反転させて方程式 $\sigma(a) = 2a - m$ の解を考える. この解を m だけ平行移動した (広義の) 完全数という.

この方程式は $m = 0$ とすると古典的な完全数の定義に出てくる式である.

「(広義の) 完全数は (狭義の) 完全数となるか」という問題は奇数完全数の存在予想と同等でこれは 2300 年経っても解けない難問である.

m だけ平行移動した (広義の) 完全数を研究することを完全数の水平展開 という. ここでは多くの興味ある例と課題があるが, 完全な解決にはほど遠い.

9 $m \geq 0$ の場合

9.1 完全数の数表

次の結果はパソコンで $\sigma(a)$ の定義をそのまま用いて完全数の方程式 $\sigma(a) - 2a = 0$ となる a を 2 から 10,000,000 まで調べた結果である.

表 4: $[m = 0]$ 完全数

a	素因数分解
6	$2 * 3$
28	$2^2 * 7$
496	$2^4 * 31$
8128	$2^6 * 127$

$a = 2^e q, (q = 2^{e+1} - 1$: メルセンヌ素数) の形になっている.

一般に解 $a = 2^e q, (q:$ 素数$)$ の形になす解を正規形とよぶ.

正規形 $2^e q$ が $\sigma(a) = 2a - m$ を満たすなら $q = 2^{e+1} - 1 + m:$ 素数となる.

$m = 0$ のとき広義の完全数は正規形になる, というのが古代の数学者の抱いた夢の 1 つで, 偶数の場合に解決したのがオイラーである.

これは言い方を変えれば $m = 0$ のとき広義の完全数は狭義の完全数になるという予想になる.

9.2 $[m = 2]$ 完全数の数表

表 5: $[m = 2]$ 完全数の数表

a	素因数分解
3	3
10	$2 * 5$
136	$2^3 * 17$
32896	$2^7 * 257$
2147516416	$2^{15} * 65537$

$a = 2^e q, (q = 2^{e+1} + 1:$ フェルマ素数$)$

フェルマ素数 3,5,17,257,65537 が出てくる. これらはいわゆるフェルマ素数 5 兄弟である.

$m = 2$ のとき広義の完全数は狭義の完全数になる, ということは正しそうである.

a が偶数に限ってでもこのことを証明したいのだができない.

以下広義の完全数に限って計算した結果を載せる.

9.3 $[m = 4]$ 完全数の数表

表 6: $[m = 4]$ 完全数の数表

a	素因数分解
5	5
14	$2 * 7$
44	$2^2 * 11$
110	$2 * 5 * 11$
152	$2^3 * 19$
884	$2^2 * 13 * 17$
2144	$2^5 * 67$
8384	$2^6 * 131$
18632	$2^3 * 17 * 137$
116624	$2^4 * 37 * 197$

正規形 $2^e q$ 以外に非正規形の解が次のように登場する.

$a = 884 = 2^2 * 13 * 17$

$a = 18632 = 2^3 * 17 * 137$

$a = 116624 = 2^4 * 37 * 197$

これらは $2^e rq(r < q:$ 素数$)$ 形で $\sigma(a) = 2a - 4$ を満たす.

かくして, $m = 4$ の場合は広義の完全数で狭義の完全数にならないものが出てきた. しかし, $m = 4$ の広義の完全数は正規形と $2^e rq(r < q:$ 素数$)$ 形の解でつきているのだろう. しかしこれも証明できそうにない.

10 m だけ平行移動した半完全数と重完全数

$q = 2^{e+1} - 1 + m:$ 素数のとき $a = 2^e q$ を狭義の m だけ平行移動した完全数という.

同様に $a = 2^{e-1} q$ を狭義の m だけ平行移動した半完全数という.

狭義の半完全数の満たす方程式を求めよう.

半完全数 $a = 2^{e-1} q$ に対して,

$$\sigma(a)=\sigma(2^{e-1}q)=(2^e-1)(q+1)=(2^e-1)q+2^e-1=2a-q+2^e-1.$$

$q=2^{e+1}-1+m$ を用いて

$$2\sigma(a)=4a-2q+2^{e+1}-2=4a-2q+q+1-m-2=4a-q-m-1.$$

$\mathrm{Maxp}(a)$ を a の最大素因子とおくと半完全数の満たす方程式

$$2\sigma(a)=4a-\mathrm{Maxp}(a)-m-1$$

が得られた. これを満たす解を広義の半完全数という.

m をいろいろ変えると多くの半完全数と重完全数がえられそこに多くのモンスターが登場し, get してください, と叫んでいるかのようだ.